## RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN

Satuan Pendidikan : SMA N 1 Toroh
Mata Pelajaran : Matematika Wajib
Kelas / Semester : XI IPA/ Ganjil
Materi Pokok : Induksi Matematika
Alokasi Waktu : 1 Pertemuan (45 menit )

### A. Tujuan Pembelajaran

| Kompetensi Dasar | | Tujuan Pembelajaran |
|---|---|---|
| 3.1 | Menjelaskan metode pembuktian Pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika | Melalui pembelajaran secara luring dan daring peserta didik dengan baik dan benar dapat:<br>1. Menjelaskan konsep kontradiksi<br>2. Menjelaskan konsep induksi matematika |
| 4.1 | Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian | |

### B. Kegiatan Pembelajaran

| Pendahuluan | Kegiatan Inti | Penutup |
|---|---|---|
| **Luring**<br>1. Guru melakukan pembukaan dengan salam pembuka dan berdoa untuk memulai pembelajaran, memeriksa kehadiran peserta didik sebagai sikap disiplin, menyiapkan fisik dan psikis peserta didik dalam mengawali kegiatan pembelajaran.<br>2. Menginformasikan tujuan pembelajaran, kegiatan pembelajaran yang dilaksanakan dan memotivasi peserta didik berkaitan dengan materi besaran dan satuan.<br>**Daring**<br>1. Peserta didik masuk ke aplikasi | **Luring**<br>1. Peserta didik dengan difasilitasi guru memahami konsep kontradiksi<br>2. Peserta didik dengan difasilitasi guru memahami konsep induksi matematika<br>**Daring**<br>1. Peserta didik membuka link youtube pembelajaran konsep kontradiksi dan konsep induksi matematika<br>2. Peserta didik, | **Luring**<br>1. Peserta didik dibantu oleh guru untuk menyimpulkan kegiatan pembelajaran .<br>2. Peserta didik mengerjakan tugas yang diberikan oleh guru<br>**Daring**<br>1. Peserta didik mengerjakan tugas melalui aplikasi Teams. |

| | | |
|---|---|---|
| Teams, membaca informasi yang diposting di saluran yang tersedia dan melakukan presensi melalui Form. | mengajukan pertanyaan melalui obrolan grup mengenai materi yang kurang jelas. | |

**C. Penilaian**

Penilaian sikap diambil dari jurnal sikap ; penilaian pengetahuan dilakukan dengan penugasan dan penilaian harian , penilaian keterampilan dari kegiatan praktikum yang telah dilakukan

Grobogan, 24 Mei 2021

Kepala Sekolah

Guru Mata Pelajaran

Dra. Sri Puji Astuti, M.M.

NIP. 19681017 199702 2 002

Ules Sulistyani, S.Pd.

NIP. -

**Materi**

Induksi matematika adalah suatu metode pembuktian deduktif yang digunakan untuk membuktikan pernyataan matematika yang bergantung pada himpunan bilangan yang terurut rapi (well ordered set), seperti bilangan asli ataupun himpunan bagian tak kosong dari bilangan asli. Perlu ditekankan bahwa induksi matematika hanya digunakan untuk membuktikan kebenaran dari suatu pernyataan atau rumus, bukan untuk menurunkan rumus. Atau lebih tegasnya induksi matematika tidak dapat digunakan untuk menurunkan atau menemukan rumus.

Berikut beberapa contoh pernyataan matematika yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika :
P(n) : $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, n bilangan asli
P(n) : $6^n + 4$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.
P(n) : $4n < 2^n$, untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$

Cara yang paling mudah untuk memahami prinsip kerja induksi matematika adalah dengan mengamati efek domino. Kita dapat mulai dengan mengajukan pertanyaan "kapan semua domino akan jatuh".
Ada dua kondisi yang harus dipenuhi agar semua domino tersebut jatuh.
Pertama : **domino 1 harus jatuh**.
Kedua : benar bahwa setiap domino yang jatuh akan menjatuhkan tepat satu domino berikutnya. Artinya jika domino 1 jatuh maka domino 2 pasti jatuh, jika domino 2 jatuh maka domino 3 pasti jatuh dan seterusnya. Secara umum dapat kita katakan **jika domino k jatuh maka domino (k + 1) juga jatuh** dan implikasi ini berlaku untuk semua domino.
Jika kedua kondisi diatas telah terpenuhi, sudah dipastikan semua domino akan jatuh.

