INDUKSI MATEMATIKA

Oleh :
Riki Riyandi
152151202

KOMPETENSI DASAR

Setelah mengikuti pembelajaran induksi matematika, siswa mampu :

3.1 Menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika.

4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian.

PERTEMUAN 1

Indikator

3.1.1 Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan

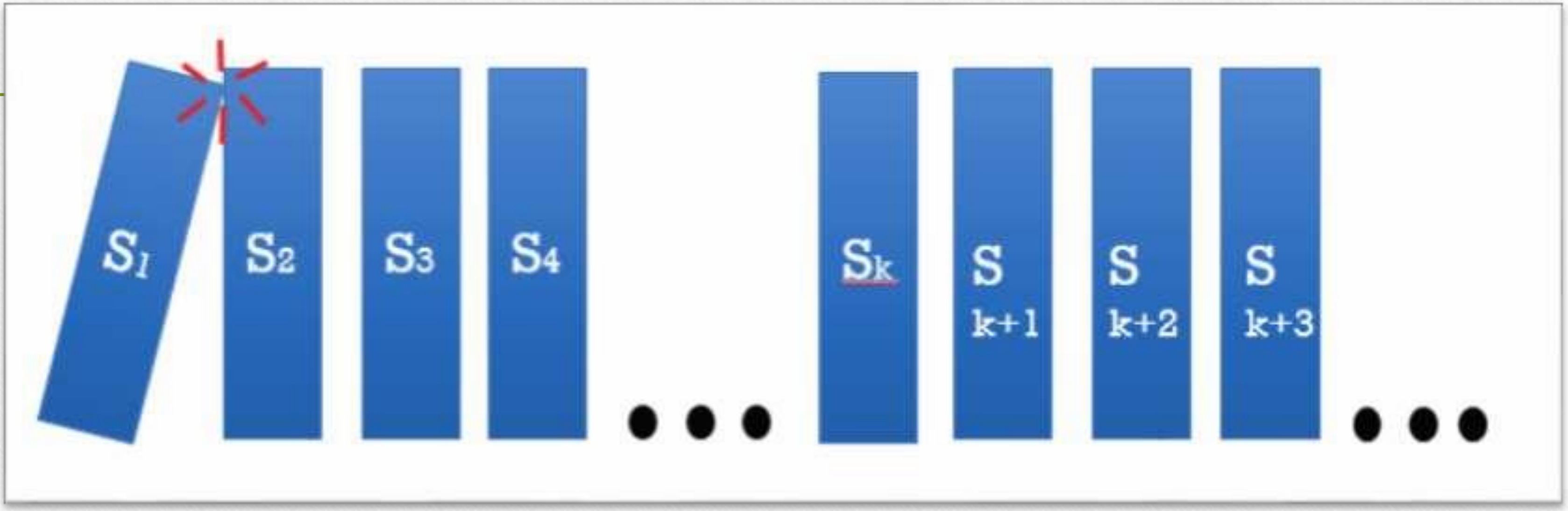
3.1.2 Membuktikan formula suatu barisan bilangan dengan prinsip induksi matematika

3.1.3 Membuktikan formulasuatu barisan bilangan dengan prinsip induksi matematika.

4.1.1 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran formula suatu barisan bilangan.

4.1.2 Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika

PENGANTAR INDUKSI MATEMATIKA



Papan manakah yang jatuh jika papan S1 dijatuhkan ke arah S2 ?

APA ITU INDUKSI MATEMATIKA ???

Masalah 1.1

Tanpa menggunakan alat bantu hitung, rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan mulai 1 hingga 20.

Kemudian, uji kebenaran formula yang ditemukan sedemikian sehingga berlaku untuk penjumlahan bilangan mulai dari 1 hingga n, dengan n bilangan asli.

Contoh 1:

Rancanglah formula yang memenuhi pola 1 + 2 + 3 + ... + 80 !

Contoh 2:

Rancang formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan berurutan mulai 1 hingga n, dengan n sebarang bilangan asli yang genap.

