BAHAN AJAR MATERI TRANSFORMASI GEOMETRI DENGAN MENGGUNAKAN *PROBLEM BASED LEARNING*

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Tugas
Pada Kegiatan Pendalaman Materi
PPG Dalam Jabatan 2021

CITRA OLIVIA, S.Pd.
NO. UKG : 201698236616

PPG DALAM JABATAN ANGKATAN III
UNIVERSITAS RIAU
TAHUN 2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkah, rahmat dan karunia-Nya sehingga saya dapat menyelesaikan Penyusunan Materi Ajar Modul 1 Geometri yaitu KB 3 Transformasi Geometri. Modul ini memuat empat materi pokok sebagai berikut:

1. Pengertian Transformasi Geometri;
2. Translasi (Pergeseran);
3. Refleksi (Pencerminan);
4. Rotasi (Perputaran);
5. Dilatasi (Perkalian).

Penyusunan modul ini diperuntukkan bagi siswa yang mengikuti pembelajaran matematika khususnya Transformasi Geometri. Tujuan penyusunan modul ini adalah untuk menambah pengetahuan siswa dalam bidang matematika terkait materi Transformasi Geometri. Dengan bertambahnya pengetahuan tersebut, diharapkan siswa memiliki Sumber Daya manusia (SDM) berkualitas yang memiliki sejumlah kompetensi dan keterampilan Abad 21 yang dibutuhkan dalam menghadapi era globalisasi.

Ucapan terima kasih yang tak terhingga saya peruntukkan kepada Universitas Riau serta pihak-pihak yang telah membantu dalam penyusunan modul ini. Namun demikian, modul ini tidak luput dari kekurangan–kekurangan. Oleh karena itu, saya mengharapkan saran dan kritik dari para pembaca demi penyempurnaan modul ini. Demikianlah sekleumit kata yang dapat saya sampaikan. Semoga modul ini dapat bermanfaat untuk dunia pendidikan Indonesia.

Pekanbaru, Juli 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Di dalam kehidupan sehari-hari, banyak aktivitas atau kegiatan yang terkait dengan geometri transformasi. Transformasi geometri adalah perubahan ukuran, bentuk penyajian, dan posisi dari suatu objek, baik berupa titik, garis, kurva, dan bidang, serta dapat dinyatakan dalam gambar dan matriks menurut aturan tertentu. Transformasi geometri terdiri dari translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), dilatasi (perkalian), dan rotasi (perputaran).

Gambar 1. Foto Pencerminan Bangunan pada Air
Sumber : www.brilio.net

Pada gambar di atas, kita dapat melihat bahwa bayangan dari bangunan tersebut memiliki titik-titik yang bersesuaian dengan bangunan aslinya. Jarak setiap titik pada bangunan asli terhadap permukaan air sama besarnya dengan jarak bayangan titik terhadap permukaan air. Bayangan dari bangunan tersebut merupakan hasil refleksi (pencerminan). Selain itu, penerapan transformasi geometri juga kita temukan pada peristiwa berputarnya jarum jam dinding mengikuti poros titik tengah jam. Setiap detik, menit, dan bilangan jam yang ditunjukkan oleh jarum membentuk sudut tertentu dan berputar mengelilingi porosnya. Peristiwa ini dikenal sebagai rotasi (perputaran).

Gambar 2. Rotasi Jarum pada Jam Dinding
Sumber : www.google.com

Selain dua peristiwa di atas, masih banyak lagi contoh penerapan transformasi geometri di dalam kehidupan sehari-hari. Dengan adanya materi ajar ini, kita akan dipandu melalui penanaman konsep dasar, latihan terbimbing, forum diskusi, dan permasalahan kontekstual yang berkaitan dengan transformasi geometri.

2. Relevansi

Materi Transformasi Geometri sangat erat kaitannya dengan kehidupan nyata peserta didik, baik di bidang optik, kesehatan, fotografi, otomotif, pemrograman, arsitektur, dan lain sebagainya. Adapun sub materi pada bahan ajar ini antara lain :

- Konsep translasi (pergeseran).
- Konsep refleksi (pencerminan)
- Konsep rotasi (perputaran).
- Konsep dilatasi (perkalian)

Setiap sub materi yang disajikan selalu ada keterkaitannya dengan permasalahan atau konsep aktual yang terjadi di lingkungan sekitar. Penyajian materi pada bahan ajar ini berbasis *Problem Based Learning (PBL), HOTS (Higher Order Thinking Skills) dan TPACK (Technological, Pedagogical, and Content Knowledge)* yang kelak diharapkan mampu menjawab tantangan keterampilan abad ke-21, yaitu keterampilan kreativitas berpikir dan inovasi, keterampilan berpikir kritis dan pemecahan masalah, keterampilan komunikasi, serta keterampilan kolaborasi.

