

**RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN**  
**INTEGRAL TENTU**  
**(MENENTUKAN LUAS DAERAH)**

$$L = \int_a^b f(x) dx$$



Di Susun Oleh:

**AAM HAMZAH, S.Pd**

NIP: 19680207 199101 1 001

**SEKOLAH MENENGAH ATAS NEGERI 16 KOTA BANDUNG**

## RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Sekolah : SMA Negeri 16 Bandung

Mata Pelajaran : Matematika

Kelas/Semester : XI/1

Alokasi Waktu : 2 JP (1 x Pertemuan)

KI 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya

KI 2. Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.

KI 3. Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan **metakognitif** berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI 4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

KD. 3.6 Menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus untuk menemukan hubungan antara integral dalam integral tentu dan dalam integral tak tentu

KD. 4.4 Mengajukan masalah nyata dan mengidentifikasi sifat fundamental kalkulus dalam integral tentu fungsi sederhana serta menerapkannya dalam pemecahan masalah.

### I. TUJUAN PEMBELAJARAN

Melalui model pembelajaran *Problem Based Learning* dengan menggali informasi dari berbagai sumber belajar, penyelidikan sederhana dan mengolah informasi, diharapkan siswa terlibat aktif selama proses belajar mengajar berlangsung, memiliki sikap ingin tahu, teliti dalam melakukan pengamatan dan bertanggungjawab dalam menyampaikan pendapat, menjawab pertanyaan, memberi saran dan kritik diharapkan peserta didik dapat Menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus untuk menemukan hubungan antara integral dalam integral tentu dan dalam integral tak tentu dan Mengajukan masalah nyata dan mengidentifikasi sifat fundamental kalkulus dalam integral tentu fungsi sederhana serta menerapkannya dalam pemecahan masalah. dengan mengembangkan nilai karakter berpikir kritis , kreatif (kemandirian), kerjasama (gotongroyong) dan kejujuran (integritas) .

## II. KEGIATAN PEMBELAJARAN :

No	Kegiatan/Tahap	Deskripsi	Nilai-nilai Karakter/PPK/4C/HOTS/Literasi/Kecakapan Hidup/PHBS/Protokol Covid-19)	Alokasi Waktu
1	Proses Pembelajaran			
	a. Pendahuluan (Kegiatan Awal)	<p>Guru membuka pembelajaran dengan salam pembuka dan berdoa untuk memulai pelajaran</p> <p>Peserta didik mengucapkan salam</p> <p>Guru mengecek kehadiran peserta didik sikap disiplin.</p> <p><b>Apersepsi:</b></p> <p>Guru memberikan pertanyaan yang pernah di pelajari</p> <p>Guru mengingatkan kembali tentang materi</p> <p>Sebelumnya yaitu</p> $F(x)=x^n \text{ maka } F'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $F(x)=ax^n \text{ maka } F'(x) = an \cdot x^{n-1}$ <p>Integral merupakan anti turunan</p> $\int F'(x)dx = F(x) + c$ <p><b>Motivasi:</b></p>  <p>Guru bertanya kepada siswa, pernahkah kalian melewati jembatan diatas? Jika bentuk lengkungan yang terdapat pada jembatan akan di pasang fiberglass, bagaimana cara yang menghitung luas fiberglass yang dibutuhkan untuk menutupi</p>	PPK (Religius )	10 menit