Kemudian, uji kebenaran formula tersebut untuk menghitung 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 100.

PENYELESAIAN:

CONTOH 1

$1 + 2 + 3 + \ldots + 80$

$n = 80$

$$\begin{array}{l} 1 \;\; + \;\; 2 \;\; + \;\; 3 \;\; + \ldots \\ \underline{80 + 79 + 78 + \ldots} \;\; + \\ 81 + 81 + 81 + \ldots \end{array}$$

Terdapat 81 sebanyak $\frac{n}{2}$ pasang bilangan, sehingga :

$$\frac{n}{2} \times 81 = \frac{80}{2} \times 81$$

$$= 3240$$

Jadi formula untuk pola $1 + 2 + 3 + \ldots + 80$ adalah 3240.

Contoh 2

$2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

$$\begin{array}{l} 2 + 4 + 6 + \dots \\ \underline{2n + (2n-2) + (2n-4) + \dots} + \\ (2n+2) + (2n+2) + (2n+2) + \dots \end{array}$$

Terdapat $(2n + 2)$ sebanyak $\frac{n}{2}$ pasang bilangan, sehingga :

$$\frac{n}{2} \times (2n+2) = \frac{n(2n+2)}{2}$$

$$= n^2 + n$$

Jadi formula untuk pola $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ adalah $n^2 + n$.

$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100$

$n = 50$

$$n^2 + n = 50^2 + 50$$

$$= 2550$$

Jadi formula untuk $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ adalah 2550.

TUGAS !!!

1. Rancang formula yang memenuhi setiap pola berikut:
   a. $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \ldots + (5n - 3)$
   b. $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + (4n-1)$
   c. $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n-2)$
   d. $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

2. Rancanglah formula yang memenuhi pola penjumlahan bilangan ganjil positif pertama sejumlah n. Kemudian, uji kebenaran formula tersebut untuk menghitung $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 85$.

PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA

Misalkan P(n) merupakan suatu pernyataan bilangan asli. Pernyataan P(n) benar jika memenuhi langkah berikut ini :

a. Langkah Awal (Basic Step) : P(1) benar.
b. Langkah Induksi (Induction Step) : Jika P(k) benar, maka P(k+1) benar, untuk setiap k bilangan asli.

CONTOH SOAL

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2.

2. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa :

   $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

   Untuk setiap $n \geq 0$.

3. Untuk setiap bilangan asli, dengan berlaku :

   $$\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{4(5)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

   Buktikan dengan induksi matematika.

TUGAS !!!

1. Ujilah kebenaran formula dengan menggunakan prinsip induksi matematika berikut ini
   a. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$
   b. $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + (5n - 3) = \dfrac{n(5n - 1)}{2}$
   c. $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

2. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran setiap formula yang diberikan. (n bilangan asli)
   $(1 \,.\, 1!) + (2 \,.\, 2!) + (3 \,.\, 3!) + \dots + (n \,.\, n!) = (n + 1)! - 1$

Penerapan Induksi Matematika pada Barisan Bilangan

Masalah 1.4

Misalkan u_i menyatakan suku ke i suatu barisan bilangan asli, dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Diberikan barisan bilangan asli, 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ...

Rancang suatu formula untuk menghitung suku ke 1.000 barisan bilangan tersebut. Ujilah kebenaran formula yang diperoleh dengan menggunakan induksi matematika.

