e-Modul

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

MATEMATIKA JENJANG SMA

KELAS XI

Disusun oleh:

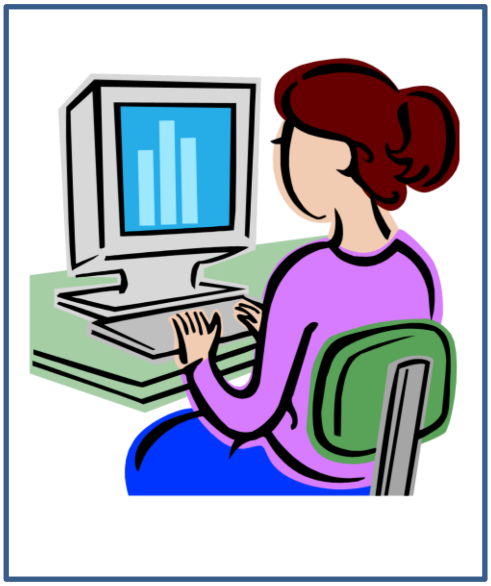
ANISA NUR AINI

No Peserta : 20030918010101

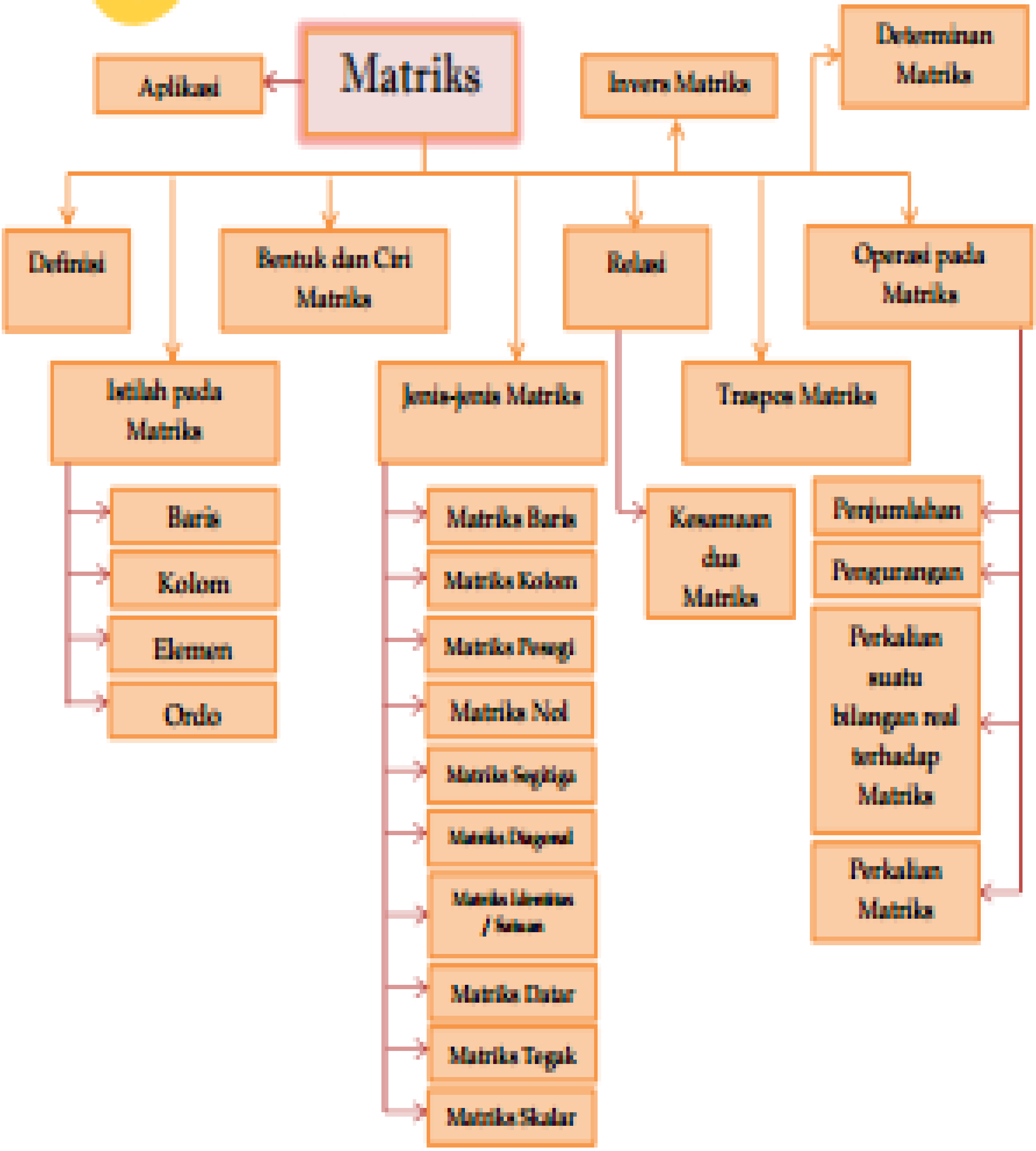
MATEMATIKA – PPGDJ MATEMATIKA

UNIVERSITAS SARJANAWIYATA TAMAN SISWA

DAFTAR ISI



PETA KONSEP


Matriks
Aplikasi
Invers Matriks
Determinan Matriks
Definisi
Bentuk dan Ciri Matriks
Relasi
Operasi pada Matriks
Istilah pada Matriks
Jenis-jenis Matriks
Traspos Matriks
Baris
Kolom
Elemen
Ordo
Matriks Baris
Matriks Kolom
Matriks Persegi
Matriks Nol
Matriks Segitiga
Matriks Diagonal
Matriks Identitas / Satuan
Matriks Datar
Matriks Tegak
Matriks Skalar
Kesamaan dua Matriks
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian suatu bilangan real terhadap Matriks
Perkalian Matriks

GLOSARIUM

Adjoint	: transpose dari matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen matriks
Determinan	: suatu nilai tertentu yang berkaitan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujursangkar
Identitas	: jenis matriks yang elemen diagonal utamanya 1 dan yang lain 0 serta bila dikalikan dengan matriks lain hasilnya tetap matriks
Invers	: (atau fungsi kebalikan) (dalam matematika) fungsi yang merupakan kebalikan aksi dari suatu fungsi
Matriks	: sekumpulan bilangan yang disusun secara baris dan kolom dan ditempatkan pada kurung biasa atau kurung siku sedemikian hingga berbentuk persegi panjang
Ordo	: bilangan yang menunjukkan banyaknya baris (m) dan banyak kolom (n)
Transpose	: mengubah susunan matriks dari baris menjadi kolom atau sebaliknya

