HANDOUT REFLEKSI

OLEH

COK ISTRI TIRTA PARHAYANI

MATEMATIKA

TRANSFORMASI GEOMETRI

MATEMATIKA

KELAS XI SMK

KOMPETENSI DASAR

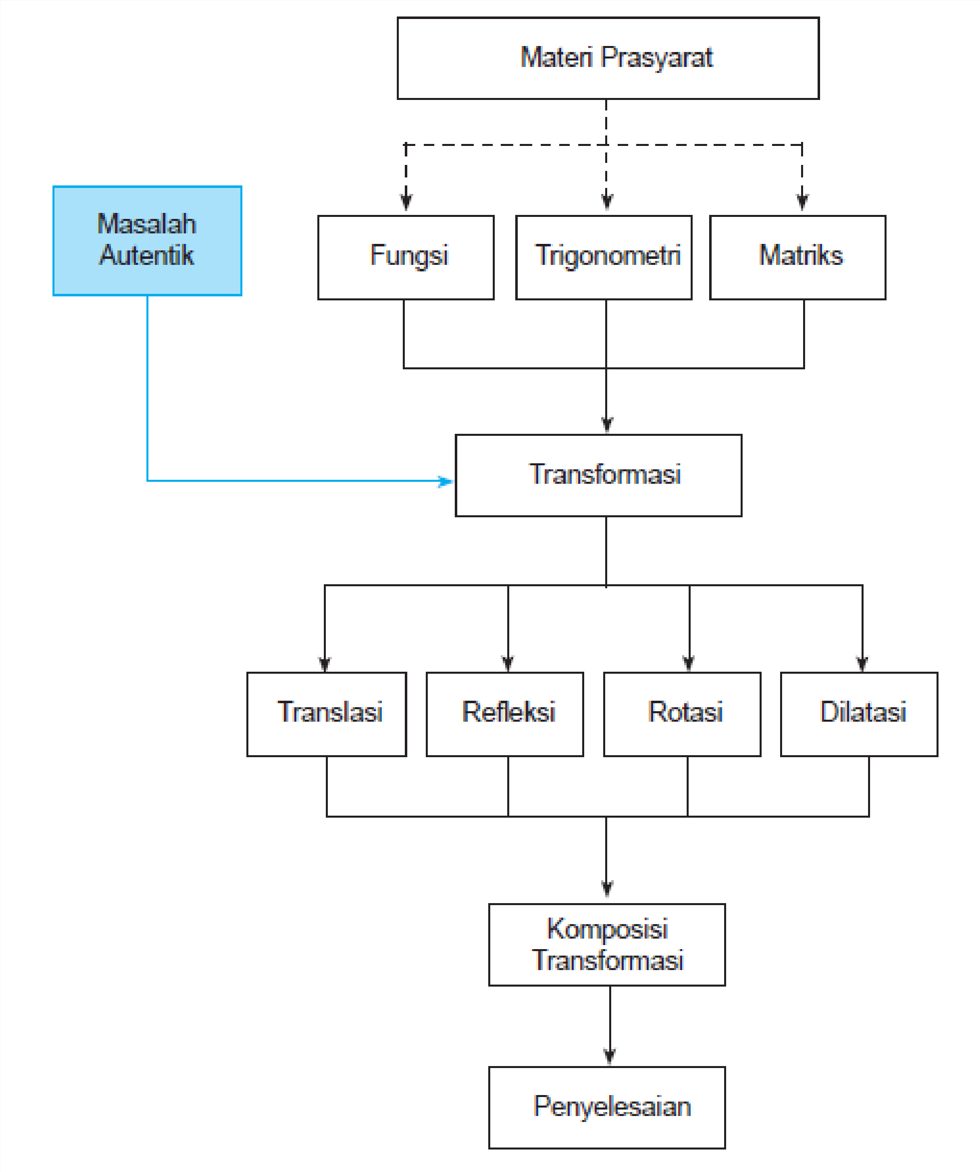
3.5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks