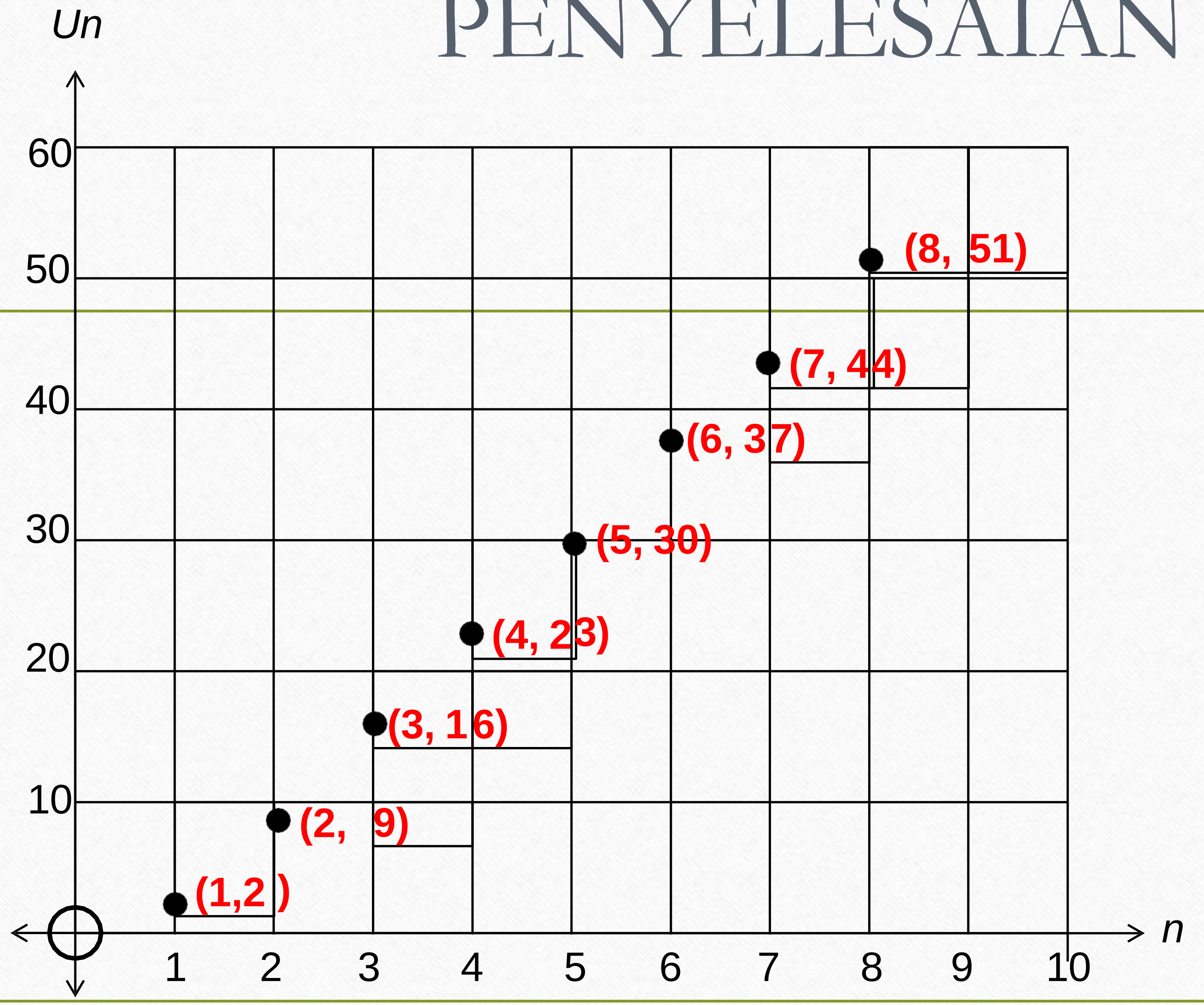
Contoh 1.4

Diberikan barisan bilangan asli, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, ...

Selidiki suatu formula yang memenuhi pola barisan tersebut. Sebelum menentukan suku ke 1.999, terlebih dahulu uji kebenaran formula yang kamu peroleh dengan menggunakan induksi matematika.

Masalah 1.4

PENYELESAIAN



Dari grafik tersebut dapat diperoleh bahwa sebaran titik-titik **(n, u_n)** diwakilkan oleh suatu **fungsi linear.**

Kita misalkan

$\underline{u_n = an + b}$.

dengan n bilangan asli.