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai penulisan dan penyajian informasi dalam bentuk tabel. Misal tabel spesifikasi sebuah produk dalam berbagai tipe sebagai berikut.

Type	Load Motor Control	Electric KW	Gas CFH Direc Fired	Gas CFH Indirect Fired	Steam LB/HR
Type I	4,35	13,5	44	55,00	52
Type II	4,75	20,0	67	83,75	77
Type III	6,15	26,4	89	111,25	103
Type IV	5,65	39,6	133	166,25	154
Type V	8,55	52,8	177	221,25	205
Type VI	10,75	82,5	265	331,25	308

Tabel di atas dapat disusun lebih sederhana tanpa menggunakan kepala kolom dan kepala baris, sehingga tampak seperti susunan di bawah ini.

4,35	13,5	44	55,00	52
4,75	20,0	67	83,75	77
6,15	26,4	89	111,25	103
5,65	39,6	133	166,25	154
8,55	52,8	177	221,25	205
10,75	82,5	265	331,25	308

Bila susunan lambang bilangan itu diberi kurung atau kurung siku, maka susunan itu disebut **matriks.**

$$\begin{bmatrix} 4{,}35 & 13{,}5 & 44 & 55{,}00 & 52 \\ 4{,}75 & 20{,}0 & 7 & 83{,}75 & 77 \\ 6{,}15 & 26{,}4 & 89 & 111{,}25 & 103 \\ 5{,}65 & 39{,}6 & 133 & 166{,}25 & 154 \\ 8{,}55 & 52{,}8 & 177 & 221{,}25 & 205 \\ 10{,}75 & 82{,}5 & 265 & 331{,}25 & 308 \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks adalah susunan bilangan dalam bentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom dengan ukuran tertentu yang disebut **ordo.**

Disimbolkan dengan huruf besar, dapat dioperasikan antar matriks dengan syarat-syarat tertentu, antara lain penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan bilangan riil, dan perkalian antar matriks.