		jembatan <u>Guru menyampaikan tujuan pembelajaran</u>		
	b. Kegiatan Inti	<p><b>a) Tahap 1: Orientasi peserta didik pada masalah</b>  1. Untuk mendorong rasa ingin tahu serta berpikir kritis, peserta didik diberi gambaran tentang contoh penggunaan integral tentu dengan menunjukkan beberapa bentuk yang sulit ditentukan luasnya, jika tanpa integral.  2. Peserta didik diberikan LKPD.</p> <p><b>b) Tahap 2: Mengorgani-sasikan peserta didik</b>  1. Peserta didik diminta untuk berdiskusi secara berkelompok mengerjakan LKPD.  2. Dengan berdiskusi, setiap peserta didik diminta menghitung luas daerah segiempat dan segitiga dengan cara biasa, dan membanding-kannya dengan hasil perhitungan integral tentu yang diberikan  3. Peserta didik diminta berdiskusi kelompok untuk mencari cara menentukan luas daerah yang tidak dapat ditentukan dengan cara biasa.</p> <p><b>c) tahap 3: Membimbing penyelidikan individu dan kelompok</b>  1. Guru berkeliling kelas mengamati dan memberikan masukan, baik individu, kelompok maupun klasikal.  2. Agar lebih memahami peserta didik diberikan contoh soal tambahan dan diminta mendiskusikannya.</p> <p><b>d) tahap 4: Mengembangkan dan menyajikan hasil karya</b>  1. Beberapa peserta didik diminta untuk <b>meng-komunikasikan</b> hasil diskusinya di depan kelas untuk selanjutnya dibahas.  2. Peserta didik yang lain diminta memberikan tanggapan baik berupa tambahan, koreksi ataupun pertanyaan</p> <p><b>e) tahap 5: Menganalisa dan meng-evaluasi proses pemecahan masalah</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Literasi</li> <li>- PPK (Kemandirian)</li> <li>- 4C (Kritis &amp; kreatif)</li> <li>- HOTS</li> </ul>	60 menit

		<p>1. Guru menyampaikan tanggapan atas proses dan hasil diskusi peserta didik</p> <p>2. Guru memberikan penguatan dan tambahan atas apa yang telah disajikan oleh perwakilan peserta didik.</p>											
	Kegiatan Akhir	<p>a) Peserta didik mereview pembelajaran yang telah dilaksanakan</p> <p>b) Peserta didik mengucapkan salam dan mengakhiri pembelajaran dengan berdoa</p>	<p>- Literasi</p> <p>- PPK (Kemandirian)</p> <p>- 4C (Kritis &amp; kreatif)</p>	20 menit									
2	<b>PENILAIAN</b>	<table border="1"> <tr> <td>Penilaian</td> <td>Teknik</td> </tr> <tr> <td>Sikap</td> <td>Jurnal</td> </tr> <tr> <td>Pengetahuan</td> <td>Tes dan LKPD</td> </tr> <tr> <td>Keterampilan</td> <td>Lembar Observasi</td> </tr> </table>		Penilaian	Teknik	Sikap	Jurnal	Pengetahuan	Tes dan LKPD	Keterampilan	Lembar Observasi		
Penilaian		Teknik											
Sikap		Jurnal											
Pengetahuan		Tes dan LKPD											
Keterampilan		Lembar Observasi											



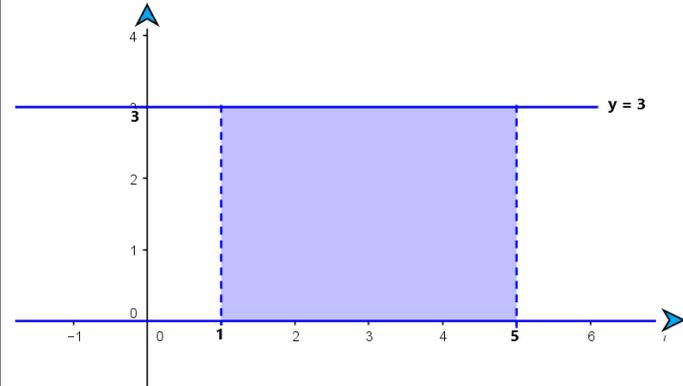


## LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD)

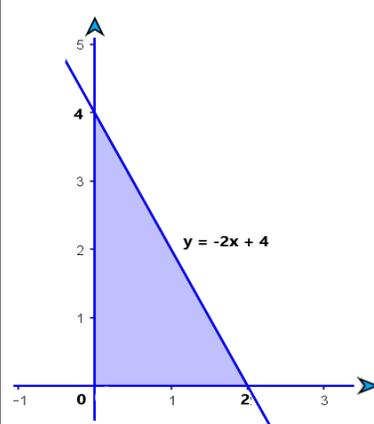
Materi : Integral Tentu (Menentukan Luas Daerah)