Dengan demikian,

- Jika n = 1 maka $u_1 = a.1 + b \leftrightarrow a + b = 2$ ... (1)
- Jika n = 2 maka $u_2 = a.2 + b \leftrightarrow 2a + b = 9$ ... (2)
- Persamaan (2) dan (1) dieliminasi

$$
\begin{array}{l}
2a + b = 9 \\
\underline{a \quad + b = 2} \quad \underline{\quad -} \\
a \qquad = 7 \qquad \text{... (3)}
\end{array}
$$

- Dari persamaan (3) subtitusi ke persamaan (1)

$$
\begin{aligned}
a + b &= 2 \\
(7) + b &= 2 \\
b &= 2 - 7 = -5
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (1) dan (2) dapat diperoleh :

$a = 7$ dan $b = -5$

Jadi formula untuk barisan 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ... adalah

$$u_n = an + b$$
$$= 7n - 5$$

Uji kebenaran formula yang diperoleh dengan induksi matematika, sebelum menentukan u_{1000}

Misalkan : $P(n) = 7n - 5$

a) Langkah Awal

Adt : untuk $n = 4$, maka $P(4)$ benar

$$P(4) = u_4 = 7 \cdot 4 - 5$$
$$= 23$$

Jadi $P(4)$ benar.

b) Langkah Induksi

karena $P(4)$ benar maka $P(5)$ juga benar, sedemikian sehingga diperoleh untuk n = k yaitu

$P(k) = u_k = 7k - 5$ (benar)

Karena $P(k)$ benar maka akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 7(k+1) - 5 \\ &= 7k + 7 - 2 \\ &= 7k + 2 \end{aligned}$$

Dari $P(k)$ diperoleh barisan bilangan asli sebanyak k, yaitu : 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ..., $(7k - 5)$

Dengan demikian, untuk $(k + 1)$ maka diperoleh barisan bilangan asli : 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ..., $(7k - 5)$, $(7k + 2)$

Akibatny, suku ke (k + 1) pola bilangan tersebut adalah:

$u_{k+1} = 7(k+1) - 5$

$= 7k + 7 - 2$

$= 7k + 2$

Jadi terbukti bahwa $P(k+1) = u_{k+1} = 7k + 2$ adalah benar, dengan k adalah bilangan asli.