4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)

TUJUAN PEMBELAJARAN

Melalui kegiatan pembelajaran ini diharapkan peserta didik mampu 1) menjelaskan pemakaian matriks pada transformasi geometri, 2) mengidentifikasi fakta pada sifat-sifat transformasi geometri dengan menggunakan matriks, 3) menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks, 4) memecahkan masalah yang berkaitan dengan matriks pada transformasi geometri serta 5) menerapkan prosedur untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan matriks pada transformasi geometri dengan permasalahan praktis kehidupan sehari-hari melalui kerja problem solving, koneksi dan komunikasi matematika, critical thinking, kreatifitas berpikir matematis yang selaras dengan tuntutan masa depan.

PETA KONSEP



Materi Prasyarat
Masalah Autentik
Fungsi
Trigonometri
Matriks
Transformasi
Translasi
Refleksi
Rotasi
Dilatasi
Komposisi Transformasi
Penyelesaian

MATERI PRASYARAT

FUNGSI

Suatu fungsi f dengan daerah asal D_f dan g adalah suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka berlaku operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian sebagai berikut.

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

Jika f dan g fungsi dimana $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

dengan daerah asal fungsi komposisi f dan g adalah $D_{fg} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

TRIGONOMETRI

Sudut istimewa dalam radian

Derajat	Radian	Derajat	Radian
0°	0 *rad*	90°	$\frac{\pi}{2}$ *rad*
30°	$\frac{\pi}{6}$ *rad*	120°	$\frac{2\pi}{3}$ *rad*
45°	$\frac{\pi}{4}$ *rad*	135°	$\frac{3\pi}{4}$ *rad*
60°	$\frac{\pi}{3}$ *rad*	150°	$\frac{5\pi}{6}$ *rad*
180°	π *rad*	270°	$\frac{3\pi}{2}$ *rad*
210°	$\frac{7\pi}{6}$ *rad*	300°	$\frac{5\pi}{3}$ *rad*
225°	$\frac{5\pi}{4}$ *rad*	315°	$\frac{7\pi}{4}$ *rad*
240°	$\frac{4\pi}{3}$ *rad*	330°	$\frac{11\pi}{6}$ *rad*

Menurut kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai rotasi dari sisi awal ke sisi akhir. Sudut yang arah putarannya searah dengan jarum jam disebut sudut negatif, dan sudut yang arah putarannya berlawanan dengan arah jarum jam disebut sudut positif. Sedangkan dalam koordinat kartesius, sudut standar atau sudut baku adalah sudut yang sisi awal yang berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius.

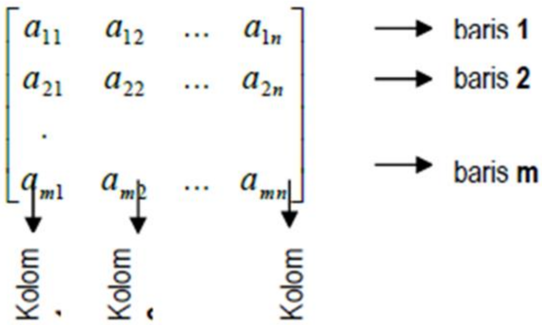
a. Sudut bertanda positif

b. Sudut bertanda negatif

MATRIKS

Matriks adalah susunan bilangan yang disajikan dalam aturan baris dan kolom yang berbentuk persegi maupun persegi panjang. Suatu matriks dapat ditulis dengan menggunakan tanda kurung biasa “( )” atau dengan kurung siku “[ ]”.

Bentuk Umum Matriks :



a_{mn} adalah elemen atau unsur matriks pada baris ke-m dan kolom ke-n

Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika ordo dan elemen-elemen yang seletak sama.

Contoh 1:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

Jika $A \ = \ B$ maka: $a = p,\ b = q, c = r\ dan\ d = s$

Transpose Matriks

Transpose (putaran) matriks A yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris. Transpose matriks A dinyatakan dengan atau A^T.