Selanjutnya akan kalian pelajari bagaimana menentukan nilai determinan dan invers suatu matriks, khusus untuk matriks ordo 2 x 2 dan 3 x 3.

PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Materi bahasannya terbagi menjadi dua bagian besar pembelajaran. Pembelajaran pertama membahas tentang determinan, yaitu cara menentukan determinan ordo 2 x 2 maupun ordo 3 x 3 dan permasalahan-permasalahan yang dapat diselesaikan dengan determinan.

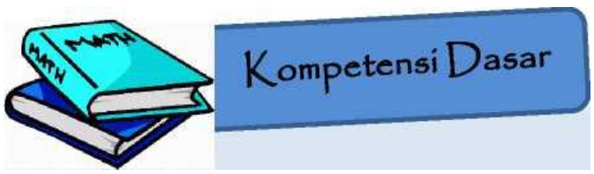
Pada pembelajaran kedua pembahasan tentang invers matriks, yaitu cara menentukan invers ordo 2 x 2 maupun ordo 3 x 3 dan permasalahan-permasalahan yang dapat diselesaikan dengan invers. Di dalamnya terdapat materi tentang matriks minor (sub matriks), kofaktor, dan adjoint suatu matriks.

Kemudian dalam bagian kegiatan belajar yang ketiga dibahas sifat-sifat determinan dan invers baik ordo 2 x 2 maupun 3 x 3, dan persamaan matriks.

Pada setiap bagian akan diberikan rangkuman, soal-soal latihan, dan penilaian diri. Selanjutnya, pada akhir modul ini kalian akan "ditantang" untuk mengerjakan soal evaluasi. Jika nilai pada evaluasi tersebut kurang dari 75, maka disarankan kalian untuk melakukan review pembelajaran hingga paham dan melakukan evaluasi lagi.

KOMPETENSI

Secara umum tujuan instruksional yang hendak dicapai modul ini adalah mengharapkan kalian dapat menentukan determinan dan invers suatu matriks persegi baik matriks ordo 2 x 2 maupun ordo 3 x 3, dapat menjelaskan sifat-sifat determinan dan invers, serta memanfaatkannya dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan.



3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2 x 2 dan 3 x 3.

3.4.1 Menentukan nilai determinan ordo 2 x 2.

3.4.2 Menentukan nilai determinan ordo 3 x 3.

3.4.3 Menentukan invers matriks ordo 2 x 2.

3.4.4 Menentukan invers matriks ordo 3 x 3.

3.4.5 Menjelaskan sifat-sifat determinan matriks ordo 2 x 2.

3.4.6 Menjelaskan sifat-sifat invers matriks ordo 3 x 3.

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2 x 2 dan 3 x 3.

4.4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan matriks.

4.4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan invers matriks.

PEMBELAJARAN I

DEFINISI DETERMINAN

Definisi

Determinan adalah suatu bilangan real yang diperoleh dari suatu proses dengan aturan tertentu terhadap matriks persegi. Determinan dari sebuah matriks persegi A, dinotasikan dengan det(A) atau |A|.

DETERMINAN MATRIKS ORDO 2 x 2

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A adalah det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc.

Contoh:

Jika A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, maka det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = (1 x 4) – (2 x 3) = 4 – 6 = -2.

DETERMINAN MATRIKS ORDO 3 x 3

Sekarang, bagaimana menentukan nilai determinan matriks persegi ordo 3 x 3?

Seseorang bernama Piere Sarrus, matematikawan Perancis menemukan metode sederhana untuk menghitung nilai determinan matriks ordo 3 x 3 yang kemudian disebut sebagai **metode Sarrus.**

Misal menentukan nilai determinan matriks A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dengan metode Sarrus:

$$|A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}\right| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Contoh:

Jika A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, maka:

det(A) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix}\Bigg|$

= ((2.3.2) + (1.1.1) + (4.(-1).(-2))) – ((4.3.1) + (2.1.(-2)) + (1.(-1).2))

= (12 + 1 + 8) – (12 – 4 – 2)

= 21 – 6

= 15

PENGGUNAAN DETERMINAN

Penggunaan determinan diantaranya dalam penyelesaian masalah sistem persamaan linear. Seorang ahli matematika Swiss bernama Gabriel Cramer menggunakan determinan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan linear, yang kemudian disebut sebagai **Metode Cramer.**