3. Petunjuk Belajar

Bahan ajar ini dirancang untuk memfasilitasi peserta didik dalam melaksanakan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Adapun petunjuk penggunaan bahan ajar ini, diantaranya :

a. Berdo’a sebelum melaksanakan kegiatan pembelajaran.
b. Pelajari dan pahami setiap uraian materi yang disajikan secara terurut, serta perhatikan contoh soal dan pembahasannya secara seksama dan

menyeluruh. Jika memungkinkan, cobalah untuk mengerjakannya kembali.

c. Kerjakanlah latihan soal yang diberikan. Jika ada kendala, pelajari kembali materi dan contoh soal yang diberikan.
d. Lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi terhadap pemahaman terkait materi yang disajikan melalui pengerjaan tes formatif.
e. Cocokkan hasil pekerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia. Pembelajaran dikatakan berhasil jika ketercapaian pemahaman 80% atau lebih. Jika pemahaman kurang dari 80%, pelajari kembali materi ajar yang disajikan, terutama pada persoalan yang masih ditemui kesulitan dan kesalahan dalam pengerjaannya.
f. Keberhasilan dan kesuksesan dalam melaksanakan kegiatan pembelajaran mandiri bergantung pada keseriusan dan kesungguhan hati dalam memahami materi yang disajikan. Untuk itu, berlatihlah secara mandiri atau berkelompok dengan teman sejawat.

B. INTI

1. Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari materi pada bahan ajar ini, peserta didik diharapkan mampu memahami, mengidentifikasi, menganalisis, merekonstruksi, memodifikasi secara terstruktur materi matematika sekolah dan *advance material* secara bermakna dalam menyelesaikan permasalahan dari suatu sistem pemodelan matematika dan permasalahan praktis di kehidupan sehari-hari, melalui tahapan *problem solving*, koneksi dan komunikasi matematika, *critical thinking*, kreatifitas berpikir matematis yang selaras dengan tuntutan masa depan yang terkait dengan Transformasi Geometri.

2. Sub Capaian Pembelajaran

Secara khusus, peserta didik diharapkan dapat :

a. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep translasi (pergeseran).

b. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep refleksi (pencerminan).

c. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep rotasi (perputaran).

d. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan konsep dilatasi (perkalian).

3. Uraian Materi

a. Pengertian Transformasi Geometri

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, salah satu arti transformasi adalah perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dan sebagainya). Sedangkan kaitannya dengan matematika, proses transformasi ini terjadi pada bidang datar dan ruang, atau lebih dikenal sebagai Transformasi Geometri. Pengertian dari transformasi geometri adalah proses berubahnya setiap titik pada suatu koordinat menjadi titik koordinat lain menurut aturan tertentu. Perubahan ini merujuk pada perubahan bangun-bangun terhadap kedudukan maupun ukurannya. Pada bahan ajar ini akan dibahas beberapa jenis transformasi geometri, diantaranya translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian). Untuk penerapan transformasi geometri di dalam kehidupan sehari-hari, dapat dilihat melalui tautan video berikut ini.

https://www.youtube.com/watch?v=xEmH_0c2vIg&t=95s

b. Translasi (Pergeseran)

Apakah kamu pernah mengamati objek atau benda-benda yang bergerak di sekitarmu? Seperti kendaraan yang berjalan di jalan raya, pesawat yang melintas di udara, eskalator yang bergerak, atau diri kita sendiri yang bergerak kemana saja. Kegiatan tersebut menyebabkan benda atau objek mengalami perubahan posisi tanpa mengubah bentuk dan ukuran. Mari kita memahami konsep translasi dengan menyelesaikan Masalah 1.

