

BAHAN AJAR



SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL

SPLTV

Datih Nurani Istriana, S. Pd
SMA Negeri 3 Sragen

Kompetensi Dasar

3.3 Menyusun sistem persamaan linear tiga variabel dari masalah kontekstual

4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel

Tujuan Pembelajaran

Siswa dapat :

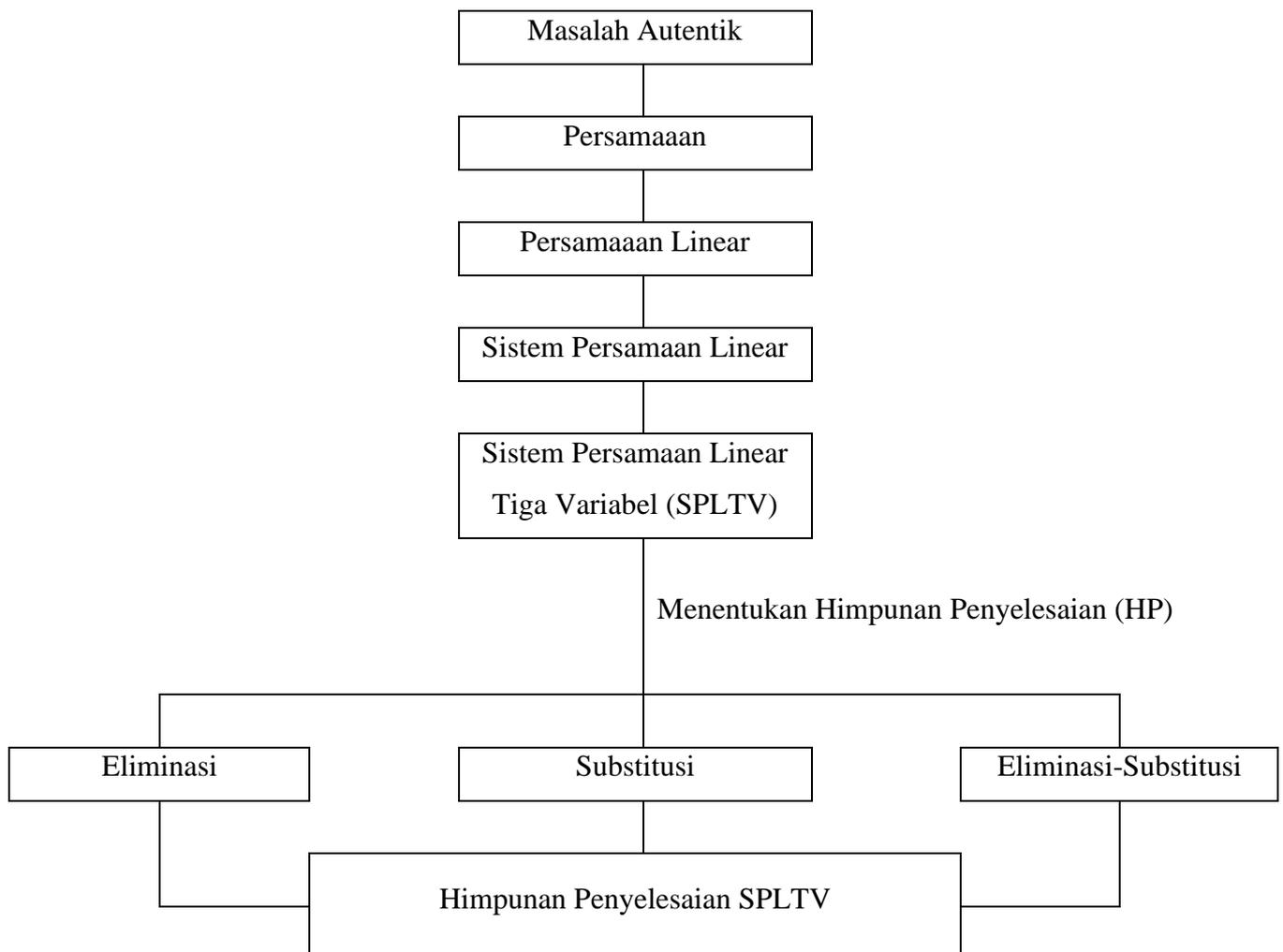
1. Membuat model matematika sistem persamaan linear tiga variabel yang berkaitan dengan masalah kontekstual
2. Menyelesaikan permasalahan sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode eliminasi-substitusi
3. Menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode eliminasi-substitusi