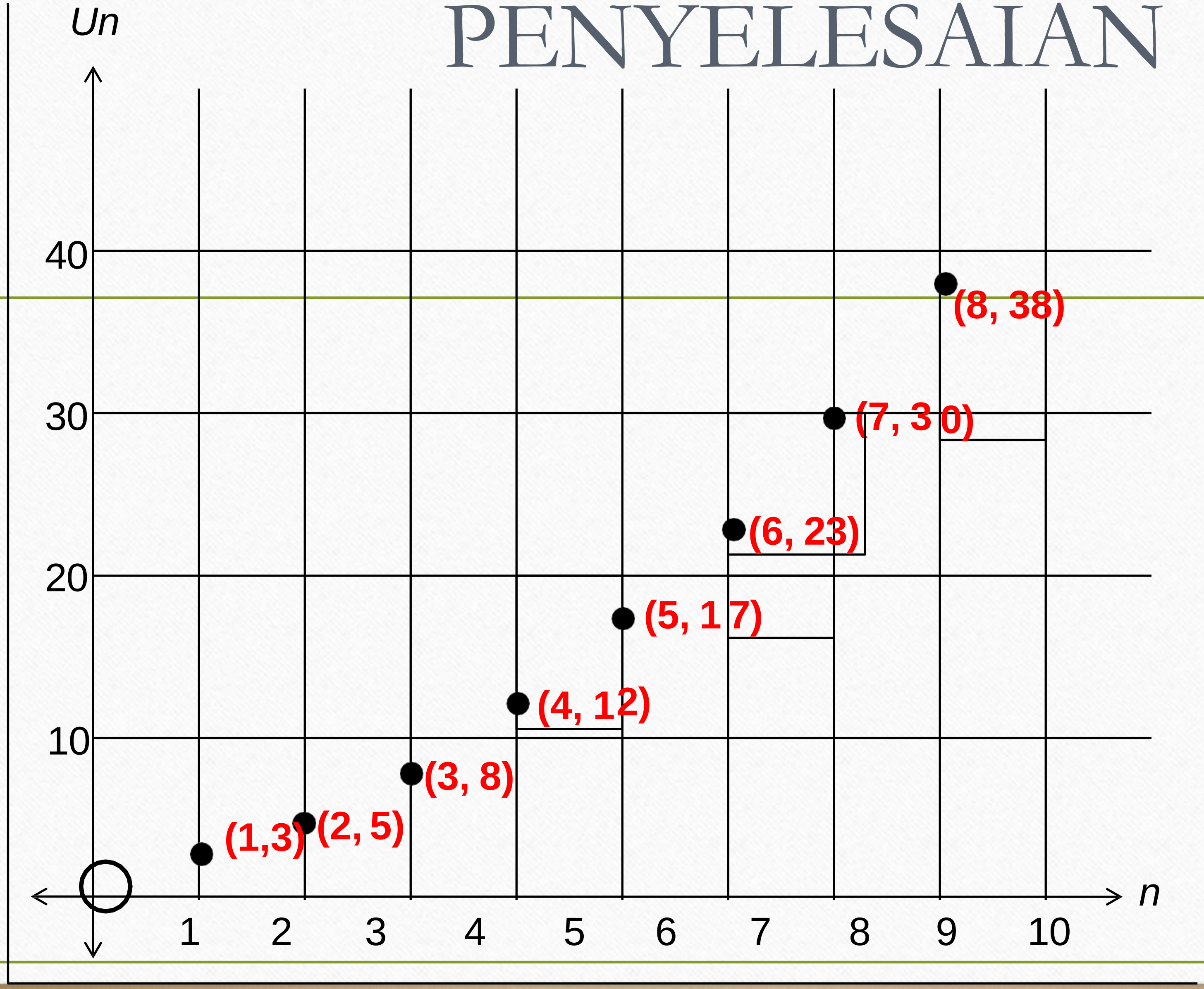
Karena formula $u_n = 7n - 5$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka dapat disimpulkan bahwa formula tersebut adalah formula benar.

Dengan demikian $u_{1000} = 7 \cdot (1000) - 5$

$= 6995$

Contoh 1.4

PENYELESAIAN



Dari grafik tersebut dapat diperoleh bahwa sebaran titik-titik ***(n, u_n)*** diwakilkan oleh suatu **fungsi kuadrat.**

Kita misalkan
$u_n = an^2 + bn + c$,
dengan n bilangan asli.

Dengan demikian,

- Jika n = 1 maka $u_1 = a(1)^2 + b(1) + c \iff a + b + c = 3$ ... (1)
- Jika n = 2 maka $u_2 = a(2)^2 + b(2) + c \iff 4a + 2b + c = 5$ ... (2)
- Jika n = 3 maka $u_3 = a(3)^2 + b(3) + c \iff 9a + 3b + c = 8$ ... (3)

- Pers. (2) dan (1) dieliminasi

$$\begin{array}{l} 4a + 2b + c = 5 \\ \underline{a + b + c = 3} \; - \\ 3a + b = 2 \quad \text{... (4)} \end{array}$$

- Pers. (3) dan (2) dieliminasi

$$\begin{array}{l} 9a + 3b + c = 8 \\ \underline{4a + 2b + c = 5} \; - \\ 5a + b = 3 \quad \text{... (5)} \end{array}$$

- Pers. (4) dan (5) dieliminasi

$$\begin{array}{l} 3a + b = 2 \\ \underline{5a + b = 3} \; - \\ -2a = -1 \\ a = ½ \quad \text{... (6)} \end{array}$$

- Pers. (6) subtitusikan ke pers (4)

$$\begin{array}{l} 3a + b = 2 \\ 3(½) + b = 2 \\ b = 2 - (3/4) \\ b = ½ \quad \text{... (7)} \end{array}$$

Dari persamaan (6) dan (7) subtitusi ke persamaan (1)

$$a + b + c = 3 \quad \leftrightarrow \quad ½ + ½ + c = 3$$

$$1 + c = 3$$

$$c = 2$$

Dari persamaan (1), (2) dan (3) dapat diperoleh :