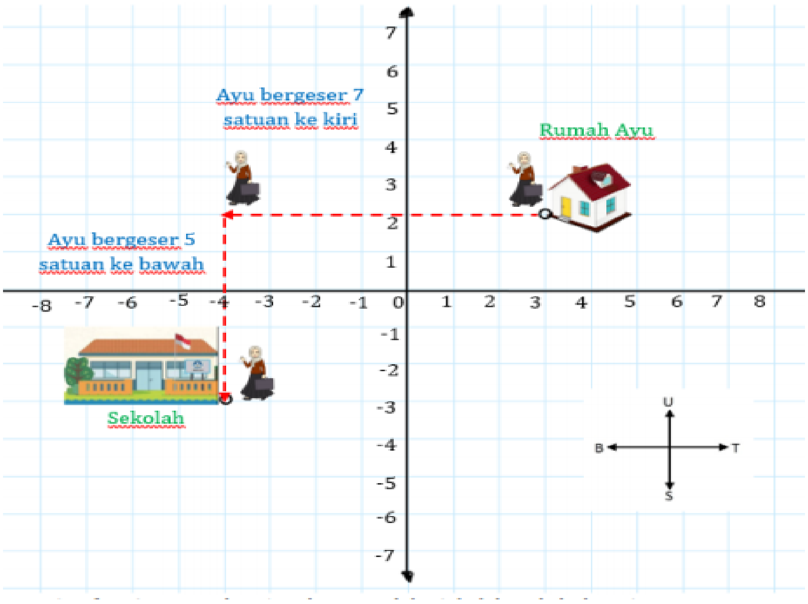
Masalah 1

Ayu ingin berangkat ke sekolah. Jika Ayu berangkat dari rumah maka untuk sampai ke sekolah ayu harus berjalan 7 satuan ke arah barat dan berjalan 5 satuan ke arah selatan. Coba kamu sketsa pergerakan Ayu pada bidang cartesius. Dapatkah kamu menemukan proses pergerakan Ayu dari rumah menuju sekolah?

Untuk memudahkan kita dalam memahami konsep translasi, kita dapat menggunakan pendekatan bidang Cartesius. Kita dapat mengasumsikan :

- sumbu X positif untuk pergeseran ke kanan;
- sumbu X negatif untuk pergeseran ke kiri;
- sumbu Y positif untuk pergeseran ke atas, dan
- sumbu Y negatif untuk pergeseran ke bawah.

Sehingga diperoleh gambar sebagai berikut :

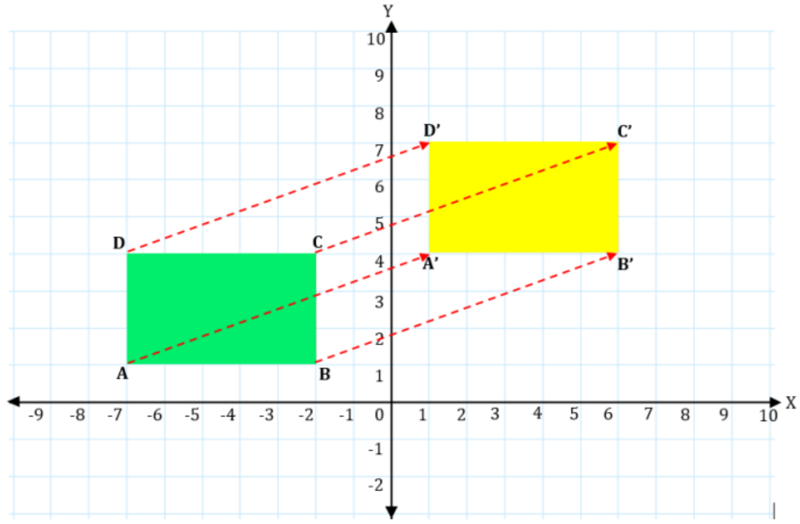


Gambar 3. Pergerakan Ayu dari Rumah ke Sekolah pada Bidang Kartesius
Sumber : Modul Pembelajaran SMA – Matematika Umum Kelas XI Kemdikbud

Posisi rumah Ayu berada pada koordinat $(3,2)$. Untuk menuju ke sekolah, Ayu harus berjalan ke arah barat sejauh 7 satuan atau bergeser 7 satuan ke kiri terhadap dari posisi rumahnya. Setelah itu, Ayu harus berjalan lagi ke arah selatan sejauh 5 satuan atau bergeser 5 satuan ke arah bawah. Jika kita melihat pada gambar di atas, posisi Ayu saat tiba di sekolah berada pada koordinat $(-4,-3)$ atau dapat ditulis :

$$\binom{3}{2} + \binom{-7}{-5} = \binom{-4}{-3}$$

Untuk memudahkan kita dalam memahami konsep translasi, mari perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 4. Contoh Translasi Bidang

Persegi panjang $A'B'C'D'$ merupakan bayangan dari persegi panjang $ABCD$ setelah ditranslasi sehingga diperoleh $AA' = BB' = CC' = DD'$.

- **Pergeseran 1 :**

  Posisi awal titik A berada di kooordinat $(-7,1)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisinya berubah menjadi $A'(1,4)$. Jika dinyatakan dalam bentuk perhitungan matematis menjadi :

$$\binom{-7}{1} + \binom{8}{3} = \binom{1}{4}$$

- **Pergeseran 2 :**

  Posisi awal titik B berada di kooordinat $(-2,1)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisinya berubah menjadi $B'(6,4)$. Jika dinyatakan dalam bentuk perhitungan matematis menjadi :

$$\binom{-2}{1} + \binom{8}{3} = \binom{6}{4}$$

- **Pergeseran 3 :**

  Posisi awal titik C berada di kooordinat $(-2,4)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisinya berubah menjadi $C'(6,7)$. Jika dinyatakan dalam bentuk perhitungan matematis menjadi :

$$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$

- **Pergeseran 4 :**

  Posisi awal titik D berada di kooordinat $(-7,4)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisinya berubah menjadi $D'(1,7)$. Jika dinyatakan dalam bentuk perhitungan matematis menjadi :

$$\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

Pergeseran setiap titik pada uraian di atas dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1.Translasi titik

Titik awal	Titik Akhir	Proses	Translasi
$A\,(-7,1)$	$A'(1,4)$	$\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$B(-2,1)$	$B'(6,4)$	$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$C(-2,4)$	$C'(6,7)$	$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$D(-7,4)$	$D'(1,7)$	$\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

Berdasarkan tabel di atas, dapat kita peroleh konsep :

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.

Titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x',y')$ ditulis dengan

$$A(x,y)\xrightarrow{T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Agar lebih memahami konsep translasi, berikut disajikan beberapa contoh soal.

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(2,3)$ ditranslasikan oleh $T(-3,4)$ maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan :

Pada soal diketahui koordinat titik $A(2,3)$ artinya $x = 2$ dan $y = 3$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ artinya $a = -3$ dan $b = 4$ sehingga dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

Substitusi nilai x, y, a dan b

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+(-3)\\3+4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

Lakukan proses penjumlahan pada matriks dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks yang seletak

Contoh Soal 2:

Tentukan persamaan bayangan garis $3x + 5y - 7 = 0$ oleh $T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$!

Pembahasan :

Pada soal diketahui persamaan garis $3x + 5y - 7 = 0$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ artinya $a = 2$ dan $b = -1$

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x + 5y - 7 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Substitusi nilaia dan b

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$$

Lakukan proses penjumlahan pada matriks dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks yang seletak

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = x + 2 \rightarrow x = x' - 2$

$y' = y - 1 \rightarrow y = y' + 1$

Substitusi $x = x' - 2$ dan $y = y' + 1$ ke persamaan garis $3x + 5y - 7 = 0$

$3(x' - 2) + 5(y' + 1) - 7 = 0$

$3x' - 6 + 5y' + 5 - 7 = 0$

$3x' + 5y' - 8 = 0$

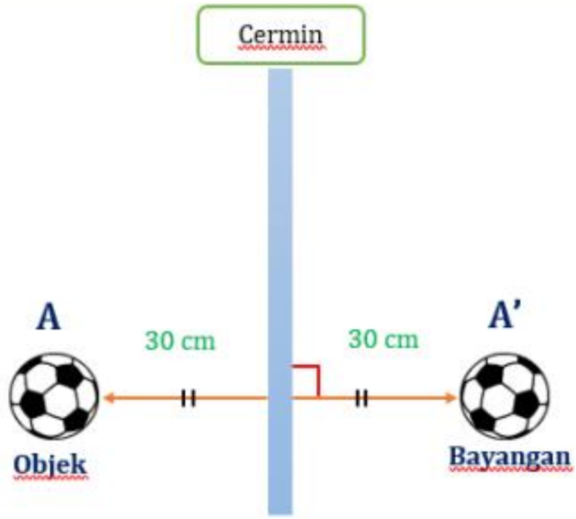
Jadi persamaan bayangan garis adalah $3x + 5y - 8 = 0$

c. Refleksi (Pencerminan)

Bercermin merupakan suatu kegiatan yang sering kita lakukan di dalam kehidupan kita sehari-hari. Tetapi pernahkah kita berpikir bagaimana bentuk bayangan yang dihasilkan pada cermin? Bagaimana jarak bayangan yang dihasilkan terhadap cermin? Mari simak ilustrasi berikut.

Ilustrasi 1

Terdapat sebuah bola yang diletakkan dihadapan cermin dengan jarak 30 cm. Bagaimana hasil refleksi bola terhadap cermin? Bagaimana jarak bayangan bola terhadap cermin ?



Gambar 5. Bola di Depan Cermin dengan Jarak 30 cm

Pada gambar di atas terlihat bahwa bayangan yang dihasilkan tetap berupa bola. Jika dimisalkan bola sebagai titik A dan bayangannya sebagai titik A', maka jarak titik A ke cermin sama dengan jarak titik A' ke cermin, yaitu 30 cm. Selain itu, jika titik A dan A' dihubungkan, maka garis AA' akan tegak lurus terhadap cermin.