Untuk suatu sistem persamaan linear dua variabel, $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

Diperoleh nilai-nilai:

D = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Dx = $\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$

Dy = $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

TERKADANG MATEMATIKA YANG RUMIT JAWABANNYA SEDERHANA

Sehingga, nilai x dan y diperoleh:

x = $\frac{Dx}{D}$ dan y = $\frac{Dy}{D}$

Untuk suatu sistem persamaan linear tiga variabel, $\begin{cases} ax+by+cz=j \\ dx+ey+fz=k \\ gx+hy+iz=l \end{cases}$

Diperoleh nilai-nilai:

D = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Dx = $\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}$

Dy = $\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}$

Dz = $\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}$

Sehingga, nilai x dan y diperoleh:

x = $\frac{Dx}{D}$, y = $\frac{Dy}{D}$, dan z = $\frac{Dz}{D}$

Permasalahan 1:

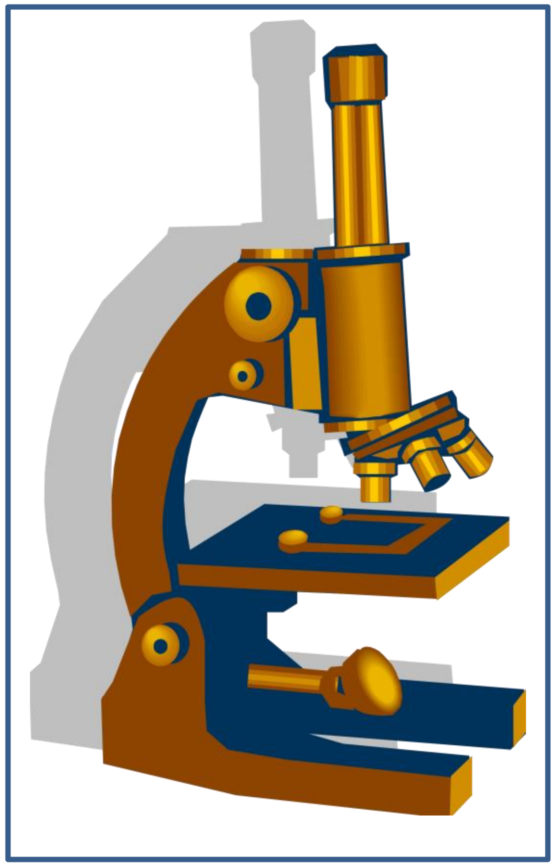
Aldi membeli 4 buku dan 5 pensil seharga Rp21.500,00. Ida membeli 6 buku dan 2 pensil seharga Rp24.000,00. Jika Mira ingin membeli 3 buku dan 2 pensil berapa yang harus dibayar Mira?

Penyelesaian:

Misal harga buku dinyatakan dengan x dan harga pensil dinyatakan dengan y.

Sistem persamaan linear yang dapat dibuat,

$$\begin{cases} 4x + 5y = 21500 \\ 6x + 2y = 24000 \end{cases}$$



Dengan metode Cramer, diperoleh:

D = $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 – 30 = -22

Dx = $\begin{vmatrix} 21500 & 5 \\ 24000 & 2 \end{vmatrix}$ = 43.000 – 120.000 = -77000

Dy = $\begin{vmatrix} 4 & 21500 \\ 6 & 24000 \end{vmatrix}$ = 96.000 – 129.000 = -33.000

Nilai variabel x dan y diperoleh:

x = $\dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-77.000}{-22}$ = 3.500

y = $\dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-33.000}{-22}$ = 1.500

Jadi, harga sebuah buku dan sebuah pensil masing-masing Rp3.500,00 dan Rp1.500,00.

Karena Mira ingin membeli 3 buku dan 2 pensil, maka:

3x + 2y = 3(Rp3.500,00) + 2(Rp1.500)

= Rp10.500 + Rp3.000

= Rp13.500

Jadi, harga yang harus dibayar Mira adalah Rp13.500,00.

Permasalahan 2:

Sebuah bilangan terdiri dari 3 angka yang jumlahnya 9. Angka ratusan adalah $\frac{1}{8}$ dari bilangan yang dibentuk oleh kedua angka yang dibelakang. Angka satuan adalah $\frac{1}{8}$ dari bilangan yang dibentuk oleh kedua angka yang di depan.