**Prinsip Induksi Matematika**

Misalkan P(n) adalah suatu pernyataan yang bergantung pada n. P(n) benar untuk setiap n bilangan asli jika memenuhi 2 kondisi berikut :

1. P(1) benar, artinya untuk n = 1 maka P(n) bernilai benar.
2. Untuk setiap bilangan asli k, jikaP(k) benar maka P(k + 1) juga benar.

Prinsip diatas dapat diperluas untuk pernyataan yang bergantung pada himpunan bagian tak kosong dari bilangan asli.

**Perluasan Prinsip Induksi Matematika**
Misalkan P(n) adalah suatu pernyataan yang bergantung pada n. P(n) benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ jika memenuhi 2 kondisi berikut :

1. P(m) benar, artinya untuk n = m, maka P(n) bernilai benar
2. Untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, jika P(k) benar maka P(k + 1) juga benar. Untuk menunjukkan P(1) benar, kita cukup mensubstitusikan n = 1 pada P(n). Jika P(n) disajikan dalam bentuk persamaan, berarti ruas kiri harus sama dengan ruas kanan pada saat n = 1, barulah kita simpulkan P(1) benar. Cara yang sama dapat kita terapkan untuk menunjukkan P(m) benar. Kembali lagi pada kasus domino diatas, agar domino (k + 1) jatuh, terlebih dahulu domino k harus jatuh, barulah implikasi "jika domino k jatuh maka

domino (k + 1) jatuh" dapat terjadi.Jadi, untuk menunjukkan implikasi "jika P(k) benar maka P(k + 1) benar", terlebih dulu kita harus menganggap atau mengasumsikan bahwa P(k) benar. Kemudian berdasarkan asumsi tersebut kita tunjukkan P(k + 1) juga benar. Proses asumsi P(k) benar ini disebut dengan **hipotesis induksi**.
Untuk menunjukkan P(k + 1) benar, dapat kita mulai dari **hipotesis**, yaitu dari asumsi P(k) benar ataupun dari **kesimpulan**, yaitu dari P(k + 1) itu sendiri.

**Langkah – Langkah Pembuktian Induksi Matematika**

Dari uraian – uraian diatas, langkah – langkah pembuktian induksi matematika dapat kita urutkan sebagai berikut :

1. **Langkah dasar** : Tunjukkan P(1) benar.
2. **Langkah induksi** : Asumsikan P(k) benar untuk sebarang k bilangan asli, kemudian tunjukkan P(k+ 1) juga benar berdasarkan asumsi tersebut.
3. **Kesimpulan** : P(n) benar untuk setiap bilangan asli n.

**Pembuktian Deret**
Sebelum masuk pada pembuktian deret, ada beberapa hal yang perlu dipahami dengan baik menyangkut deret.

Jika P(n) : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = S_n$ , maka
P(1) : $u_1 = S_1$
P(k) : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k = S_k$
P(k + 1) : $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + u_{k+1} = S_{k+1}$

**Contoh**
Buktikan 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1), untuk setiap n bilangan asli.

Jawab :
P(n) : 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)
Akan dibuktikan P(n) benar untuksetiap $n \in N$

**Langkah Dasar** :
Akan ditunjukkan P(1) benar
2 = 1(1 + 1)
Jadi, P(1) benar

**Langkah Induksi** :
Asumsikan P(k) benar yaitu
2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k + 1), $k \in N$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu
2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)

Dari asumsi :
2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k + 1)
Tambahkan kedua ruas dengan $u_{k+1}$ :
2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1)
2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)

$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$
Jadi, P(k + 1) benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) benar untuk setiap n bilangan asli.