Kelas : XI

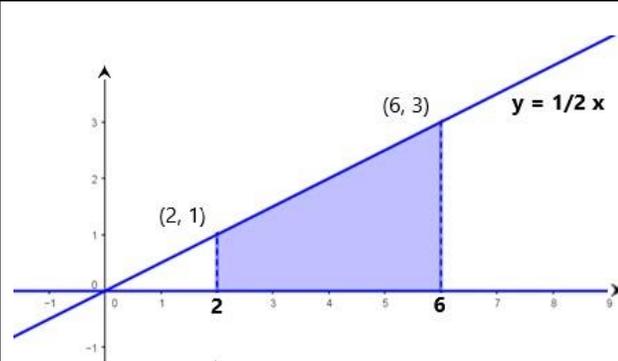
1. Tentukan luas persegi panjang berikut, kemudian tentukan nilai dari integral tentu di bawah ini:

 <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Luas = panjang . lebar = ..... . ..... = .....</p>	$\int_1^5 3 \, dx = [\dots\dots]_1^5$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$
---	---

2. Tentukan luas segitiga berikut, kemudian tentukan nilai dari integral tentu di bawah ini:

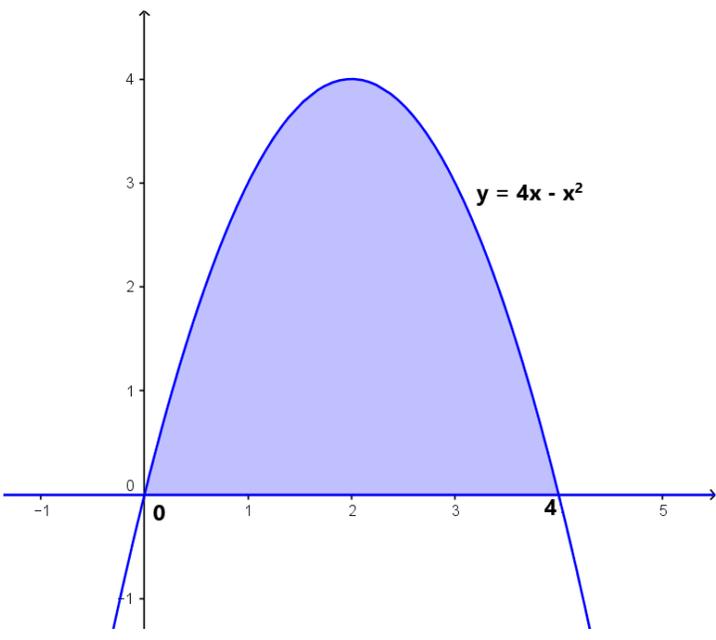
 <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Luas = <math>\frac{1}{2} \cdot a \cdot t</math> = <math>\frac{1}{2} \dots \dots</math> = .....</p>	$\int_0^2 (-2x + 4) \, dx$ $= [\dots\dots\dots]_0^2$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$
---	--

3. Tentukan luas trapesium berikut, kemudian tuliskanlah integral tentu yang menurut perkiraan Anda akan menghasilkan nilai yang sama dengan luas trapesium tersebut.

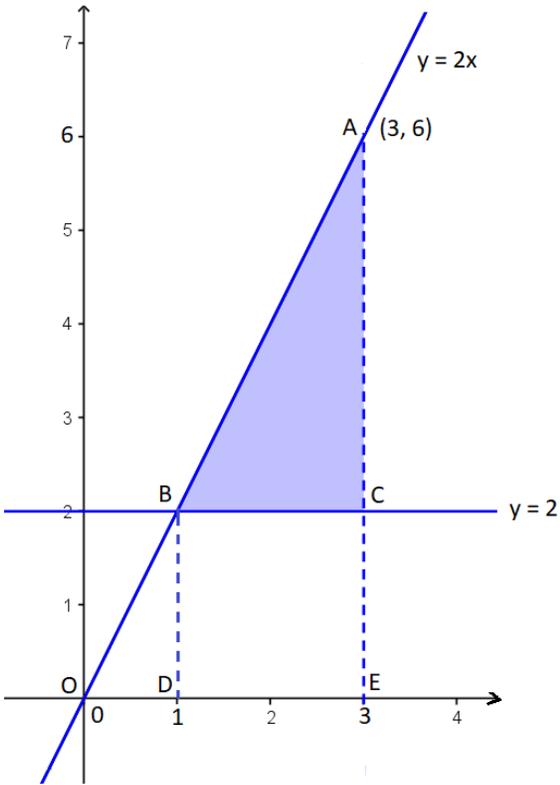
 <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Luas = .....</p> <p style="text-align: center;">= .....</p> <p style="text-align: center;">= .....</p>	$\int_{\dots}^{\dots} (\dots\dots\dots) \, dx$ $= [\dots\dots\dots]_{\dots}^{\dots}$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$
---	--