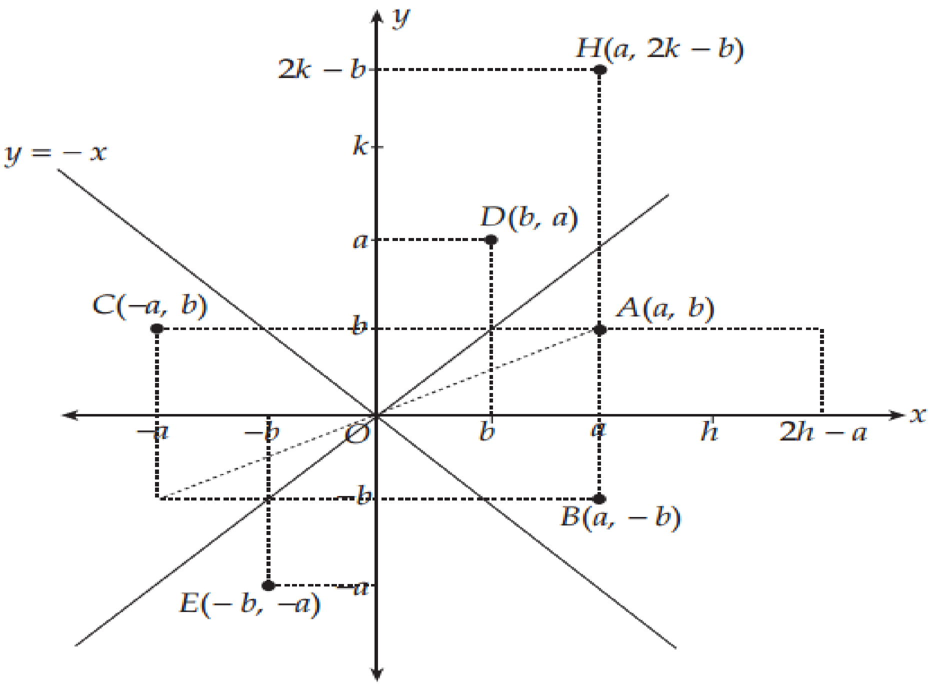
Berdasarkan ilustrasi di atas, berikut konsep refleksi secara umum dan sifat-sifat yang terbentuk.

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin. Refleksi disimbolkan dengan M_a dengan a merupakan sumbu cermin.

Sifat-sifat Refleksi:

1. Jarak dari titik asal ke cermin sama dengan jarak cermin ke titik bayangan
2. Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan tegak lurus terhadap cermin
3. Garis-garis yang terbentuk antara titik-titik asal dengan titik-titik bayangan akan saling sejajar

Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 6. Bayangan Sebuah Titik yang Dicerminkan terhadap Garis atau Titik Lain

Dari gambar di atas terlihat bahwa :

- Jika titik $A(a,b)$ terhadap sumbu-x menghasilkan bayangan titik $A'(a,-b)$ dengan matriks pencerminan $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

- Jika titik $A(a,b)$ terhadap sumbu-y menghasilkan bayangan titik $A'(-a,b)$ dengan matriks pencerminan $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
- Jika titik $A(a,b)$ terhadap titik asal $O(0,0)$ menghasilkan bayangan titik $A'(-a,-b)$ dengan matriks pencerminan $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.
- Jika titik $A(a,b)$ terhadap garis $y=x$ menghasilkan bayangan titik $A'(b,a)$ dengan matriks pencerminan $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
- Jika titik $A(a,b)$ terhadap garis $y=-x$ menghasilkan bayangan titik $A'(-b,-a)$ dengan matriks pencerminan $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.
- Jika titik $A(a,b)$ terhadap garis $x=h$ menghasilkan bayangan titik $A'(2h-a,b)$.
- Jika titik $A(a,b)$ terhadap garis $y=h$ menghasilkan bayangan titik $A'(a,2k-b)$.

Secara umum, rumus hasil refleksi suatu titik dapat dilihat pada Tabel 2 di bawah ini.

Tabel 2. Rumus Refleksi Suatu Titik

efleksi	Titik Bayangan	Persamaan Matriks Transformasi
Sumbu X	$A'(x,-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
Sumbu Y	$A'(-x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
Titik asal O (0,0)	$A'(-x,-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
Garis $y=x$	$A'(y,x)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
Garis $y=-x$	$A'(-y,-x)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
Garis $x=h$	$A'(2h-x,y)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2h\\ 0\end{pmatrix}$
Garis $y=k$	$A'(x,2k-y)$	$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2k\end{pmatrix}$

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(-5,4)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka bayangan titik P adalah

$$P(-5,4) \xrightarrow{M_{y=-x}} P'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(-4,5)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $g: 4x - 3y + 11 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $4x - 3y + 11 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=-x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -y \rightarrow y = -x'$$

$$y' = -x \rightarrow x = -y'$$

Substitusi $x = -y'$dan$y = -x'$ ke persamaan garis l

$$4x - 3y + 11 = 0$$

$$4(-y') - 3(-x') + 11 = 0$$

$$-4y' + 3x' + 11 = 0$$

$$3x' - 4y' + 11 = 0$$

$$3x - 4y + 11 = 0$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $3x - 4y + 11 = 0$

d. Rotasi (Perputaran)