Operasi Matriks

- Penjumlahan Matriks

  Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama. Yang dijumlahkan yaitu elemenelemen yang seletak.

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$$

- Pengurangan Matriks

  Dua matriks dapat dikurangkan jika ordonya sama. Yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$$

- Perkalian Matriks
  - Perkalian Matriks Dengan Skalar

    Hasil perkalian skalar k dengan sebuah matriks A yang berordo $m \times n$ adalah sebuah matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar k dengan setiap elemen matriks A.
  - Perkalian Matriks Dengan Matriks

    Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan). Ordo hasil perkalian matriks $A_{m\times n}$ dengan $A_{n\times p}$, misalnya matriks C yang akan berordo $m \times p$ (seperti permainan domino).

$$\boxed{A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}}$$

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).

Misal : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$$

KONSEP TRANSFORMASI GEOMETRI

Pada bab ini, Anda akan mempelajari pemetaan pada bangun geometri, yaitu transformasi geometri. Transformasi geometri adalah suatu aturan yang menghubungkan suatu titik di suatu bidang geometri (misalnya bidang datar) dengan titik lain pada bidang tersebut.

Pada bab ini, Anda akan mempelajari salah satu transformasi geometri pada bangun datar, yaitu refleksi (pencerminan). Tranformasi-transformasi tersebut sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari.

Gambar 1. Pencerminan tanaman dan gedung dengan air

Diaplikasikan dalam pengambilan foto agar telihat indah dan bagus. Dengan menggunakan air yang jernih seorang fotografer bisa menggunakan rekleksi air sehingga dapat menghasilkan hasil foto yang baik dan indah.

Refleksi (pencerminan) juga dapat terlihat pada saat seseorang bercermin di cermin datar

Gambar 2. Seseorang bercermin

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

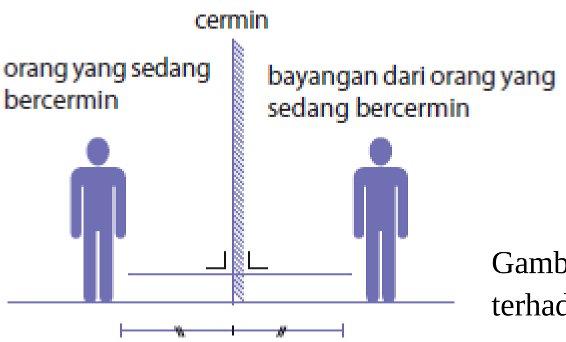
Transformasi pada bangun geometri merupakan suatu aturan yang memindahkan suatu bangun geometri dari satu posisi ke posisi lain dengan tidak mengubah bentuk bangun tersebut.

REFLEKSI

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan menggunakan sifat benda dan bayangannya pada cermin datar. Pada refleksi, jarak benda dengan cermin sama dengan jarak bayangannya pada cermin. Garis yang menghubungkan titik-titik pada benda dengan titik-titik pada bayangannya tegak lurus dengan cermin, serta ukuran dan bentuk bayangan sama dengan bentuk benda.

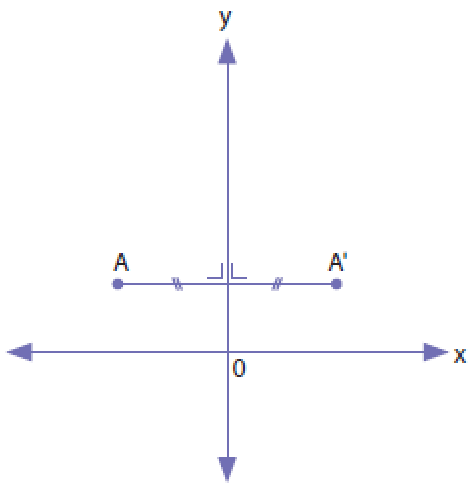
AYO MENGAMATI

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3. Refleksi orang terhadap cermin datar

Pada bidang geometri, cermin dilukis sebagai sebuah garis lurus, seperti sumbu-x, sumbu-y, garis $y = x$, garis $y = -x$, dan lain sebaginya. Misalkan $A(x, y)$ adalah titik pada bidang koordinat Cartesius, sumbu-y adalah cermin, dan $A'(x', y')$ adalah bayangan dari A terhadap sumbu-y maka jarak A ke sumbu-y sama dengan jarak A' ke sumbu-y dan garis $\overline{AA'}$ tegak lurus dengan sumbu-y.