--	--

4. Tuliskanlah integral tentu untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola dan sumbu X berikut, kemudian hitunglah nilai integral tentu tersebut.

	$\int_{\dots}^{\dots} (\dots) dx$ $= [\dots]_{\dots}^{\dots}$ $= \dots$ $= \dots$ $= \dots$
--	---

5. Dengan memandang bahwa: **Luas  $\Delta ABC$  = Luas Trapesium ABDE – Luas BDEC**, hitunglah luas segitiga ABC.

	<p><b>Luas Trapesium ABDE:</b></p> $\int_{\dots}^{\dots} (\dots) dx$ $= [\dots]_{\dots}^{\dots}$ $= \dots$ $= \dots$ <p><b>Luas BDEC:</b></p> $\int_{\dots}^{\dots} (\dots) dx$ $= \dots$ $= \dots$ <p><b>Luas <math>\Delta ABC</math></b></p> $= \dots - \dots$ $= \dots$
---	--

Bandungkan hasil perhitungan di atas dengan hasil dari:

$$\int_1^3 (2x - 2) dx = [\dots]_1^3$$

= .....

Menurut Anda, dari manakah asal fungsi  $f(x) = (2x - 2)$  pada pengintegralan yang terakhir?

Perhatikan bahwa:

**Luas  $\Delta ABC$  = Luas Trapesium ABDE – Luas BDEC**

$$= \int_{\dots}^{\dots} (\dots \dots) dx - \int_{\dots}^{\dots} (\dots) dx$$

$$= \int_{\dots}^{\dots} (\dots - \dots) dx$$

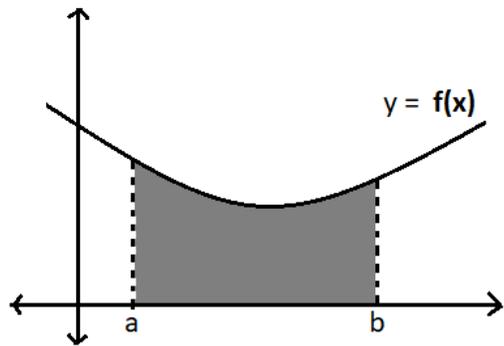
6. Hitunglah luas segitiga berikut, kemudian bandingkan hasilnya dengan perhitungan integral tentu di sebelahnya.

<p style="text-align: center;"><math>y = \frac{1}{2}x - 3</math></p> <p style="text-align: center;">Luas = <math>\frac{1}{2} \cdot a \cdot t</math>          = <math>\frac{1}{2} \dots \cdot \dots</math>          = .....</p>	$\int_2^6 \left(\frac{1}{2}x - 3\right) dx$ $= \left[ \dots \dots \dots \right]_2^6$ $= \dots \dots \dots$ $= \dots \dots \dots$ <p>Adakah keanehan pada hasilnya ?</p> <p>Bagaimana penjelasan Anda ?</p>
--	--