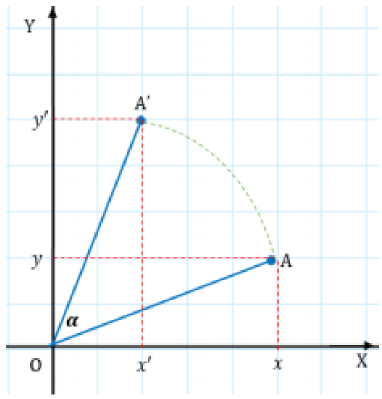
Komedi putar, gangsing, kipas angin, dan jarum jam merupakan beberapa contoh objek yang bergerak dengan berputar. Ketika bermain, gangsing dapat diputar serah jarum jam ataupun berlawanan arah jarum jam dengan pusat tertentu. Dalam matematika, proses memutar gangsing termasuk dalam rotasi. **Rotasi** adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu. Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :

- Titik pusat rotasi
- Besar sudut rotasi
- Arah sudut rotasi

Sudut rotasi merupakan sudut antara garis yang menghubungkan titik asal dan pusat rotasi yang menghubungkan titik bayangan dan pusat rotasi. Jika arah rotasi diputar searah jarum jam, maka besar sudut rotasi negatif $(-\alpha)$. Jika arah rotasi diputar berlawanan jarum jam, maka besar sudut rotasi positif (α). Rotasi dinotasikan dengan $R(P,\alpha)$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.

- Rotasi terhadap titik pusat $(0,0)$

  Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 7. Rotasi terhadap titik *(0,0)*

Misalkan terdapat sebuah titik $A(x,y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat $(0,0)$ dan akan menghasilkan titik $A'(x',y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

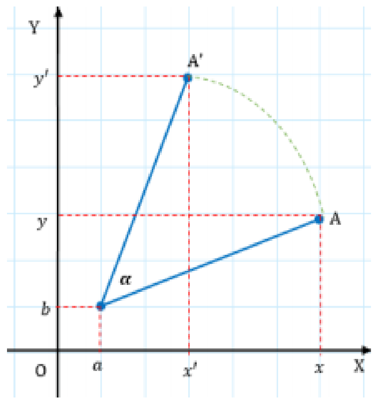
$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),\alpha]}} A'(x',y')$$

Titik (x,y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat $(0,0)$ menghasilkan bayangan titik (x',y') dengan aturan

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

- Rotasi terhadap titik (a,b)

  Untuk memahami rotasi terhadap titik (a,b), maka perhatikanlah gambar di bawah ini.



Gambar 8. Rotasi terhadap titik *(a,b)*

Misalkan terdapat sebuah titik $A(x, y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat (a, b) dan akan menghasilkan titik $A'(x', y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[(a,b),\alpha]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $C(3, 1)$ jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar $90°$ dan berpusat $(2, 4)$!

Pembahasan :

Koordinat titik $C(3, 1)$ akan dirotasikan $R_{[(2,4),90°]}$

$$C(3, 1) \xrightarrow{R_{[(2,4),90°]}} C'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(4, 5)$

Contoh Soal 2:

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar $180°$ terhadap titik pusat $(1, 2)$. Persamaan garis hasil rotasi adalah ...

Pembahasan :

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[(1,2),180°]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(x-1) \\ -1(y-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1+2 \\ -y+2+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 \\ -y+4 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x + 3 \rightarrow x = 3 - x'$$
$$y' = -y + 4 \rightarrow y = 4 - y'$$

Substitusi $x = 3 - x'$ dan $y = 4 - y'$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

$$3(3 - x') - 4(4 - y') + 12 = 0$$
$$9 - 3x' - 16 + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 9 - 16 + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 5 = 0$$
$$-3x + 4y + 5 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 5 = 0$

e. Dilatasi (Perkalian)

Pernahkah kalian mencetak foto atau pasfoto? Biasanya ketika mencetak pasfoto kita diminta menyebutkan menyebutkan ukuran seperti 2×3, 3×4 ataupun 4×6. Mencetak pasfoto dalam berbagai ukuran yaitu memperbesar atau memperkecil merupakan salah satu contoh dilatasi dalam kehidupan sehari-hari. **Dilatasi** adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat dilatasi.

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap sudat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

- Dilatasi terhadap Titik Pusat $(0,0)$

  Dilatasi titik A terhadap titik pusat $(0,0)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

  $$A(x,y) \xrightarrow{D_{[0,k]}} A'(x',y')$$

  Titik (x,y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0,0)$ menghasilkan bayangan titik (x',y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

  $$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

- Dilatasi terhadap Titik (a,b)

  Dilatasi titik A terhadap titik (a,b) dapat dituliskan sebagai berikut.

  $$A(x,y) \xrightarrow{D_{[(a,b),k]}} A'(x',y')$$

  Titik (x,y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (a,b) menghasilkan bayangan titik (x',y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

  $$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $A(-5, 2)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $(3, 4)$ dan faktor skala -3 !