Carilah bilangan tersebut!

Penyelesaian:

Misal: x = ratusan

y = puluhan

z = satuan

Persamaan 1: x + y + z = 9

Persamaan 2: x = $\frac{1}{8}$ (10y + z) → 8x – 10y – z = 0

Persamaan 3: z = $\frac{1}{8}$ (10x + y) → 10x + y – 8z = 0

Sistem persamaan linearnya:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 8x - 10y - z = 0 \\ 10x + y - 8z = 0 \end{cases}$$

Dengan metode Cramer, diperoleh nilai-nilai:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & -10 & -1 & 8 & -10 \\ 10 & 1 & -8 & 10 & 1 \end{array}\right|$$

= ((1.(-10).(-8)) + (10.(-1).1) + (1.8.1)) – ((10.(-10).1) + (1.(-1).1) + ((-8).8.1))

= (80 – 10 + 8) – (-100 – 1 – 64)

= 78 – (-165)

= 243

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} 9 & 1 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & -10 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

= (((-8).(-10).9) + (0.(-1).1) + (1.0.1)) – (0.(-10).1) + (1.(-1).9) + ((-8).0.1))

= (720 – 0 + 0) – (0 – 9 – 0)

= 720 – (-9)

= 720 + 9

= 729

$$Dy = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 0 & -1 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -8 & 10 & 0 \end{array}\right|$$

= (((-8).0.1) + ((10.(-1).9) + (0.8.1)) – ((10.0.1) + (0.(-1).1) + (-8).8.9)

= (0 – 90 + 0) – (0 – 0 – 576)

= -90 – (-576)

= -90 + 576

= 486

$$Dz = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 8 & -10 & 0 & 8 & -10 \\ 10 & 1 & 0 & 10 & 1 \end{array}\right|$$

= ((0.(-10).1) + (10.0.1) + (1.8.9)) – ((10.(-10).9) + (1.0.1) + (0.8.1))

= (0 + 0 + 72) – ((-900) + 0 + 0)

= 72 – (-900)

= 72 + 900

= 972

Nilai variabel x, y, z:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{729}{243} = 3$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{486}{243} = 2$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{972}{243} = 4$$

Jadi, bilangan yang dimaksud adalah {(3, 2, 4)}.

MATEMATIKA BUKAN TENTANG ANGKA, PERSAMAAN, ATAU PERHITUNGAN, TETAPI INI TENTANG PEMAHAMAN

RANGKUMAN

Ayo Simpulkan

1. Determinan matriks ordo 2 x 2

   A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   dirumuskan: det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

2. Determinan matriks ordo 3 x 3

   A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dengan metode Sarrus dirumuskan:

   det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = (aei + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

3. Menyelesaikan persamaan linear

   Untuk suatu sistem persamaan linear dua variabel, $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

   Diperoleh nilai-nilai

   D = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, Dx = $\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$, Dy = $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

   Sehingga, nilai x dan y diperoleh: x = $\frac{Dx}{D}$ dan y = $\frac{Dy}{D}$

   Untuk suatu sistem persamaan linear tiga variabel, $\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$

   Diperoleh nilai-nilai

   D = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, Dx = $\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}$, Dy = $\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}$, Dz = $\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}$

   Sehingga, nilai x dan y diperoleh:

   x = $\frac{Dx}{D}$, y = $\frac{Dy}{D}$, dan z = $\frac{Dz}{D}$

LATIHAN 1

Kerjakan semua soal di bawah ini, tuliskan pada kolom yang disediakan dan kemudian cocokkan dengan alternatif penyelesaiannya!

1. Tentukan determinan dari matriks A = $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$!

Jawab:

Jajj

2. Tentukan determinan dari matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$!

Jawab:

Jajj

3. Dea dan Anton bekerja pada pabrik tas. Dea dapat menyelesaikan 3 buah tas setiap jam dan Anton dapat menyelesaikan 4 tas setiap jam. Jumlah jam kerja Asti dan Anton adalah 16 jam sehari, dengan jumlah tas yang dibuat oleh keduanya adalah 55 tas. Apabila jam kerja keduanya berbeda, tentukan jam kerja mereka masing-masing!