**7. Kesimpulan**

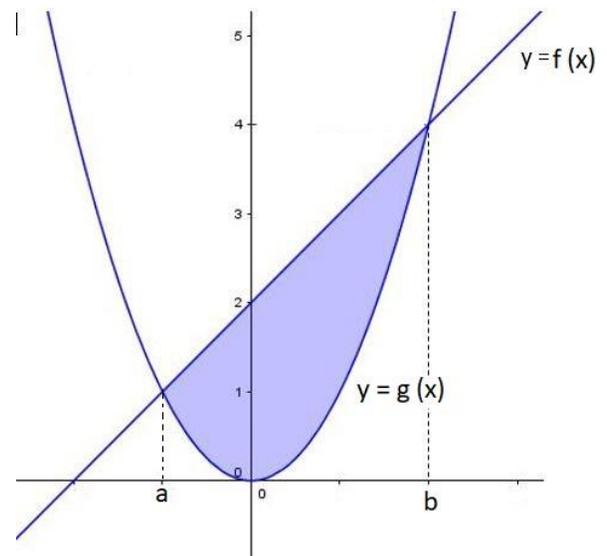
- a. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$  dan sumbu X pada interval  $a < x < b$  adalah:

$$\int_{\dots}^{\dots} \dots dx$$



- b. Luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva, yaitu  $y = f(x)$  dan  $y = g(x)$  pada interval  $a < x < b$  adalah:

$$\int_a^b ( \dots - \dots ) dx$$



## Lampiran 1

### INSTRUMEN PENILAIAN SIKAP

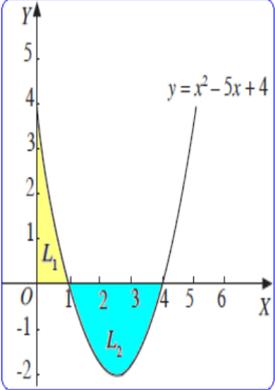
Sekolah : SMA Negeri 16 Bandung  
Mata Pelajaran : Matematika  
Kelas/Semester : XI/1

No	Waktu	Nama	Pengumpulan Tugas	Butir sikap	Tidak terlambat/ terlambat	Tindak lanjut
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						

## Lampiran 2

### PENILAIAN PENGETAHUAN

Sekolah : SMA Negeri 16 Bandung  
 Mata Pelajaran : Matematika  
 Kelas/Semester : XI/1

Indikator Pencapaian	Indikator Soal	Butir Soal	Ranah
Menghitung luas daerah	Menghitung Luas daerah	Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x + 6$ dan $y = x^2$ dalam interval $[1, 2]$ .	C4
	▪ Menghitung Luas Daerah	Hitung luas daerah yang di batasi oleh kurva $y=4x - x^2$ , $x=1$ , $x=3$ dan sumbu x	C4
	Diketahui grafik parabola siswa dapat menghitung luas daerah	Tentukan luas daerah yang diarsir pada Gambar berikut dengan 	C4

Jawaban No 1

1. Menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva

$y = x + 6$  dan  $y = x^2$  dalam interval  $[1, 2]$ . Berdasarkan

gambar di samping diperoleh:

$$y_1 = x + 6, y_2 = x^2, a = 1 \text{ dan } b = 2.$$

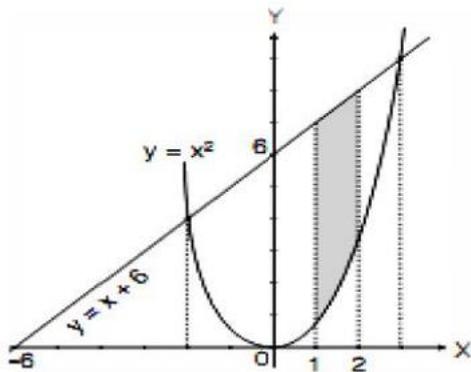
$$\text{Jadi } L = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$$

$$L = \int_1^2 (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_1^2 (x + 6 - x^2) dx$$

Jadi luas daerah L adalah 5,1666 satuan luas

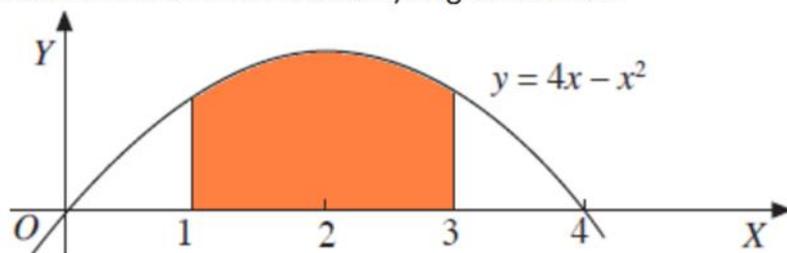
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}2^2 + 6(2) - \frac{1}{3}2^3\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 + 6(1) - \frac{1}{3}1^3\right) \\
&= \left(2 + 12 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{31}{6} = 5,1666
\end{aligned}$$