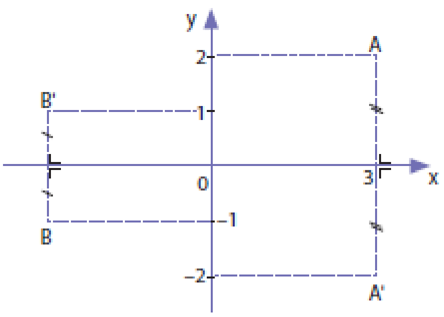
Gambar 4. Refleksi titik A terhadap sumbu-y

Garis-garis yang berfungsi sebagai cermin disebut sumbu cermin atau sumbu refleksi. Dari contoh di atas juga didapatkan sifat refleksi adalah bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin datar adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari refleksi terhadap sumbu-x, refleksi terhadap sumbu-y, refleksi terhadap garis $y = x$, refleksi terhadap garis $y = -x$, refleksi terhadap garis $x = a$, dan refleksi terhadap garis $y = b$ pada uraian berikut.

Refleksi Terhadap Sumbu-x

AYO MENGAMATI

Misalkan $A(x, y)$ adalah titik pada bidang koordinat Cartesius dan $A'(x', y')$ adalah bayangan dari titik $A(x, y)$ yang direfleksikan terhadap sumbu-x. Bagaimanakah menentukan titik A'? Perhatikan grafik berikut.



Gambar 5. Refleksi titik A terhadap sumbu-x

Pada gambar 5, titik A(2, 2) dan B(–3, –1) direfleksikan terhadap sumbu-x, sehingga diperoleh titik A'(2, –2) dan B'(–3, 1). Lihatlah, jarak titik A dan A' dengan sumbu-x adalah sama, yaitu 2 satuan dan garis AA' tegak lurus dengan sumbu-x. Jadi, bayangan dari titik A(2, 2) yang direfleksikan terhadap sumbu-x adalah A'(2, –2). Perhatikan diagram berikut.

tetap

$A(2,2) \qquad A'(2,-2)$

Berubah tanda

absis : 2 2
ordinat : 2 –2

Jarak titik B dan B' dengan sumbu-x sama, yaitu 1 satuan garis BB' tegak lurus dengan sumbu-y. Jadi bayangan dari titik B(–3, –1) yang direfleksikan terhadap sumbu-x adalah B'(–3, 1). Perhatikan diagram berikut.

tetap

$B(-3,-1) \qquad B'(-3,1)$

Berubah tanda

absis : $-3 \quad -3$
ordinat : $-1 \quad 1$

Dari contoh tersebut tampak koordinat bayangan yang dihasilkan mempunyai absis (koordinat x) yang nilai dan tandanya sama dengan absis titik sebelumnya. Adapun, ordinatnya hanya berubah tanda.

Maka dapat disimpulkan secara umum refleksi terhadap sumbu-x dengan menggunakan matriks adalah sebagai berikut.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1

Tentukan bayangan dari titik $A(-2,4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu–x

Penyelesaian

Diketahui : titik $A(-2,4)$, $x = -2$ dan $y = 4$ yang direfleksikan terhadap sumbu–x maka

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan dari titik $A(-2,4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu–x adalah $A'(-2,-4)$

Contoh Soal 2

Jika garis $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu-x maka tentukan bayangan garis tersebut

Penyelesaian

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$A(x, y) \xrightarrow[C_{sumbu-x}]{} A'(x', y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$x' = x \Leftrightarrow x = x'$