Pembahasan:

Titik $A(-5, 2)$ akan didilatasikan oleh $D_{[(3,4),-3]}$ dapat ditulis

$$A(-5,2) \xrightarrow{D_{[(3,4),-3]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+3 \\ 6+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D_{[(3,4),-3]}$ adalah $A'(27, 10)$

4. Rangkuman

a. Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.

b. Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ dan bentuk persamaan matriksnya menjadi :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

c. $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ merupakan komponen translasi, a merupakan pergeseran secara horizontal dan b merupakan pergeseran secara vertikal.

d. Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin. Refleksi disimbolkan dengan M_a dengan a merupakan sumbu cermin.

e. Sifat-sifat refleksi antara lain :

- Jarak dari titik asal ke cermin sama dengan jarak cermin ke titik bayangan.
- Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan tegak lurus terhadap cermin.
- Garis-garis yang terbentuk antara titik-titik asal dengan titik-titik bayangan akan saling sejajar.

f. Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.

g. Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :
   - Titik pusat rotasi
   - Besar sudut rotasi
   - Arah sudut rotasi

h. Rotasi dinotasikan dengan $R(P, \alpha)$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.

i. Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat dilatasi.

j. Dilatasi dinotasikan dengan $D(P, k)$ dimana P merupakan pusat dilatasi dan k merupakan faktor skala.

5. Tugas Terstruktur

Untuk memperdalam penguasaan materi terkait Transformasi Geometri, kerjakanlah tugas berikut sebagai bentuk latihan lanjutan.

Soal :

a. Tentukan hasil translasi setiap titik berikut!
   - $A(2, -3)$ oleh $T(4, -2)$
   - $B(-3,4)$ oleh $T_1(2,4)$ dilanjutkan $T_2(6, -2)$

b. Tentukan hasil refleksi setiap titik berikut!
   - Refleksi titik $A(3, -4)$ terhadap sumbu Y

- Refleksi titik $B(-2,-1)$ terhadap garis $x = 3$

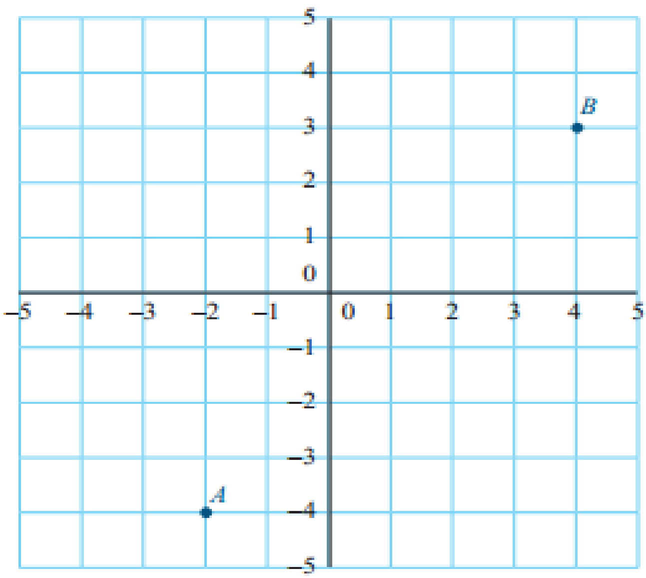
c. Garis $k: 3x - 2y + 6 = 0$ dirotasikan sebesar 180° terhadap titik pusat $(1,-2)$. Tentukan hasil rotasi garis k.

d. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik sudut di $A(6,12), B(-9,3)$ dan $C(6,-6)$. Gambarlah bayangan hasil transformasinya jika diketahui segitiga tersebut didilatasi dengan menggunakan faktor skala $\frac{1}{3}$ dengan pusat titik asal kemudian dirotasi $90°$ searah jarum jam yang berpusat di titik asal.

6. Forum Diskusi

Persoalan :

Seorang bajak laut sedang berburu harta karun. Sang asisten ingin membantu bajak laut untuk mendapatkan harta karun tersebut. Berdasarkan peta yang mereka dapatkan, diketahui bahwa lokasi harta karun berada pada titik B, sedangkan posis bajak laut dan asistennya saat ini di titik *A*. Dengan menggunakan transformasi berikut ini, maka bajak laut akan menemukan harta karun yang dicarinya. Akan tetapi tidak semua transformasi di bawah ini dapat digunakan dengan tepat untuk membantu sang bajak laut. Jika kamu menjadi asisten, langkah-langkah transformasi apa saja yang akan kamu lakukan? Gunakan masing-masing transformasi berikut ini tepat satu kali dan buatlah gambarnya.



a. Rotasi 180° searah jarum jam yang berpusat di titik asal.
b. Pencerminan terhadap sumbu-y.
c. Pencerminan terhadap sumbu-x.
d. Rotasi $90°$ berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal.
e. Translasi 1 langkah ke atas.
f. Translasi 2 langkah ke kanan dan 2 langkah ke bawah.