$a =$ ½ , $b =$ ½ , dan $c = 2$

Jadi formula untuk barisan 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, ... adalah

$$u_n = an^2 + bn + c$$

$$= ½\, n^2 + ½\, n + 2$$

Uji kebenaran formula yang diperoleh Dengan induksi matematika, sebelum menentukan u_{1999}

Misalkan : $P(n) = u_n = ½ n^2 + ½ n + 2$

a) Langkah Awal

Adt : untuk $n = 1$, maka $P(1)$ benar

$P(1) = u_1 = ½ (1)^2 + ½ (1) + 2$

$= 3$

Jadi $P(1)$ benar.

b) Langkah Induksi

Karena $P(1)$ benar maka $P(2)$ juga benar, sedemikian sehingga diperoleh untuk $n = k$ yaitu

$P(k) = ½ k^2 + ½ k + 2$ (benar)

Karena $P(k)$ benar maka akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar.

$P(k+1) = ½ (k+1)^2 + ½ (k+1) + 2$

Dari P(k) diperoleh barisan bilangan asli sebanyak k, yaitu : 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, ..., $(\frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{2} k + 2)$

Sehingga untuk (k + 1) diperoleh barisan bilangan asli : 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, ..., $(\frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{2} k + 2)$, $(\frac{1}{2} (k+1)^2 + \frac{1}{2} (k+1) + 2)$

Dengan demikian diperoleh suku ke (k+1) barisan bilangan tersebut, yaitu :

$u_{k+1} = \frac{1}{2} (k+1)^2 + \frac{1}{2} (k+1) + 2$

Jadi terbukti bahwa $P(k+1) = u_{k+1} = \frac{1}{2} (k+1)^2 + \frac{1}{2} (k+1) + 2$ adalah benar, dengan k adalah bilangan asli.

Karena formula $u_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + 2$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka dapat disimpulkan bahwa formula tersebut benar dan terbukti.

Dengan demikian $u_{1999} = \frac{1}{2} (1999)^2 + \frac{1}{2} (1999) + 2$

$= 1999002$

TUGAS

1. Rancang suatu formula untuk setiap pola barisan yang diberikan.

   a. 5, 13, 21, 29, 37, 45, ...

   b. 0, 6, 16, 30, 48, 70, ...

   c. -2, 1, 6, 13, 22, 33, ...

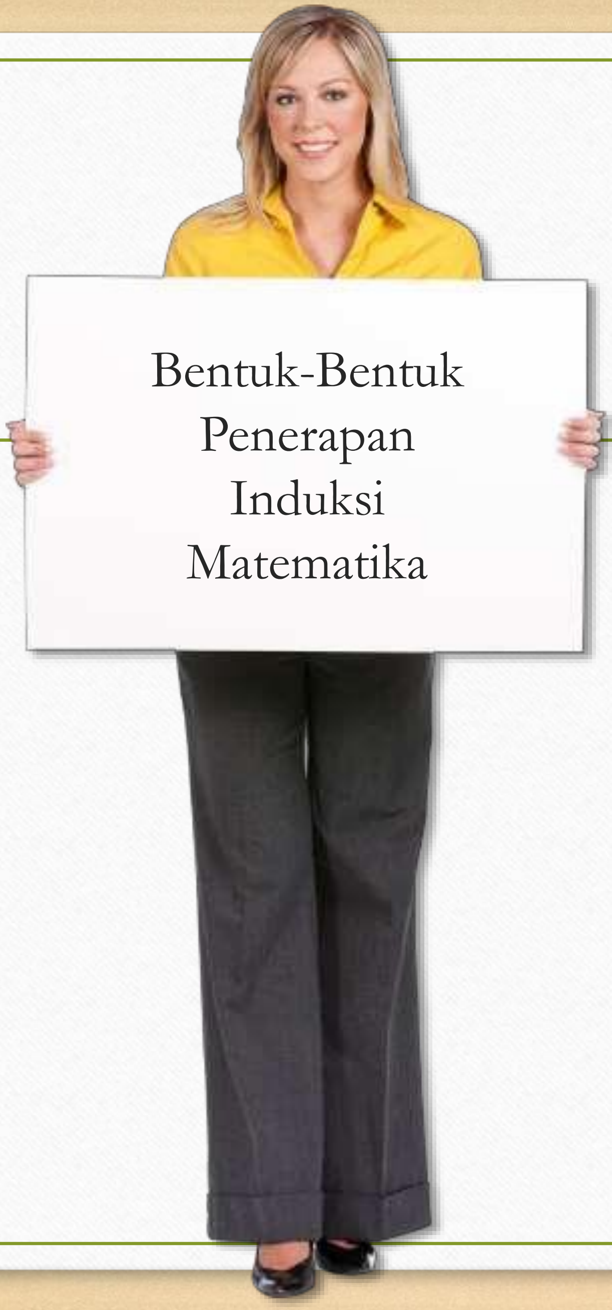
   d. -1, 8, 23, 44, 71,104, ...