$y' = -y \Leftrightarrow y = -y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangan garis

$3x - 2y - 5 = 0$

$3(x') - 2(-y') - 5 = 0$

$3x' + 2y' - 5 = 0$

$3x + 2y - 5 = 0$

Jadi, bayangan garis adalah $3x + 2y - 5 = 0$

AYO MENCOBA

Titik $A(-2, -5)$ dicerminkan terhadap titik O kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian

$$A(-2,-5) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x', y') \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A''(x'', y'')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik O)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu-x)

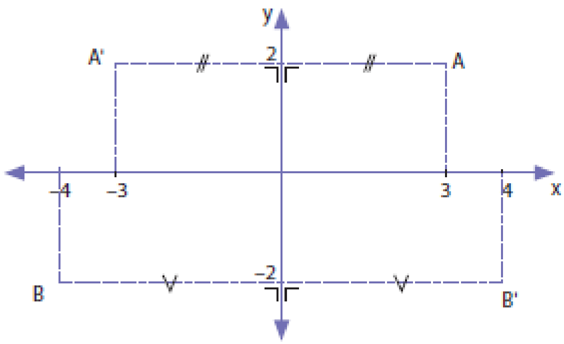
$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots&\dots\\\dots&\dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots&\dots\\\dots&\dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A''(\dots,\dots)$

Refleksi Terhadap Sumbu-y

AYO MENGAMATI

Anda telah mempelajari cara menentukan bayangan yang direfleksikan pada sumbu-x. Sekarang, Anda akan mempelajari sumbu-y. Sebelumnya perhatikan Gambar 6 berikut.



Gambar 6. Refleksi terhadap sumbu-y

Pada gambar tersebut, titik A dan B tegak lurus terhadap sumbu-y. Perhatikan, jarak titik A dan A' dengan sumbu-y sama, yaitu 3 satuan dan garis AA' tegak lurus dengan sumbu-y. Jadi, bayangan dari titik A(3, 2) yang direfleksikan terhadap sumbu-y adalah A'(–3, 2). Perhatikan diagram berikut.

Berubah tanda

$A(3,2)$ $\qquad$ $A'(-3,2)$

tetap

absis : 3 $\quad -3$
ordinat : 2 $\quad$ 2

Jarak titik B dan B' dengan sumbu-y sama, yaitu 4 satuan dan garis BB' tegak lurus dengan sumbu-y. Jadi, bayangan dari titik B(–4, –2) yang direfleksikan terhadap sumbu-y adalah B'(4,–2).

Berubah tanda

$B(-4,-2)$ $\qquad$ $B'(4,-2)$

tetap

absis : -4 $\quad$ 4
ordinat : -2 $\quad -2$

Dari contoh-contoh tersebut tampak koordinat bayangan yang dihasilkan mempunyai absis yang nilainya sama dengan absis titik sebelumnya tetapi tandanya berubah. Untuk ordinatnya, nilai dan tandanya sama dengan ordinat titik sebelumnya.

Maka dapat disimpulkan secara umum refleksi terhadap sumbu-y dengan menggunakan matriks adalah sebagai berikut.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1

Dengan menggunakan matriks refleksi, tentukan bayangan dari titik A(–5, 3) yang direfleksikan terhadap sumbu-y.

Penyelesaian

Diketahui $A(-5, 3)$ maka $x = -5$ dan $y = 3$.

Persamaan matriks refleksi terhadap sumbu-y adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan dari titik A(–5, 3) yang direfleksikan terhadap sumbu-y adalah $A'(5,3)$

Contoh Soal 2

Jika garis $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu-y maka tentukan bayangan garis tersebut

Penyelesaian

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow[C_{sumbu-y}]{} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$

$y' = y \Leftrightarrow y = y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangan garis

