HANDOUT TRANSLASI

OLEH
COK ISTRI TIRTA PARHAYANI

MATEMATIKA
TRANSFORMASI GEOMETRI

MATEMATIKA
KELAS XI SMK

KOMPETENSI DASAR

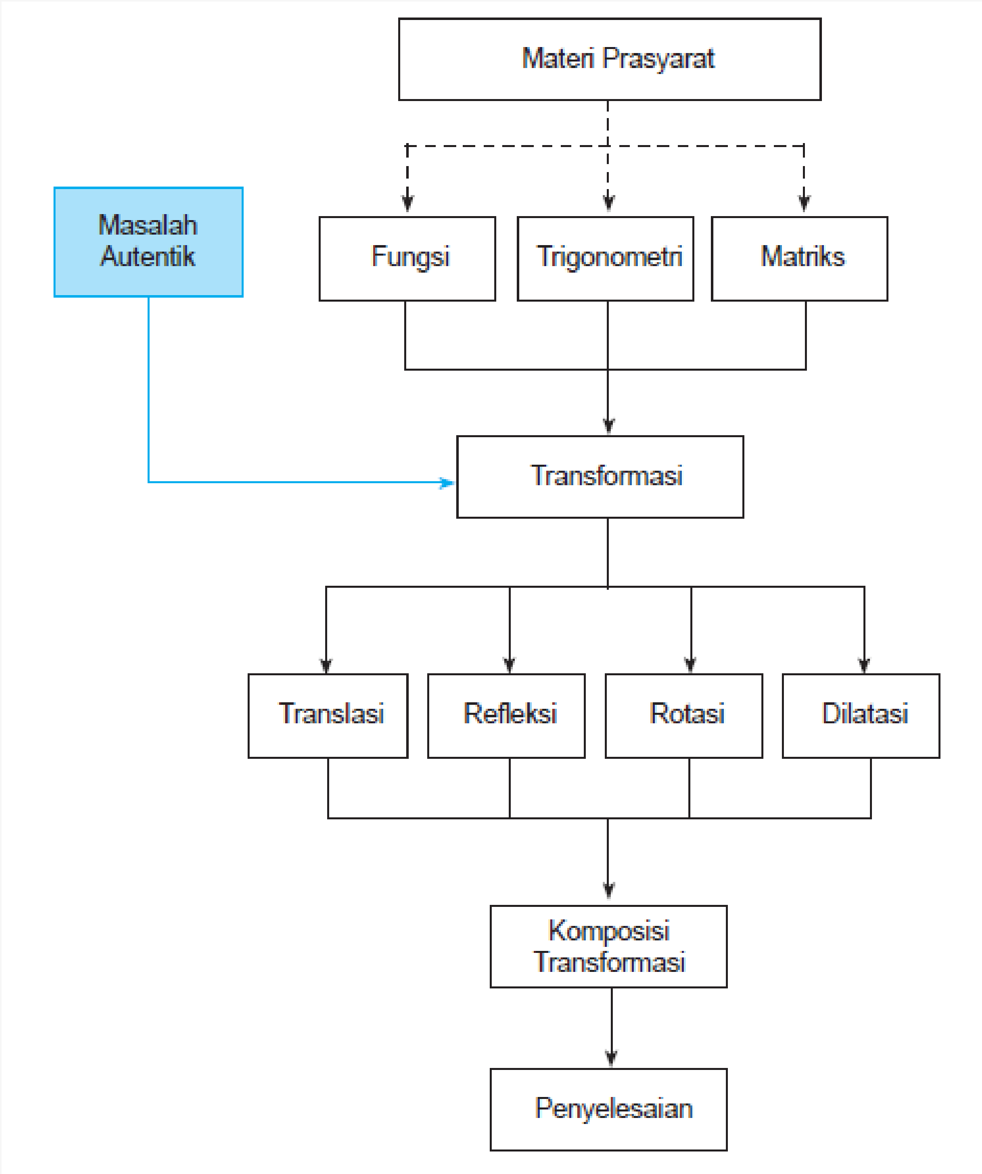
3.5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks

4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)

TUJUAN PEMBELAJARAN

Melalui kegiatan pembelajaran ini diharapkan peserta didik mampu 1) menjelaskan pemakaian matriks pada transformasi geometri, 2) mengidentifikasi fakta pada sifat-sifat transformasi geometri dengan menggunakan matriks, 3) menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks, 4) memecahkan masalah yang berkaitan dengan matriks pada transformasi geometri serta 5) menerapkan prosedur untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan matriks pada transformasi geometri dengan permasalahan praktis kehidupan sehari-hari melalui kerja problem solving, koneksi dan komunikasi matematika, critical thinking, kreatifitas berpikir matematis yang selaras dengan tuntutan masa depan.