PERTEMUAN 2

Indikator

3.1.4 Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika.

4.1.3 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan keterbagian bilangan.



Bentuk-Bentuk Penerapan Induksi Matematika

Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

CONTOH:

1. Dengan induksi matematika, tunjukkan bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.
2. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4, (n bilangan asli).

PENYELESAIAN:

CONTOH 1

Misalkan $P(n) = 11^n - 6$, dengan n bilangan asli.

$11^n - 6$ dapat dituliskan sebagai bilangan kelipatan 5.

a) Langkah Awal

Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 11^1 - 6 = 5$
Jadi $P(n)$ habis dibagi 5.

b) Langkah Induksi

Karena $P(1)$ benar maka $P(2)$ juga benar, sedemikian sehingga untuk $n = k$, yaitu

$P(k) = 11^k - 6$

Karena $P(k)$ benar, maka akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar.
Karena $11^k - 6$ habis dibagi 5, sehingga dapat dimisalkan $11^k - 6 = 5m$,
untuk m bilangan bulat positif. Akibatnya, $11^k = 5m + 6$.

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 11^{k+1} - 6 \\
&= 11^{k}(11) - 6 \\
&= (5m+6)11 - 6 \\
&= 55m + 60 \\
&= 5(11m+12)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $P(k+1) = 11^{k+1} - 6$ dapat dinyatakan sebagai kelipatan 5, yaitu $5(11m+12)$.

Jadi benar bahwa $P(k+1)$ habis dibagi 5.

Karena $P(n) = 11^{n} - 6$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka terbukti $P(n) = 11^{n} - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

CONTOH 2

Misalkan $P(n) = 5^n - 1$, dengan n bilangan asli.
Dapat ditulis bahwa $5^n - 1$ sebagai bilangan kelipatan 4.

- Langkah awal

  Untuk $n = 1$, $P(1) = 5^1 - 1 = 4$
  Jelas habis dibagi 4.
  Jadi $P(1)$ benar.

- Langkah induksi

  Karena P(1) benar, maka P(2) juga benar, sehingga untuk $n = k$, yaitu $P(k) = 5^k - 1$ habis dibagi 4.
  Karena $P(k) = 5^k - 1$ habis dibagi 4, maka akan ditunjukkan $P(k+1) = 5^{k+1} - 1$ juga habis dibagi 4.
  Misalkan $5^k - 1 = 4m$, untuk m bilangan bulat positif. Akibatnya, $5^k = 4m + 1$

$$
\begin{aligned}
5^{k+1} - 1 &= \left(5^k(5)\right) - 1 \\
&= \left((4m+1)(5)\right) - 1) \\
&= (20m) + 5 - 1 \\
&= 4(5m) + 4
\end{aligned}
$$

Karena $4(5m+1)$ jelas merupakan kelipatan 4, maka benar bahwa $P(k+1) =$ $5^{k+1} - 1$ habis di bagi 4.