$3x - 2y - 5 = 0$

$3(-x') - 2(y') - 5 = 0$

$-3x' - 2y' - 5 = 0$

$-3x - 2y - 5 = 0$

Jadi, bayangan garis adalah $-3x - 2y - 5 = 0$

AYO MENCOBA

Garis $2x - y + 5 = 0$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan titik $A(x, y)$ terletak pada garis tersebut, sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}} A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik O)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu-y)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$x'' = \cdots$ dan $y'' = \cdots$

Langkah 3 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Tentukan x dan y dalam bentuk x'' dan y''

$x = \cdots$ dan $y = \cdots$

Langkah 4 (Proses menentukan persamaan bayangan)

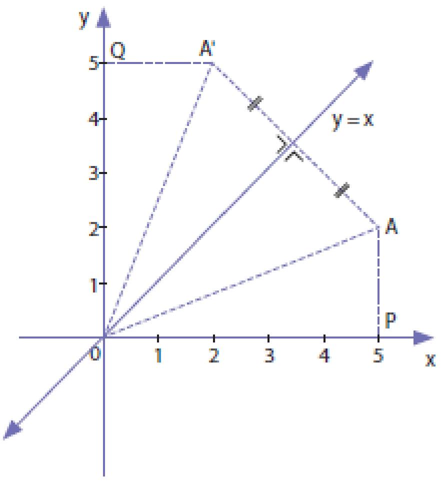
Substitusi x dan y ke $2x - y + 5 = 0$ sehingga diperoleh persamaan bayangan

$2(\ \dots\ ) - (\ \dots\ ) + 5 = 0$

Refleksi Terhadap Garis $y = x$

AYO MENGAMATI

Perhatikan Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Refleksi terhadap garis $y = x$

Pada Gambar 7 tersebut, titik A(1, 4) direfleksikan terhadap garis $y = x$. Jarak A ke garis $y = x$ sama dengan jarak A' ke garis $y = x$. Garis AA' tegak lurus dengan garis $y = x$. Jadi A'(4, 1) adalah bayangan dari titik A(1, 4). Bagaimanakah hubungan antara koordinat titik A dengan koordinat bayangannya? Pada Gambar 9 tampak panjang OP = OQ dan AP = A'Q. Jadi panjang OA = OA'. Jadi, segitiga A'OQ sama dengan segitiga AOP sehingga diperoleh,

OQ = OP atau ordinat A' = absis A

A'P = AP atau absis A' = ordinat A

Secara umum, refleksi terhadap garis $y = x$ dapat didefinisikan dengan menggunakan matriks refleksi terhadap garis $y = x$ sebagai berikut.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dimana matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Contoh Soal 1

Dengan menggunakan matriks refleksi, tentukan bayangan dari titik A(–7, –3) yang direfleksikan terhadap garis $y = x$ dengan menggunakan matriks refleksi.

Penyelesaian

Diketahui A(–7, –3) maka $x = -7$ dan $y = -3$

Dari persamaan matriks refleksi diperoleh

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan dari titik A(–7, –3) yang direfleksikan terhadap garis $y = x$ adalah $A'(-7, -3)$

Contoh Soal 2

Jika garis $4x - 3y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka tentukan bayangan garis tersebut.

Penyelesaian

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $4x - 3y + 1 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow[C_{y=x}]{} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$x' = y \Leftrightarrow y = x'$

$y' = x \Leftrightarrow x = y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangan garis

$4x - 3y + 1 = 0$

$4(y') - 3(x') + 1 = 0$

$4y' - 3x' + 1 = 0$

$-3x' + 4y' + 1 = 0$

$-3x + 4y + 1 = 0$

Jadi, bayangan garis adalah $-3x + 4y + 1 = 0$

AYO MENCOBA

Titik $A(-1,-3)$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y dan dilanjutkan lagi dengan pencerminan terhadap garis $y = x$. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian

$$A(-1,-3) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A''(x'',y'') \xrightarrow{C_{y=x}} A'''(x''',y''')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik O)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu-y)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 3 (Proses Refleksi terhadap garis $y = x$)