PETA KONSEP


Materi Prasyarat
Masalah Autentik
Fungsi
Trigonometri
Matriks
Transformasi
Translasi
Refleksi
Rotasi
Dilatasi
Komposisi Transformasi
Penyelesaian

MATERI PRASYARAT

FUNGSI

Suatu fungsi f dengan daerah asal D_f dan g adalah suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka berlaku operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian sebagai berikut.

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|g(x) = 0\}$

Jika f dan g fungsi dimana $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

dengan daerah asal fungsi komposisi f dan g adalah $D_{fg} = \left\{x \in D_f | f(x) \in D_g\right\}$

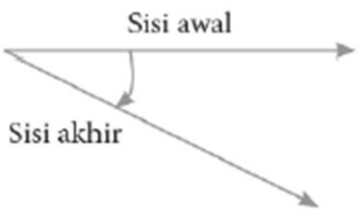
TRIGONOMETRI

Sudut istimewa dalam radian

Derajat	Radian	Derajat	Radian
0°	0 *rad*	90°	$\frac{\pi}{2}$ *rad*
30°	$\frac{\pi}{6}$ *rad*	120°	$\frac{2\pi}{3}$ *rad*
45°	$\frac{\pi}{4}$ *rad*	135°	$\frac{3\pi}{4}$ *rad*
60°	$\frac{\pi}{3}$ *rad*	150°	$\frac{5\pi}{6}$ *rad*
180°	π*rad*	270°	$\frac{3\pi}{2}$ *rad*
210°	$\frac{7\pi}{6}$ *rad*	300°	$\frac{5\pi}{3}$ *rad*
225°	$\frac{5\pi}{4}$ *rad*	315°	$\frac{7\pi}{4}$ *rad*
240°	$\frac{4\pi}{3}$ *rad*	330°	$\frac{11\pi}{6}$ *rad*

Menurut kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai rotasi dari sisi awal ke sisi akhir. Sudut yang arah putarannya searah dengan jarum jam disebut sudut negatif, dan sudut yang arah putarannya berlawanan dengan arah jarum jam disebut sudut positif. Sedangkan dalam koordinat kartesius, sudut standar atau sudut baku adalah sudut yang sisi awal yang berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius.

a. Sudut bertanda positif

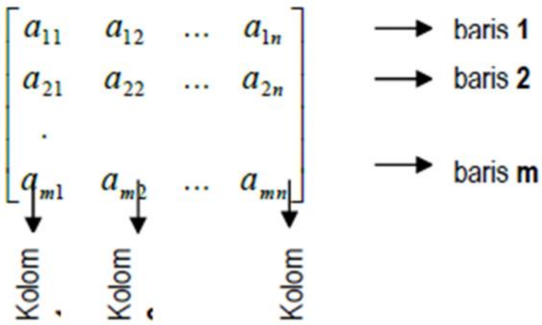


b. Sudut bertanda negatif

MATRIKS

Matriks adalah susunan bilangan yang disajikan dalam aturan baris dan kolom yang berbentuk persegi maupun persegi panjang. Suatu matriks dapat ditulis dengan menggunakan tanda kurung biasa “( )” atau dengan kurung siku “[ ]”.

Bentuk Umum Matriks :



a_{mn} adalah elemen atau unsur matriks pada baris ke-m dan kolom ke-n

Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika ordo dan elemen-elemen yang seletak sama.

Contoh 1:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

Jika $A = B$ maka: $a = p,\ b = q, c = r\ dan\ d = s$

Transpose Matriks

Transpose (putaran) matriks A yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukarkan elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris. Transpose matriks A dinyatakan dengan atau A^T.

Operasi Matriks

- Penjumlahan Matriks

  Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama. Yang dijumlahkan yaitu elemenelemen yang seletak.

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$$

- Pengurangan Matriks

  Dua matriks dapat dikurangkan jika ordonya sama. Yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$$

- Perkalian Matriks
  - Perkalian Matriks Dengan Skalar

    Hasil perkalian skalar k dengan sebuah matriks A yang berordo $m \times n$ adalah sebuah matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar k dengan setiap elemen matriks A.
  - Perkalian Matriks Dengan Matriks

    Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan). Ordo hasil perkalian matriks $A_{m\times n}$ dengan $A_{n\times p}$, misalnya matriks C yang akan berordo $m \times p$ (seperti permainan domino).

$$\boxed{A_{m\times n} \,.\, B_{n\times p} = C_{m\times p}}$$

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).

Misal : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$$

KONSEP TRANSFORMASI GEOMETRI

Pada bab ini, Anda akan mempelajari pemetaan pada bangun geometri, yaitu transformasi geometri. Transformasi geometri adalah suatu aturan yang menghubungkan suatu titik di suatu bidang geometri (misalnya bidang datar) dengan titik lain pada bidang tersebut.