Dengan demikian P(n) = $5^n - 1$ terbukti habis di bagi 4, untuk n bilangan asli.

TUGAS

1. induksi matematika untuk membuktikan bahwa $4007^n - 1$ habis dibagi 2003, untuk setiap n bilangan asli.
2. Buktikan bahwa $49^n - 36^n$ habis dibagi 13, n bilangan asli.

PERTEMUAN 3

Indikator

3.1.5 Membuktikan formula bentuk ketidaksamaan bilangan dengan prinsip induksi matematika.

4.1.4 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketidaksamaan bilangan.

Penerapan Induksi Matematika pada Ketidaksamaan

CONTOH:

1. Buktikan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$ untuk setiap n bilangan asli.
2. Dari pertidaksamaan berikut, buktikan bahwa $(n + 1)^2 < 2n^2$ untuk keseluruhan himpunan bilangan bulat positif $n \geq 3$.

PENYELESAIAN

1. Misalkan $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{3}$, untuk setiap n bilangan asli.

a) Langkah Awal

Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 1^2 > \frac{1^3}{3}$

$= 1 > \frac{1}{3}$

Jadi $P(1)$ benar.

b) Langkah Induksi

Karena $P(1)$ benar maka $P(2)$ juga benar. Sedemikian sehingga untuk $n = k$, $P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 > \frac{k^3}{3}$ adalah benar.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $n = k + 1$ juga benar.

$$P(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$$

Dari $P(k)$ diperoleh :

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 > \frac{k^3}{3}$$

Kedua ruas ditambahkan $(k+1)^2$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

$$> \frac{k^3 + 3k^2 + 6k + 3}{3}$$

$$> \frac{(k+1)^3 + 3k + 2}{3}$$

Padahal $\frac{(k+1)^3+3k+2}{3} = \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{3k+2}{3} > \frac{(k+1)^3}{3}$, untuk setiap k bilangan bulat positif.

Akibatnya, $P(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$.

Dengan demikian terbukti bahwa $P(k+1)$ adalah benar

Karena $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{3}$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka formula tersebut adalah benar.

2. Misalkan $P(n) = (n + 1)^2 < 2n^2, n \geq 3$

Akan ditunjukkan bahwa P(n) memenuhi kedua prinsip induksi matematika.

a) Langkah Awal

Untuk $n = 3$, diperoleh $P(3) = (n + 1)^2 < 2n^2 = (3+1)^2 < 2.(3^2) = 16 < 18$

Dengan demikian terbukti bahwa $P(3) = 16 < 18$.

Jadi $P(2)$ benar.

b) Langkah Induksi

Karena $P(3)$ benar maka $P(4)$ juga benar, sedemikian sehingga diperoleh

untuk $n = k$,

$P(k) = (k + 1)^2 < 2k^2$

$= k^2 + 2k + 1 < 2k^2$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $n = k + 1$ juga benar.

$P(k+1) = ((k+1) + 1)^2 < 2(k+1)^2$

$= (k+2)^2 < 2(k^2 + 2k + 1)$

$= k^2 + 4k + 4 < 2k^2 + 4k + 2$

Dipunyai:

$P(k) = k^2 + 2k + 1 < 2k^2$

Kedua ruas ditambah $(2k + 3)$, sehingga:

$$k^2 + 2k + 1 < 2k^2 = k^2 + 2k + 1 + (2k + 3) < 2k^2 + (2k + 3)$$
$$k^2 + 4k + 4 < 2k^2 + 2k + 3$$

Karena $2k^2 + 2k + 3 < 2\text{k}^2 + 4k + 2$ maka $k^2 + 4k + 4 < 2\text{k}^2 + 4k + 2$ sehingga $P(k + 1)$ terbukti.

Karena $P(n) = (n + 1)^2 < 2n^2$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka formula tersebut adalah benar.

TUGAS

1. Diberikan $a > 1$, buktikan $a^n > 1$, *n* bilangan asli.
2. Buktikan bahwa $n > 5$ jika $2^n > 5n$, maka , *n* bilangan asli.