**Pembuktian Keterbagian**

Pernyataan "a habis dibagi b" bersinonim dengan :
a kelipatan b
b faktor dari a
b membagi a
**Jika p habis dibagi a dan q habis dibagi a, maka (p + q) juga habis dibagi a**.
Sebagai contoh, 4 habis dibagi 2 dan 6 habis dibagi 2, maka (4 + 6) juga habis dibagi 2

**Contoh**
Buktikan $6^n + 4$ habis dibagi 5, untuk setiap n bilangan asli.

Jawab :
P(n) : $6^n + 4$ habis dibagi 5
Akan dibuktikan P(n) benar untuk setiap $n \in N$.

**Langkah Dasar** :
Akan ditunjukkan P(1) benar
$6^1 + 4 = 10$ habis dibagi 5
Jadi, P(1) benar

**Langkah Induksi** :
Asumsikan P(k) benar, yaitu
$6^k + 4$ habis dibagi 5, $k \in N$

Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu
$6^{k+1} + 4$ habis dibagi 5.
$6^{k+1} + 4 = 6(6^k)+ 4$
$6^{k+1} + 4 = 5(6^k) + 6^k + 4$
Karena $5(6^k)$ habis dibagi 5 dan $6^k + 4$ habis dibagi 5, akibatnya $5(6^k) + 6^k + 4$ juga habis dibagi 5.Jadi, P(k + 1) benar.
Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa $6^n + 4$ habis dibagi 5, untuksetiap n bilangan asli.

**Bilangan bulat *a* habis dibagi bilangan bulat *b* jika terdapat bilangan bulat *m* sehingga berlaku *a* = *bm*.**
Sebagai contoh, "10 habis dibagi 5" benar karena terdapat bilangan bulat m = 2 sehingga 10 = 5.2. Jadi, pernyataan "10 habis dibagi 5" dapat kita tulis menjadi "10 = 5m, untuk m bilangan bulat"
Berdasarkan konsep diatas, pembuktian keterbagian dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut.

**Contoh**
Buktikan $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk setiap n bilangan asli

Jawab :
P(n) : $n^3 + 2n = 3m$, dengan $m \in ZZ$
Akan dibuktikan P(n) benar untuk setiap $n \in NN$

**Langkah Dasar** :
Akan ditunjukkan P(1) benar
$1^3 + 2.1 = 3 = 3.1$
Jadi, P(1) benar

**Langkah Induksi** :
Asumsikan P(k) benar, yaitu
$k^3 + 2k = 3m, \quad k \in N$

Akan ditunjukkan P(k + 1) jugabenar, yaitu
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3p, \quad p \in Z$

$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3m + 3(k^2 + k + 1)$
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3(m + k^2 + k + 1)$

Karena m bilangan bulat dan k bilangan asli, maka $(m + k^2 + k + 1)$ adalah bilangan bulat.
Misalkan $p = (m + k^2 + k + 1)$, maka
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = 3p$, dengan $p \in Z$
Jadi, P(k + 1) benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk setiap n bilangan asli.

**Pembuktian Pertidaksamaan**
Berikut sifat-sifat pertidaksamaan yang sering digunakan
1. Sifat transitif
   $a > b > c \Rightarrow a > c$ atau
   $a < b < c \Rightarrow a < c$

2. $a < b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ atau
   $a > b$ dan $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ atau
   $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Sebelum masuk pada contoh soal, ada baiknya kita latihan menggunakan sifat-sifat diatas untuk menunjukkan implikasi "jika P(k) benar maka P(k + 1) juga benar".

Misalkan
P(k) : $4k < 2^k$
P(k + 1) : $4(k + 1) < 2^{k+1}$
Jika diasumsikan P(k) benar untuk $k \geq 5$, tunjukkan P(k + 1) juga benar !

Ingat bahwa target kita adalah menunjukkan
$4(k + 1) < 2^{k+1} = 2(2^k) = \mathbf{2^k + 2^k}$ (**TARGET**)
Kita dapat mulai dari ruas kiri pertaksamaan diatas
$4(k + 1) = 4k + 4$
$4(k + 1) < 2^k + 4$ (karena $4k < 2^k$)
$4(k + 1) < 2^k + 2^k$ (karena $4 < 4k < 2^k$)
$4(k + 1) = 2(2^k)$
$4(k + 1) = 2^{k+1}$

Berdasarkan sifat transitif kita simpulkan
$4(k + 1) < 2^{k+1}$

***Mengapa 4k dapat berubah menjadi $2^k$ ?***
Berdasarkan sifat 3, kita diperbolehkan menambahkan kedua ruas suatu pertaksamaan dengan bilangan yang sama, karena tidak akan merubah nilai kebenaran pertaksamaan tersebut.
Karena $4k < 2^k$ benar, akibatnya $4k + 4 < 2^k + 4$ jugab enar.