Setelah kamu selesai menggambar sketsa pencarian harta karun di atas, selanjutnya diskusikanlah hasil yang telah kamu dapatkan dengan temanmu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, dan bagikanlah hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

C. PENUTUP

1. Tes Formatif

Pilihlah jawaban yang paling benar.

1. Diketahui titik $P'(3,-13)$ adalah bayangan titik P oleh translasi $T = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix}$. Koordinat titit P adalah ….

   A. $(13,-20)$
   B. $(13,-4)$
   C. $(4,20)$
   D. $(-5,-4)$
   E. $(-5,-20)$

2. Bayangan titik $P(a,b)$ oleh rotasi terhadap titik pusat $O(0,0)$ sebesar $-90°$ adalah $P'(-10,-2)$. Nilai $a+2b$ = ….

   A. -18
   B. -8
   C. 8
   D. 18
   E. 22

3. Bayangan titik A dengan $A(-1,4)$ jika direfleksikan terhadap garis $y = -x$ adalah ….

   A. $A'(4,1)$
   B. $A'(-4,1)$
   C. $A'(4,-1)$
   D. $A'(4,3)$
   E. $A'(-4,-1)$

4. Bayangan titik $P(5,4)$ jika didilatasikan terhadap pusat $(-2,-3)$ dengan faktor skala -4 adalah ….

   A. $(-30,-31)$
   B. $(-30,7)$
   C. $(-26,-1)$
   D. $(-14,-1)$
   E. $(-14,-7)$

5. Titik $B(3,2)$ dirotasikan sebesar $90°$ terhadap titik pusat $P(-1,1)$. Bayangan titik B adalah ….

A. $(-4,3)$
B. $(-2,1)$
C. $(-1,2)$
D. $(1,4)$
E. $(2,5)$

6. Bayangan titik $B(4,8)$ direfleksikan terhadap sumbu X, kemudian dilanjutkan dengan dilatasi $|O,\frac{1}{2}|$ adalah ….
A. $(-2,4)$
B. $(2,-4)$
C. $(8,-2)$
D. $(-8,4)$
E. $(-8,-4)$

7. Diketahui koordinat titik $T(-1,5)$. Bayangan titik T oleh transformasi yang diwakili oleh matriks $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, dilanjutkan refleksi terhadap garis $x = 8$ adalah ….
A. $T'(30,-7)$
B. $T'(19,23)$
C. $T'(19,-22)$
D. $T'(3,-7)$
E. $T'(-3,-7)$

8. Bayangan garis $3x - y + 2 = 0$ apabila dicerminkan terhadap garis $y = x$ dan dilanjutkan dengan rotasi sebesar $90°$ dengan pusat $(0,0)$ adalah ….
A. $3x + y + 2 = 0$
B. $3x + y - 2 = 0$
C. $-3x + y + 2 = 0$
D. $-x + 3y + 2 = 0$
E. $x - 3y + 2 = 0$

9. Sebuah mesin fotokopi dapat membuat salinan gambar/tulisan dengan ukuran berbeda, Suatu gambar persegi panjang difotokopi dengan setelan tertentu. Jika setelan tersebut dapat disamakan dengan proses transformasi terhadap matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, kemudian didilatasi dengan titik

pusat (0,0) dan faktor skala 3, maka luas gambar persegi panjang itu akan menjadi … kali dari luas semula.

A. 12
B. 18
C. 24
D. 30
E. 36

10. Segitiga ABC dengan titik $A(-2,3), B(2,3)$, dan $C(0,-4)$ didilatasi dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor skala 4. Luas segitiga setelah didilatasi adalah ….

A. 120
B. 224
C. 240
D. 280
E. 480

2. Kunci Jawaban

1. A	**3. B**	**5. E**	**7. E**	**9. B**
2. A	**4. A**	**6. B**	**8. B**	**10. B**

3. Daftar Pustaka

- Subchan, dkk. 2018. *Matematika SMP/MTs Kelas IX*. Jakarta: Kemdikbud.
- Junaedi, Iwan. 2019. *Pendalaman Materi Matematika – Modul 1 Geometri*. Jakarta: Kemdikbud.
- Istiqomah. 2020. *Modul Pembelajaran SMA Kelas XI Matematika Umum – Transformasi Geometri*. Jakarta: Kemdikbud.
- Guryadi dkk. *Modul Pembelajaran Jarak Jauh pada Masa Pendemi COVID untuk Jenjang SMP Kelas IX – Semester Gasal*. Jakarta: Kemdikbud.
- http://repositori.kemdikbud.go.id/5916/1/Matematika%20SMP%20KK%20G%20signed.pdf. Diakses pada tanggal 22 Juli 2021.