Pendidikan Karakter

Siswa mampu mengembangkan karakter :

- Mandiri
- Kreatif
- Suka berkomunikasi
- Bekerja keras

Peta Konsep



Tahukah Kamu



Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Gabriel Cramer, seorang matematikawan Swiss lahir di Jenewa pada 31 Juli 1704 dari pasangan Jean Isaac Cramer, seorang fisikawan Swiss dan Anne Mallet. Kedua saudaranya, yaitu Jean Antonie merupakan seorang doctor dan Jean seorang professor di bidang hukum. Gabriel Cramer inilah salah satu tokoh yang berperan dalam pengembangan sistem persamaan linear. Karya terbesarnya adalah metode Cramer (*Cramer's Rule*) yang merupakan salah satu metode penyelesaian dari permasalahan persamaan linear.

Pada tahun 1750, bersamaan dengan dianugrah dirinya sebagai professor filsafat di Academic de la Rive, Cramer mempublikasikan karyanya yang berjudul *Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques* yang memuat metode Cramer sebagai penyelesaian permasalahan linear.

Sumber : https://www.kompasiana.com/sri_j/56502894d693736305e72f6f/sejarah-matematika-dunia

Uraian Materi



Sumber :

<https://bisnisukm.com/uploads/2012/11/kerajinan-ramah-lingkungan.jpg>

Bu Sari mempunyai usaha industri rumah tangga yang memproduksi 3 jenis produk, yaitu tas kain, tempat pensil, dan taplak meja. Pada suatu pameran, industri rumah tangga tersebut dapat menjual 18 tas kain, 32 tempat pensil, dan 25 taplak meja dengan hasil penjualan Rp 5.480.000,00. Harga tempat pensil Rp 15.000,00 lebihnya dari harga tas kain dan harga taplak meja Rp 25.000,00 kurangnya dibandingkan harga tas kain, maka tentukan harga masing – masing produk tersebut.

Bagaimana menyelesaikan permasalahan di atas? Masalah di atas merupakan contoh dalam kehidupan sehari – hari yang dapat diselesaikan dengan konsep persamaan tiga variabel.

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

Setiap persamaan yang berbentuk $ax + by + cz = d$ dengan a , b , c , dan d adalah konstanta dan a , b , dan c tidak nol, maka persamaan tersebut adalah “*persamaan linear dalam tiga variabel*”. Himpunan titik – titik yang memenuhi persamaan tersebut, yaitu $\{(x, y, z) | ax + by + cz = d\}$ adalah suatu bidang datar dalam sumbu – sumbu orthogonal X, Y, dan Z. Bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

yang hanya mempunyai satu penyelesaian untuk x , y , dan z , yaitu (x, y, z) .

A. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Metode atau cara yang umum untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut :

1. Metode Substitusi

Penyelesaian SPLTV (dalam variabel x , y , dan z) dengan menggunakan metode substitusi ditentukan dengan langkah – langkah sebagai berikut :

- a. Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z , atau y sebagai fungsi x dan z , atau z sebagai fungsi x dan y .
- b. Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah (a) ke dua persamaan yang lainnya sehingga diperoleh sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV).
- c. Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah (b).
- d. Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada langkah (c) ke salah satu persamaan semula untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.

Contoh soal :

Dengan metode substitusi, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 22 \\ 3x - y + 4z = 19 \\ 5x + y + 2z = 21 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}
 \end{array}$$

Penyelesaian :

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + 2z = 0 \dots\dots\dots(1) \\ x - y + z = 4 \dots\dots\dots(2) \\ 3x + 2y + z = 2 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