***Darimana kita tahu, 4 harus diubah menjadi $2^k$ ?***
Perhatikan target.Hasil sementara kita adalah $2^k + 4$ sedangkan target kita adalah $2^k + 2^k$.
Untuk $k \geq 5$, maka $4 < 4k$ dan $4k < 2^k$ adalah benar, sehingga $4 < 2^k$ juga benar (sifattransitif).
Akibatnya $2^k + 4 < 2^k + 2^k$ benar (sifat 3).

**Contoh**
Buktikan untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ berlaku
$3n < 2^n$

Jawab :
$P(n)$ : $3n < 2^n$
Akan dibuktikan $P(n)$ berlaku untuk $n \geq 4$, $n \in N$

**Langkah Dasar** :
Akan ditunjukkan P(4) benar
$3.4 = 12 < 2^4 = 16$
Jadi, P(4) benar
**Langkah Induksi** :
Asumsikan P(k) benar, yaitu
$3k < 2^k$, $k \geq 4$
Akan ditunjukkan P(k + 1) juga benar, yaitu
$3(k + 1) < 2^{k+1}$
$3(k + 1) = 3k + 3$
$3(k + 1) < 2^k + 3$ (karena $3k < 2^k$)
$3(k + 1) < 2^k + 2^k$ (karena $3 < 3k < 2^k$)
$3(k + 1) = 2(2^k)$
$3(k + 1) = 2^{k+1}$
Jadi, P(k + 1) juga benar

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa P(n) berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

## Instrumen Penilaian Tes Lisan

**Kompetensi Dasar**

3.1 Menjelaskan metode pembuktian Pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika

**Indikator**

3.1.1 Menjelaskan konsep kontradiksi

3.1.2 Menjelaskan konsep induksi matematis

| No. | Indikator | Instrumen |
|---|---|---|
| 1 | Menjelaskan konsep kontradiksi | Jelaskan konsep dari pengertian kontradiksi! |
| 2 | Menjelaskan konsep induksi matematis | Jelaskan konsep dari pengertian induksi matematika |

**PEDOMAN PENSKORAN**

| KRITERIA YANG DINILAI/ ALTERNATIF PERTANYAAN | SKOR MAKSIMAL |
|---|---|
| Siswa dapat menyebutkan jawaban dengan, lengkap dan benar. | 3 |
| Siswa dapat menyebutkan jawaban dengan baik dan benar, tapi kurang lengkap. | 2 |
| Siswa dapat menyebutkanjawaban tapi salah sebagian besar. | 1 |
| Siswa tidak  dapat menjawab dengan benar | 0 |

## Kisi-Kisi Tugas

| No | Kompetensi Dasar | Materi/ Sub Materi | Indikator Soal | Teknik penilaian |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.1 Menjelaskan metode pembuktian Pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika | Induksi Matematika | 3.1.1 Memahami konsep kontradiksi<br>3.1.2 Memahami konsep induksi matematis<br>3.1.3 Menganalisis metode pembuktian langsung dan tidak langsung<br>3.1.4 Menganalisis fakta pada metode pembuktian langsung, tidak langsung, kontradiksi, dan induksi matematika | Pengugasan |

**Tugas:**
.....................................................................................................
......

**Pedoman Penskoran Tugas**

| No. | Aspek yang dinilai | Skor |
|---|---|---|
| 1. | Kesesuaian dengan konsep | 0-3 |
| 2. | Ketepatan dalam analisis metode | 0-3 |
| 3. | Ketepatan waktu pengumpulan tugas | 0-3 |
| 4. | Kerapihan penulisan tugas | 0-3 |
| **Skormaksimum** | | 12 |

$$\text{Nilai} = \frac{Total\ Skor\ Perolehan}{Total\ Skor\ Maksimum} \text{x}100$$