2. Jawaban no 2

Penyelesaian :

\*) Kita gambar dulu kurva dan arsiran daerah yang dimaksud.



$$\begin{aligned}
\text{Luas Arsiran} &= \int_1^3 f(x) dx \\
&= \int_1^3 (4x - x^2) dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3 \\
&= \left[2 \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3\right] - \left[2 \cdot 1^2 - \frac{1}{3} \cdot 1^3\right] \\
&= [18 - 9] - \left[2 - \frac{1}{3}\right] \\
&= 7\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah  $7\frac{1}{3}$  satuan luas.

\*) Karena  $L_2$  terletak di bawah sumbu  $X$  (bernilai negatif),  $L_2$  diberi tanda negatif (agar menjadi positif). Oleh karena itu, luas daerah yang dicari adalah sebagai berikut.

$$\text{Luas Arsiran} = L_1 + (-L_2) = L_1 - L_2$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (x^2 - 5x + 4) dx - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \\ &= 6\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah  $6\frac{1}{3}$  satuan luas.

### Lampiran 3

#### PENILAIAN KETERAMPILAN INTRUMEN PENILAIAN OBSERVASI KEGIATAN DISKUSI

Sekolah : SMA Negeri 16 Bandung  
Mata Pelajaran : Matematika  
Kelas/Semester : XI/1

No	NIS	Nama	Indikator				Jumlah score
			Argumen	Menjawab pertanyaan	Merespon penjelasan guru	Bertanya	
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							

**Keterangan:**

Argumen = skor 40

Menjawab pertanyaan= skor 20

Merespon penjelasan guru=skor 20

Bertanya= skor20

Mengetahui,  
Kepala

---

Bandung, ..... 2021  
Guru Mata Pelajaran

---

## 1. Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

### a. Remedial

Bagi peserta didik yang belum memenuhi kriteria ketuntasan minimal (KKM), maka guru bisa memberikan soal tambahan

Gambarlah sketsa daerah  $D$ , nyatakan masing-masing luas daerah  $D$  dengan integral tentu, kemudian hitunglah integral tentu tersebut dengan cara manual dan cocokanlah dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan derive 6 ;

- a. Kurva  $y = x - 1$ , sumbu  $x$  dan garis  $x = -3$ .
- b. Garis  $4x + 5y = 20$ , sumbu  $x$ ,  $x = 1$  dan  $x = 3$ .

### PROGRAM REMIDI

Sekolah: .....

Kelas/Semester : .....

Mata Pelajaran : .....

Ulangan Harian Ke : .....

Tanggal Ulangan Harian : .....

Bentuk Ulangan Harian : .....

Materi Ulangan Harian : .....

(KD / Indikator) : .....

KKM : .....

No	Nama Peserta Didik	Nilai Ulangan	Indikator yang Belum dikuasai	Bentuk Tindakan Remedial	Nilai Setelah Remedial	Keterangan
1						
2						
3						
4						
5						
6						

No	Nama Peserta Didik	Nilai Ulangan	Indikator yang Belum dikuasai	Bentuk Tindakan Remedial	Nilai Setelah Remedial	Keterangan
----	--------------------	---------------	-------------------------------	--------------------------	------------------------	------------

dst

**b. Pengayaan**

Guru memberikan nasihat agar tetap rendah hati, karena telah mencapai KKM (Kriteria Ketuntasan Minimal). Guru memberikan soal pengayaan sebagai berikut :

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $f(x) = -\sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$ .

Bandung, .....2021

Mengetahui

Kepala SMAN 16 Bandung

Guru Mata Pelajaran

.....

NIP/NRK.

.....

NIP/NRK.