Persamaan (2) diubah menjadi $x = 4 + y - z \dots\dots\dots(4)$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (1) :

$$\begin{aligned}
 &x + y + 2z = 0 \\
 \Leftrightarrow &(4 + y - z) + y + 2z = 0 \\
 \Leftrightarrow &4 + y - z + y + 2z = 0 \\
 \Leftrightarrow &2y + z = -4 \\
 \Leftrightarrow &z = -4 - 2y \dots\dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (3) :

$$\begin{aligned}
 &3x + 2y + z = 2 \\
 \Leftrightarrow &3(4 + y - z) + 2y + z = 2 \\
 \Leftrightarrow &12 + 3y - 3z + 2y + z = 2 \\
 \Leftrightarrow &5y - 2z = -10 \dots\dots\dots(6)
 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (5) ke persamaan (6) :

$$\begin{aligned}
 &5y - 2z = -10 \\
 \Leftrightarrow &5y - 2(-4 - 2y) = -10 \\
 \Leftrightarrow &5y + 8 + 4y = -10 \\
 \Leftrightarrow &9y = -18 \\
 \Leftrightarrow &y = -2
 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan $y = -2$ ke persamaan (5) :

$$\begin{aligned} z &= -4 - 2y \\ \Leftrightarrow z &= -4 - 2(-2) \\ \Leftrightarrow z &= -4 + 4 \\ \Leftrightarrow z &= 0 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan $y = -2$ dan $z = 0$ ke persamaan (4) :

$$x = 4 + y - z = 4 + (-2) - 0 = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(2, -2, 0)\}$.

Untuk (b) dan (c) sebagai latihan.

2. Metode Eliminasi

Penyelesaian SPLTV (dalam variabel x , y , dan z) dengan menggunakan metode eliminasi ditentukan dengan langkah – langkah sebagai berikut :

- Eliminasi salah satu variabel , x atau y atau z , sehingga diperoleh SPLDV.
- Selesaikan SPLDV pada langkah (a) dengan mengeliminasi variabel kedua untuk mendapatkan nilai variabel ketiga atau mengeliminasi variabel ketiga untuk mendapatkan variabel kedua.
- Ulangi langkah (a) dan (b) dengan pemilihan variabel berbeda sampai didapatkan nilai dari ketiga variabel.

Contoh soal :

Dengan metode substitusi, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 22 \\ 3x - y + 4z = 19 \\ 5x + y + 2z = 21 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases} \end{array}$$

Penyelesaian :

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + 2z = 9 \dots\dots\dots(1) \\ 2x + 4y - 3z = 1 \dots\dots\dots(2) \\ 3x + 6y - 5z = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2) sehingga diperoleh

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \quad | \times 3 | \Leftrightarrow 3x + 3y + 6z = 27 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \quad | \times 2 | \Leftrightarrow 4x + 8y - 6z = 2 \\ \hline 7x + 11y = 29 \dots\dots\dots(4) \end{array}$$

Eliminasi z dari persamaan (2) dan (3) sehingga diperoleh

$$\begin{array}{l} 2x + 4y - 3z = 1 \quad | \times 5 | \Leftrightarrow 10x + 20y - 15z = 5 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \quad | \times 3 | \Leftrightarrow 9x + 18y - 15z = 0 \\ \hline x + 2y = 5 \dots\dots\dots(5) \end{array}$$

Eliminasi x dari persamaan (4) dan (5) sehingga diperoleh

$$\begin{array}{l} 7x + 11y = 29 \quad | \times 1 | \Leftrightarrow 7x + 11y = 29 \\ x + 2y = 5 \quad | \times 7 | \Leftrightarrow 7x + 14y = 35 \\ \hline -3y = -6 \\ y = 2 \end{array}$$

Untuk selanjutnya sebagai latihan sampai menemukan nilai x dan z dengan cara yang sama, yaitu eliminasi.

Untuk (b) dan (c) sebagai latihan.

3. Metode Gabungan (Eliminasi – Substitusi)

Contoh soal :

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut.

$$a. \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 22 \\ 3x - y + 4z = 19 \\ 5x + y + 2z = 21 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

Penyelesaian :

$$a. \begin{cases} x + y + 2z = 9 \dots\dots\dots(1) \\ 2x + 4y - 3z = 1 \dots\dots\dots(2) \\ 3x + 6y - 5z = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2) sehingga diperoleh

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \quad | \times 3 | \Leftrightarrow 3x + 3y + 6z = 27 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \quad | \times 2 | \Leftrightarrow 4x + 8y - 6z = 2 \\ \hline 7x + 11y = 29 \dots\dots\dots(4) \end{array}$$