Jawab:

Jajj

Alternatif Penyelesaian:

1. Matriks A = $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, maka:

   det(A) = $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$
   = ((-4).2) – (3.(-1))
   = (-8 – (-3))
   = -8 + 3
   = -5

2. Matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, maka:

   det(A) = $\left|\begin{matrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{matrix}\right|$
   = ((2.2.4) + (4.1.3) + ((-2).(-1).(-3)) – ((3.2.(-2)) + ((-3).1.2) + (4.(-1).4))
   = (16 + 12 + (-6)) – ((-12) + (-6) + (-16))
   = (22 – (-34))
   = 22 + 34
   = 56

3. Misalkan:
   Jam kerja Dea = x
   Jam kerja Anton = y
   Maka,
   3x + 4y = 55
   x + y = 16

   Sistem persamaan linear yang dapat dibuat,
   $$\begin{cases} 3x + 4y = 55 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

Dengan metode Cramer, diperoleh:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3.1 – 4.1) = 3 – 4 = -1$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 55 & 4 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} = (55.1 – 4.16) = 55 – 64 = -9$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 55 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = (3.16 – 55.1) = 48 – 55 = -7$$

Nilai variabel x dan y diperoleh:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-9}{-1} = 9$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-7}{-1} = 7$$

Jadi, Dea bekerja selama 9 jam dan Anton bekerja selama 7 jam dalam sehari.

PENILAIAN DIRI

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No	Pertanyaan	Jawaban
1	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 2 x 2?	o Ya o Tidak
2	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 3 x 3?	o Ya o Tidak
3	Apakah Anda telah memahami cara menyelesaikan SPL dua variabel atau tiga variabel dengan metode Cramer?	o Ya o Tidak

Jika jawaban “Tidak”, maka segera lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih “Tidak”.

Jika semua jawaban “Ya”, maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

PEMBELAJARAN II

DEFINISI INVERS

Definisi

Misalkan A dan B merupakan dua matriks persegi dengan ordo sama. Jika matriks A dan B memenuhi hubungan AB = BA = I, dikatakan A dan B merupakan dua matriks yang saling invers. Matriks B disebut invers perkalian dari matriks A dan dinotasikan dengan A^{-1}. Matriks A disebut invers perkalian dari matriks B dan dinotasikan dengan B^{-1}.

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, maka:

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ dan

$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Oleh karena berlaku AB = BA = I, maka A dan B merupakan dua matriks yang saling invers.

Invers dari matriks A adalah $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ dan

Invers dari matriks B adalah $B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

INVERS MATRIKS ORDO 2 x 2

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

dengan syarat det(A) = ad – bc $\neq 0$

Jika det(A) = 0, matriks A tidak mempunyai invers.

Contoh:

Jika A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{2.3-1.(-1)}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{6+1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

INVERS MATRIKS ORDO 3 x 3

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$

dengan det(A) = |A| = (aei + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi), dan Adjoint A = Adj(A).

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Contoh:

Jika A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, maka A^{-1} = $\frac{1}{\det(A)} Adj(A)$

det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{matrix}\Bigg|$

= ((1.1.1) + (4.1.5) + (2.2.3)) – ((2.1.5) + (1.1.3) + (4.2.1))

= (1 + 20 + 12) – (10 + 3 + 8)

= 33 – 21

= 12

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 - 1.3 & -(4.1 - 2.3) & 4.1 - 2.1 \\ -(2.1 - 1.5) & 1.1 - 2.5 & -(1.1 - 2.2) \\ 2.3 - 1.5 & -(1.3 - 4.5) & 1.1 - 4.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 1 & 17 & -7 \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \\ 1 & 17 & -7 \end{pmatrix}$$

PENGGUNAAN INVERS

Persamaan Matriks

Jika invers matriks A, yaitu A^{-1} ada, berlaku hubungan berikut:

Jika AX = B, maka X = $A^{-1}B$

Jika XA = B, maka X = BA^{-1}

Contoh:

Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$

Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan:

1. AX = B
2. XA = B

Penyelesaian:

1. AX = B

   A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, maka

   $$A^{-1} = \frac{1}{2.4-3(-1)}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$= \frac{1}{8+3}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -22 & 11 \\ -33 & 22 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks X yang memenuhi AX = B adalah $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