Pada bab ini, Anda akan mempelajari salah satu transformasi geometri pada bangun datar, yaitu translasi (pergeseran). Tranformasi-transformasi tersebut sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari.

Gambar 1. Perpindahan lift

Pergeseran atau perpindahan orang pada eskalator dan lift. Peralatan yang biasa dipakai mal-mal ini berguna untuk memindahkan orang dari satu lantai ke lantai lainnya.

Kereta gantung merupakan salah satu alat transportasi yang menerapkan konsep translasi di kehidupan sehari-hari. Kereta gantung pertama kali yang ada di Indonesia adalah Gondola Ancol yang dibangun menggunakan komputerisasi teknologi tinggi dan canggih.

Gambar 2. Kereta Gantung

Gambar 3. Wahana rekreasi

Wahana hysteria merupakan salah satu wahana ekstrim yang ada di taman rekreasi Dufan. Wahana ini juga merupakan salah satu wahana yang menerapkan konsep translasi di kehidupan sehari-hari.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

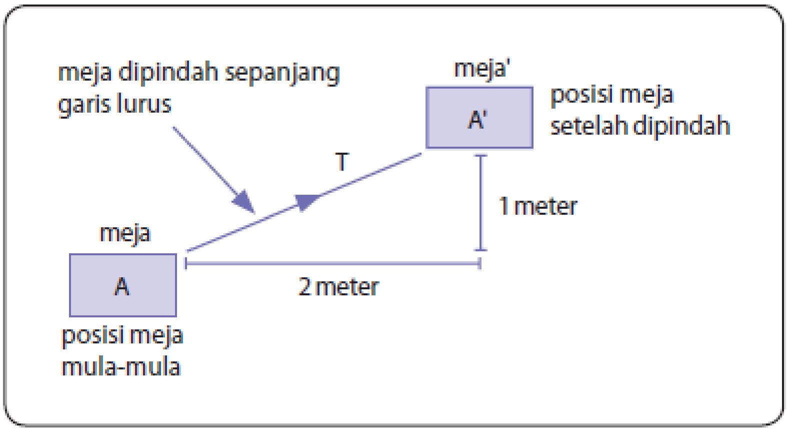
Transformasi pada bangun geometri merupakan suatu aturan yang memindahkan suatu bangun geometri dari satu posisi ke posisi lain dengan tidak mengubah bentuk bangun tersebut.

TRANSLASI

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memetakan suatu titik pada titik lain sebagai bayangannya. Fungsi yang memetakan titik tersebut sepanjang sumbu-x (horizontal) dan dilanjutkan pada sumbu-y (vertikal). Translasi dinyatakan oleh matriks $\binom{a}{b}$ dengan a merupakan komponen translasi pada arah sumbu-x dan b merupakan komponen translasi pada arah sumbu-y. Translasi dapat dibayangkan dengan memindahkan objek-objek di sekitar kita.

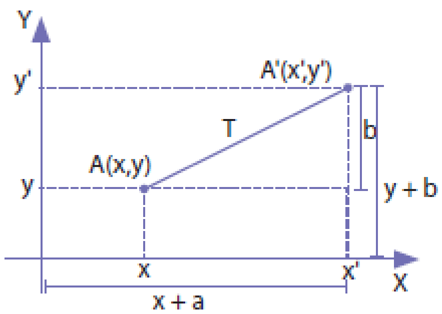
AYO MENGAMATI

Misalnya pada pemindahan meja A pada gambar berikut.



Gambar 4. Translasi sebuah maja

Pada Gambar 4, meja dipindahkan sepanjang garis lurus sejauh 2 m ke kanan dan 1 m ke atas oleh suatu translasi $T = \binom{2}{1}$, sehingga meja A berpindah ke meja A'. Dengan membayangkan meja adalah suatu titik pada bidang koordinat Cartesius maka diperoleh Gambar 5.



Gambar 5. Translasi titik A(x,y)

Pada Gambar 5 tampak, titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh translasi $T = \binom{a}{b}$ sepanjang garis lurus sejauh a satuan ke kanan dan b satuan ke atas. Bayangan dari titik A yang diperoleh yakni titik $A'(x + a, y + b)$.

Contoh tersebut memperjelas definisi berikut.

Jika titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh translasi $T = \binom{a}{b}$, maka

diperoleh bayangan dari A, yaitu $A'(x', y')$ dengan $x' = x + a$ dan $y' = y + b$

Translasi $T = \binom{a}{b}$ pada titik $A(x, y)$ dapat ditulis

$$T = \binom{a}{b} : A(x, y) = A'(x', y')$$

Dimana

- Jika $a > 0$, maka arah pergeserannya adalah a satuan ke kanan (menuju x positif)
- Jika $a < 0$ maka arah pergeserannya adalah a satuan ke kiri (menuju x positif).
- Jika $b > 0$ maka arah pergeserannya adalah b satuan ke atas (menuju y positif).