Eliminasi z dari persamaan (2) dan (3) sehingga diperoleh

$$\begin{array}{r} 2x + 4y - 3z = 1 \quad | \times 5 | \Leftrightarrow 10x + 20y - 15z = 5 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \quad | \times 3 | \Leftrightarrow 9x + 18y - 15z = 0 \\ \hline x + 2y = 5 \dots\dots\dots(5) \end{array}$$

Eliminasi x dari persamaan (4) dan (5) sehingga diperoleh

$$\begin{array}{r} 7x + 11y = 29 \quad | \times 1 | \Leftrightarrow 7x + 11y = 29 \\ x + 2y = 5 \quad | \times 7 | \Leftrightarrow 7x + 14y = 35 \\ \hline -3y = -6 \\ y = 2 \end{array}$$

Substitusi $y = 2$ ke persamaan (5), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ \Leftrightarrow x + 2(2) &= 5 \\ \Leftrightarrow x + 4 &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Substitusi $x = 1$ dan $y = 2$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ \Leftrightarrow 1 + 2 + 2z &= 9 \\ \Leftrightarrow 3 + 2z &= 9 \\ \Leftrightarrow 2z &= 6 \\ \Leftrightarrow z &= 3 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1,2,3)\}$.

Untuk (a) dan (c) sebagai latihan.

B. Masalah yang Melibatkan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Dalam perhitungan matematika dan dalam kehidupan sehari – hari, seringkali kita menemukan masalah yang dapat diterjemahkan ke dalam model matematika yang berupa SPLTV. Untuk menyelesaikannya, diharuskan membuat model matematika berupa sistem persamaan linear terlebih dahulu, kemudian baru menafsirkan penyelesaiannya.

Model matematika adalah suatu cara sederhana untuk memandang suatu masalah dengan menggunakan persamaan. Dengan kata lain, menyederhanakan kalimat/masalah sehari – hari ke dalam bentuk SPLTV. Langkah – langkah dalam merancang suatu model matematika adalah sebagai berikut :

- a. Tetapkan besaran masalah di dalam soal sebagai variabel – variabel (dinyatakan dalam variabel).
- b. Rumuskan hubungan atau ekspresi matematika sesuai dengan keterangan atau ketentuan yang ada.

Setelah merancang model matematis yang berkaitan dengan suatu masalah SPLTV, selanjutnya selesaikan permasalahan SPLTV sehingga ditemukan himpunan penyelesaian dari permasalahan tersebut.

Contoh :

Ayu, Bimo, dan Candra berbelanja di sebuah toko buku secara bersamaan. Ayu membeli 3 set pensil, 4 penghapus, dan 1 buku tulis. Bimo membeli 6 set pensil, 2 penghapus, dan 1 buku tulis. Sedangkan Candra membeli 2 set pensil, 5 penghapus, dan 10 buku tulis. Di kasir, Ayu membayar Rp 83.000,00, Bimo membayar Rp 86.000,00, dan Candra membayar Rp 158.000,00. Berapa harga masing – masing barang tersebut?

Penyelesaian :

Misalkan x = harga 1 set pensil

y = harga 1 buah penghapus

z = harga 1 buku tulis

Model matematika (sistem persamaan) :

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 83000 \dots\dots\dots(1) \\ 6x + 2y + z = 86000 \dots\dots\dots(2) \\ 2x + 5y + 10z = 158000 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

Untuk selanjutnya, sebagai latihan dengan metode yang ada.

SOAL TANTANGAN

Tentukan nilai x , y , dan z yang memenuhi dari SPLTV berikut.

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{8}{y} - \frac{12}{z} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} + \frac{12}{z} = 4 \end{cases}$$

Daftar Pustaka

- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2016. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi 2016)*. Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
- Noormandiri, BK. 2016. *Matematika Jilid 1 untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Wajib*. Jakarta : Erlangga
- Rohkhana, Siti. 2020. *Modul Pengayaan : Matematika untuk SMA/MA Kelas X Semester 1*. Surakarta : CV. Grahadi
- Widodo, Untung. 2017. *Mandiri : Matematika Jilid 1 untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Wajib*. Jakarta : Erlangga