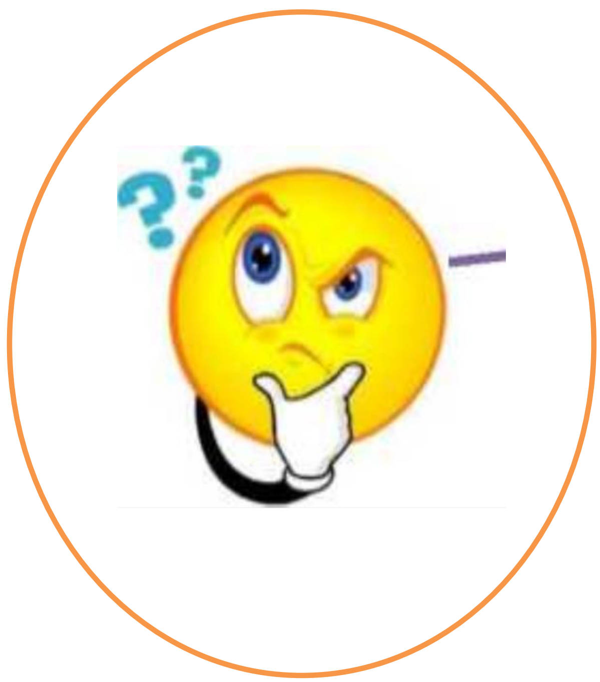
2. $XA = B$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{2.4 - 3(-1)}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8+3}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$
\begin{aligned}
XA &= B \\
XAA^{-1} &= BA^{-1} \\
XI &= BA^{-1} \\
X &= BA^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -44 & 55 \\ -33 & 44 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Jadi, matriks X yang memenuhi XA = B adalah $X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

ORANG SUKSES TAKKAN PERNAH MENGELUH BAGAIMANA KALAU AKAN GAGAL,NAMUN BERUSAHA BAGAIMANA UNTUK BERHASIL

RANGKUMAN

Ayo Simpulkan

1. Invers matriks ordo 2 x 2

   Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, invers dari matriks A adalah:

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   dengan syarat det(A) = ad – bc $\neq$ 0

   Jika det(A) = 0, matriks A tidak mempunyai invers.

2. Invers matriks ordo 3 x 3

   Jika A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$

   dengan det(A) = |A| = (aei + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi), dan Adjoint A = Adj(A).

   $$\mathrm{Adj(A)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

3. Persamaan Matriks

   Jika invers matriks A, yaitu A^{-1} ada, berlaku hubungan berikut:

   Jika AX = B, maka X = $A^{-1}B$

   Jika XA = B, maka X = BA^{-1}

LATIHAN 2

Kerjakan semua soal di bawah ini, tuliskan pada kolom yang disediakan dan kemudian cocokkan dengan alternatif penyelesaiannya!

1. Tentukan invers dari matriks A = $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$!

Jawab:

2. Tentukan invers dari matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$!

Jawab:

3. Diketahui matriks A dan B masing-masing $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$

   Tentukan matriks X yang memenuhi XA = B!

Jawab:

Alternatif Penyelesaian:

1. Matriks A = $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-4.2)-(-1.3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-8-(-3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-8+3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 3 & -3 \end{array}\right|$$

= ((2.2.4) + (4.1.3) + ((-2).(-1).(-3)) – ((3.2.(-2)) + (2.1.(-3)) + (4.(-1).4))

= (16 + 12 + (-6)) – ((-12) + (-6) + (-16))

= 22 – 34

= -12

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.4-1.(-3) & -(4.4-((-2).(-3))) & 4.1-((-2).2) \\ -(((-1).4)-1.3) & 2.4-((-2).3) & -(2.1-((-2).(-1))) \\ ((-1).(-3))-2.3 & -(2.(-3)-4.3) & 2.2.-4.(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+3 & -(16-6) & 4+4 \\ -(-4-3) & 8+6 & -(2-2) \\ 3-6 & -(-6-12) & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -3 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$\text{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -3 & 18 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Matriks A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$

XA = B

A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2).2-1.(-3)}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4+3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

XA = B

$XAA^{-1} = BA^{-1}$

$XI = BA^{-1}$

$X = BA^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26-24 & -13+16 \\ 20-10 & -10+14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks X yang memenuhi XA = B adalah X = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No	Pertanyaan	Jawaban
1	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 2 x 2?	o Ya o Tidak
2	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 3 x 3?	o Ya o Tidak
3	Apakah Anda telah memahami cara menyelesaikan SPL dua variabel atau tiga variabel dengan metode Cramer?	o Ya o Tidak

Jika jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak".