Maka berdasarkan contoh tersebut, secara umum diperoleh konsep

Titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(a, b)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{T\binom{a}{b}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan konsep tersebut didapatkan sifat translasi yakni suatu bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Contoh Soal 1

Tentukanlah bayangan titik A$(-4,2)$ jika ditranslasikan oleh $T = \binom{1}{2}$.

Penyelesaian

Diketahui: titik A$(-4,2)$ dan translasi $T = \binom{1}{2}$ maka

$x = -4$ dan $y = 2$ serta $a = 1$ dan $b = 2$. Sehingga diperoleh bayangan titik yakni

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b} = \binom{-4}{2} + \binom{1}{2} = \binom{-3}{4}$$

Jadi bayangan titik A$(-4,2)$ jika ditranslasikan oleh $T = \binom{1}{2}$ adalah $A'(-3,4)$

Contoh Soal 2

Jika bayangan dari titik $A(2,3)$ adalah $A'(3,-1)$ maka tentukanlah aturan translasinya.

Penyelesaian

Diketahui : titik $A(2,3)$ dan bayangan titik $A'(3,-1)$ maka $x = 2$, $y = 3$, $x' = 3$ dan $y' = -1$

Dengan menggunakan konsep matriks pada translasi diperoleh

$$\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$$

$$\binom{a}{b} = \binom{x'}{y'} - \binom{x}{y} = \binom{3}{-1} - \binom{2}{3} = \binom{1}{-4}$$

Jadi, translasi yang memetakan titik $A(2,3)$ ke titik $A'(3,-1)$ adalah $T = \binom{1}{-4}$

Contoh Soal 3

Garis k dengan persamaan $2x - 3y + 4 = 0$ ditranslasi dengan matriks translasi $T = \binom{-1}{-3}$. Tentukanlah bayangan garis k tersebut.

Penyelesaian

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan k sedemikian sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow[T = \binom{-1}{-3}]{} A'(x', y')$$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$

$x' = x - 1 \Leftrightarrow x = x' + 1$

$y' = y - 3 \Leftrightarrow y = y' + 3$

Dengan substitusi x dan y ke garis k maka ditemukan persamaan garis k setelah ditranslasi, yaitu

$2x - 3y + 4 = 0$

$2(x' + 1) - 3(y' + 3) + 4 = 0$

$2x' + 2 - 3y' - 9 + 4 = 0$

$2x' - 3y' - 3 = 0$

$2x - 3y - 3 = 0$

Jadi, bayangan garis k adalah $2x - 3y - 3 = 0$

AYO MENCOBA

Titik $P(a, b + 2)$ digeser dengan $T = \begin{pmatrix}3\\2b - a\end{pmatrix}$ sehingga hasil pergeseran menjadi $Q(3a + b, -3)$. Tentukan posisi pergeseran titik $R(2, 4)$ oleh translasi T di atas.

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1

$P(a, b + 2) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix}3\\2b-a\end{pmatrix}} Q(3a + b, -3)$

$\begin{pmatrix}3a + b\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$

$3a + b = \cdots$ atau $a = \cdots$ (persamaan 1)

$-3 = \cdots$ (persamaan 2)

Langkah 2

Dengan mensubstitusi $a = \cdots$ ke persamaan (2) maka diperoleh nilai $b = \cdots$

Dengan demikian, translasi yang dimaksud adalah $T = \begin{pmatrix}3\\2b - a\end{pmatrix}$ menjadi $T = \begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$

Langkah 3

Pergeseran titik $R(2, 4)$ oleh translasi T adalah

$R(2,4) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}} R'(x', y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat pergeseran titik R adalah $R'(\dots, \dots)$

AYO MENGERJAKAN

1. Tentukan bayangan titik-titik berikut ini jika mendapat translasi T di bawah ini
   a. $A(2,-3), T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   b. $B(-4,8), T = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
   c. $K(-1,0), T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   d. $L(-1,-1), T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. Tentukan bayangan garis $2y - 3x + 6 = 0$ jika ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Misalkan ABCD adalah meja bilyar, dengan $A(5,3)$, $B(-5,3)$, $C(-5,-3)$, dan $D(5,-3)$. Carilah titik sasaran Q pada sisi meja bilyar, jika bola yang berada di $P(-3,-1)$ dipukul hingga melaju mengenai bola $R(3,-1)$ dengan ketentuan jika bola harus mengenai sisi CD sebelum mengenai bola di R.