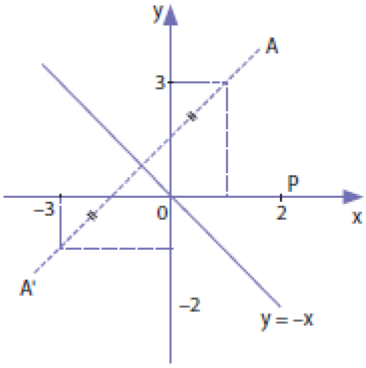
$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'''(\dots, \dots)$

Refleksi Terhadap Garis $y = -x$

AYO MENGAMATI

Garis $y = -x$ adalah kedudukan titik-titik koordinat yang memenuhi persamaan $y = -x$ atau $x = -y$. Contohnya titik (2, –2) dan (–2, 2) terdapat pada garis $y = -x$. Perhatikanlah uraian berikut, agar Anda memahami refleksi terhadap garis $y = -x$.



Gambar 8. Refleksi terhadap garis $y = -x$

Pada gambar misalkan, titik A(2, 3) direfleksikan terhadap garis $y = -x$. Jarak bayangan dari A, yaitu titik A', ke garis $y = -x$ sama dengan jarak A ke garis y = $-x$. Garis AA' tegak lurus dengan garis $y = -x$. Jadi, A'(–3, –2) adalah bayangan dari titik A(2, 3).

Kemudian, hubungan antara koordinat titik A dan koordinat bayangannya adalah sebagai berikut. Pada gambar tampak panjang OP = OQ dan AP = A'Q. Jadi panjang OA = OA'. Jadi, segitiga A'OQ sama dengan segitiga AOP.

OQ = OP atau ordinat A' = – absis A

A'P = AP atau absis A' = – ordinat A

Jadi, secara umum refleksi terhadap garis $y = -x$ dapat didefinisikan dengan menggunakan matriks refleksi terhadap garis $y = -x$ sebagai berikut.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=-x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1

Dengan menggunakan matriks refleksi, tentukan bayangan dari titik A(8, –5) yang direfleksikan terhadap garis $y = -x$.

Penyelesaian

Diketahui : Diketahui A(8, –5) maka $x = 8$ dan $y = -5$.

Oleh persamaan matriks refleksi terhadap garis $y = x$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan dari titik A(8, –5) yang direfleksikan terhadap garis $y = -x$ adalah $A'(5, -8)$

Contoh Soal 2

Jika garis $4x - 3y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan bayangan garis tersebut.

Penyelesaian

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $4x - 3y + 1 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow[C_{y=-x}]{} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

$x' = -y \Leftrightarrow y = -x'$

$y' = -x \Leftrightarrow x = -y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangan garis

$4x - 3y + 1 = 0$

$4(-y') - 3(-x') + 1 = 0$

$-4y' + 3x' + 1 = 0$

$3x' - 4y' + 1 = 0$

$3x - 4y + 1 = 0$

Jadi, bayangan garis adalah $3x - 4y + 1 = 0$

AYO MENCOBA

Titik $A(-1,-3)$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y dan dilanjutkan lagi dengan pencerminan terhadap garis $y=-x$. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian

$$A(-1,-3) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A''(x'',y'') \xrightarrow{C_{y=-x}} A'''(x''',y''')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik O)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu-y)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 3 (Proses Refleksi terhadap garis $y=-x$)

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'''(\dots,\dots)$

AYO MENGERJAKAN

1. Tentukan bayangan titik-titik berikut jika direfleksikan sebagai berikut
   a. Titik $A(-1,-2)$ direfleksikan terhadap sumbu-x
   b. Titik $B(-5,2)$ direfleksikan terhadap sumbu-y
   c. Titik $K(1,-5)$ direfleksikan terhadap garis $y=x$
   d. Titik $L(2,4)$ direfleksikan terhadap garis $y=-x$

2. Tentukan bayangan garis berikut jika direfleksikan sebagai berikut
   a. Garis $2y - 3x + 6 = 0$ direfleksikan terhadap sumbu-y
   b. Garis $y = 2x + 3$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$