Jika semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

PEMBELAJARAN III

SIFAT-SIFAT DETERMINAN MATRIKS

Misalkan A dan B merupakan matriks persegi, maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. $\det(kA) = k^2 \det(A)$
3. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
4. $\det(A^n) = (\det(A))^n$

Contoh:

Jika diketahui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ buktikan berlaku sifat $\det(A) = \det(A^T)$!

Penyelesaian:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $\det(A) = ad - bc$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, maka $\det(A) = ad - bc$

Sehingga, terbukti bahwa berlaku sifat $\det(A) = \det(A^T)$

SIFAT-SIFAT INVERS MATRIKS

Misalkan A dan B merupakan matriks persegi, maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ dengan n = 0, 1, 2, 3, ...
5. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
6. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
7. $(kA^{-1})^n = k^n(A^{-1})^n$

Contoh:

Jika diketahui A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, buktikan berlaku sifat $(A^{-1})^{-1} = A$!

Penyelesaian:

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

Akan dibuktikan $(A^{-1})^{-1} = A$.

Ruas kiri:

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{ad-bc}{(ad-bc)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{ad-bc} & \dfrac{b}{ad-bc} \\ \dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{d}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(ad-bc)^2}{ad-bc} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{ad-bc} & \dfrac{b}{ad-bc} \\ \dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{d}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= ad-bc \begin{pmatrix} \dfrac{a}{ad-bc} & \dfrac{b}{ad-bc} \\ \dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{d}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ terbukti}$$

RANGKUMAN

Ayo Simpulkan

1. Sifat-Sifat Determinan Matriks

   Misalkan A dan B merupakan matriks persegi, maka berlaku sifat-sifat berikut.

   a. $\det(A) = \det(A^T)$
   b. $\det(kA) = k^2 \det(A)$
   c. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
   d. $\det(A^n) = (\det(A))^n$
2. Sifat-Sifat Invers Matriks
   a. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
   b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   c. $(A^{-1})^{-1} = A$
   d. $(A^n)^{-1} = (A-1)n$ dengan n = 0, 1, 2, 3, ...
   e. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
   f. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
   g. $(kA^{-1})^n = k^n(A^{-1})^n$

LATIHAN 3

Kerjakan semua soal di bawah ini, tuliskan pada kolom yang disediakan dan kemudian cocokkan dengan alternatif penyelesaiannya!

1. Jika diketahui A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$,

   buktikan berlaku sifat det(AB) = det(A) x det(B)!

JAWAB:

2. Jika diketahui A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   buktikan berlaku sifat $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$!

JAWAB:

Alternatif Penyelesaian:

1. A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, maka

   AB = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

   det(AB) = $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   $= \dfrac{1}{(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)}\begin{pmatrix} cq+ds & -(aq+bs) \\ -(cp+dr) & ap+br \end{pmatrix}$

   det(A) = $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ det(B) = $\dfrac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$

   Akan dibuktikan det(AB) = det(A) x det(B)

   Ruas kiri:

   det(AB) = $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ x $\dfrac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$

   $= \dfrac{1}{(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)}\begin{pmatrix} cq+ds & -(aq+bs) \\ -(cp+dr) & ap+br \end{pmatrix}$

   Terbukti

2. A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ buktikan berlaku sifat $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$!

   $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, maka

   $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   Akan dibuktikan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

   $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   $(A^{-1})^T = \left(\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)^T = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   Dari uraian di atas terbukti bahwa $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No	Pertanyaan	Jawaban
1	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 2 x 2?	o Ya o Tidak
2	Apakah Anda telah memahami cara menentukan determinan matriks ordo 3 x 3?	o Ya o Tidak
3	Apakah Anda telah memahami cara menyelesaikan SPL dua variabel atau tiga variabel dengan metode Cramer?	o Ya o Tidak

Jika jawaban “Tidak”, maka segera lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih “Tidak”.

Jika semua jawaban “Ya”, maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bornok Sinaga dkk. 2014. *Matematika XI*. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Noormandiri dan Endar Sucipto. 2000. *Matematika 3*. Jakarta: Erlangga.

Tim LAPI ITB. 2005. *Modul Pelatihan Matematika*. Bandung: LAPI ITB.