**Kisi - Kisi Tes Tertulis**

| No | Kompetensi Dasar | Materi/ Sub Materi | Indikator Soal | Bentuk Soal | Jumlah Soal |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.1 Menjelaskan metode pembuktian Pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika | Induksi Matematika | 3.1.1 Memahami konsep kontradiksi<br>3.1.2 Memahami konsep induksi matematis<br>3.1.3 Menganalisis metode pembuktian langsung dan tidak langsung<br>3.1.4 Menganalisis fakta pada metode pembuktian langsung, tidak langsung, kontradiksi, dan induksi matematika | Uraian | 1 |

Butir Soal Uraian

| KARTU SOAL | | |
|---|---|---|
| Satuan Pendidikan : SMA  N 1 TOROH<br>Mata Pelajaran : Matematika Wajib<br>Nama Penyusun : Ules Sulistyani, S.Pd.<br>Tahun Pelajaran : 2021/2022 | | |
| | | |
| Materi : Induksi Matematika | Buku Sumber : Buku Guru dan Buku Siswa, Kemendikbud 2020 | |
| Indikator Soal<br>Menganalisis fakta pada metode pembuktian langsung, tidak langsung, kontradiksi, dan induksi matematika | No.Soal<br>1 | Rumusan Butir Soal<br>1. Buktikan dengan induksi matematika<br>$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ |

Nilai = $\frac{Total\ Skor\ Perolehan}{Total\ Skor\ Maksimum}$ x100

Penskoran Soal Uraian

| **KRITERIA YANG DINILAI/ ALTERNATIF PERTANYAAN** | **SKOR MAKSIMAL** |
|---|---|
| Siswa dapat menyebutkan jawaban dengan,lengkap dan benar. | 3 |
| Siswa dapat menyebutkan jawaban dengan baik dan benar, tapi kurang lengkap. | 2 |
| Siswa dapat menyebutkan jawaban tapi salah sebagian besar. | 1 |
| Siswa tidak  dapat  menjawab dengan benar | 0 |

**Pedoman Pengamatan Sikap Sosial**

Mata pelajaran : Matematika Wajib
Kelas : XI
Hari, Tanggal : ……………………….
Pertemuan Ke- : ……………………….
Materi Pokok : ……………………….

| No | Nama PesertaDidik | Aspek Penilaian | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Kepedulian | Rasa menghormati | Kesopanan |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Penskoran
Skor penilaian menggunakan skala 1 – 4, yaitu :
Skor 1 apabila peserta didik tidak pernah sesuai aspek sikap yang dinilai
Skor 2 apabila peserta didik kadang – kadang sesuai aspek sikap yang dinilai
Skor 3 apabila peserta didik sering sesuai aspek sikap yang dinilai
Skor 4 apabila peserta didik selalu sesuai aspek sikap yang dinilai

**Nilai** = $\frac{\textbf{Skor Yang Diperoleh}}{\textbf{Skor Maksimal}}\, \boldsymbol{x}\ \mathbf{100}\%$

**Kisi-kisi Penilaian Praktik**

| No Soal | Kompetensi Dasar | IPK | Materi Pokok | Indikator Soal |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian | 1.2.2 Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan induksi matematika | Induksi Matematika | Peserta didik dapat menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan induksi matematika . |

Tugas Praktik: ………………………………………………………………………………

**Rubrik Penskoran Penilaian Praktik**

| No. | Aspek yang Dinilai | Skor | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | **2** | **3** |
| 1. | Mengerjakan dengan runtut | | | | |
| 2. | Menyajikan penyelesaian masalah dengan tepat | | | | |
| 3. | Menjelaskan dengan penuh percaya diri | | | | |
| 4. | Dapat menjawab pertanyaan dari teman | | | | |
| **Jumlah** | | | | | |
| **Skor Maksimum** | | 12 | | | |

Nilai = $\frac{Total\ Skor\ Perolehan}{Total\ Skor\ Maksimum}$ x100