

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN LURING

RPP 2

Sekolah : SMA N 1 PONOROGO
Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
Kelas/Semester : XI/Ganjil
Materi Pokok : Trigonometri Analitik
(Rumus Jumlah dan Selisih Sudut)
Alokasi Waktu : 2 Jam Pelajaran @45 Menit

A, Kompetensi Inti (KI)

- KI-3 : Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
- KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

B, Kompetensi Dasar dan Indikator

3.1 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

Indikator:

- Menemukan rumus jumlah dan selisih sinus, kosinus, dan tangen.

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

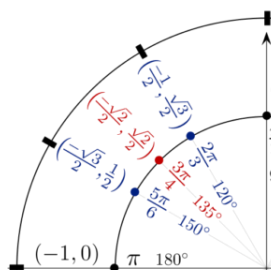
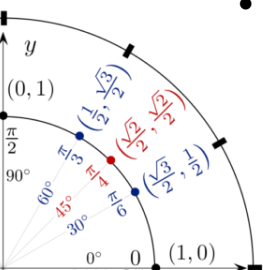
Indikator:

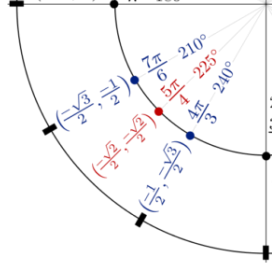
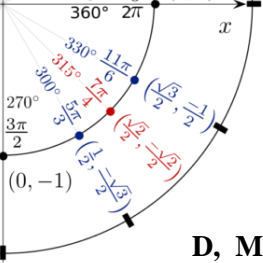
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih.

C, Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti proses pembelajaran **bersama** guru serta **aktif** dalam **berdiskusi** dan **bekerja sama** dalam menyelesaikan masalah yang diberikan dengan teman sekelompok, peserta didik diharapkan dapat:

- Menemukan rumus jumlah dan selisih sinus, kosinus, dan tangen..
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih.





D, Materi Pembelajaran

- **Materi Faktual**

Menghubungkan materi trigonometri dengan kehidupan nyata dan dengan disiplin ilmu yang lain

- **Materi Konseptual**

- ✓ Rumus jumlah dan selisih sinus
- ✓ Rumus jumlah dan selisih kosinus
- ✓ Rumus jumlah dan selisih tangen

- **Materi Prosedural**

- Langkah-langkah yang digunakan dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut.

- **Materi Pembelajaran Pengayaan**

- ✓ Soal-soal pengembangan dan soal HOTS.
- ✓ Soal-soal untuk penggemar matematika (buku paket)

- **Materi Pembelajaran Remedial**

- ✓ Materi konseptual yang belum tuntas.

E, Metode Pembelajaran

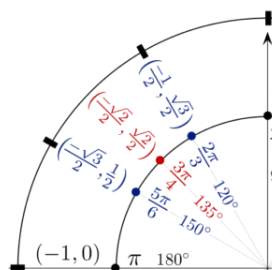
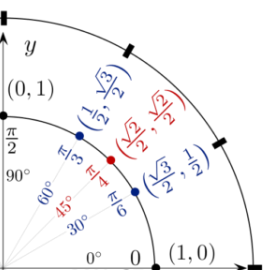
- Diskusi, Tanya Jawab dan Ceramah.
- Latihan soal mandiri, dengan prinsip “witing iso jalaran soko kulino”.

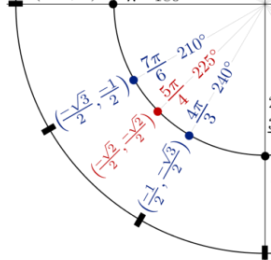
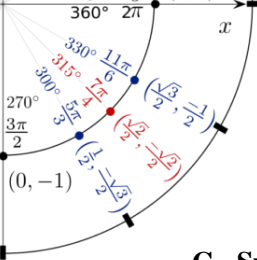
F, Media dan Alat Pembelajaran

- **Media :**

- ✓ <https://youtube.com/playlist?list=PL778ACAD0014B225D> (Video)
- ✓ <https://youtube.com/playlist?list=PLE39nSDxvPXdxcuEUHlumPUZ7frDy4SU> (video)
- ✓ <https://jtrigono> (media interaksi ppt, media dalam bentuk online agar memudahkan siswa mengaksesnya dan mempelajarinya secara mandiri)

- **Alat** : Spidol, White Board, Laptop, Tablet dan Ponsel pintar.



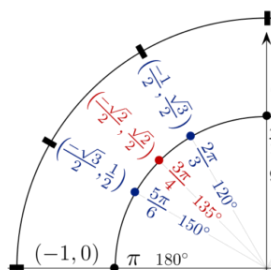
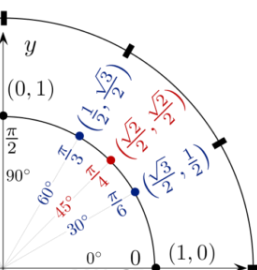


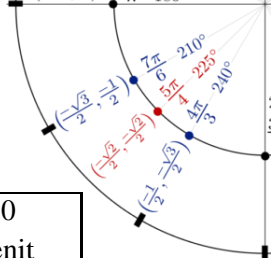
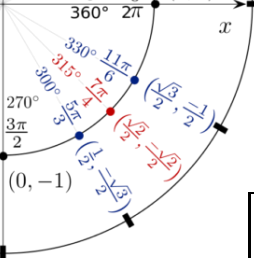
G, Sumber Belajar

- Cetak
 - ✓ Sukino, *Matematika untuk SMA/MA kelas XI (kelompok Peminatan)*, Erlangga, 2017. (Masing-masing siswa mendapat pinjaman dari perpustakaan sekolah. Salinan berupa soft file dapat dibuka di link berikut: <https://drive.google.com/drive/folders/13hgRCCWbXIGh2SDWWjYve1FIJwkkmvXN?usp=sharing>)
 - ✓ Aksin, Nur, dkk. *Matematika untuk SMA/MA Peminatan (LKS)*, Intan Pariwara, 2019. (salinan berupa soft file dapat dibuka di link berikut: <https://drive.google.com/drive/folders/13hgRCCWbXIGh2SDWWjYve1FIJwkkmvXN?usp=sharing>)
 - ✓ Bahan Ajar (terlampir)
- Online
 - ✓ <https://smatika.blogspot.com/2017/08/rumus-trigonometri-jumlah-dan-selisih.html>
 - ✓ <https://edumatik.net/rumus-jumlah-dan-selisih-dua-sudut-trigonometri/>
 - ✓ <https://khairulfaiq.files.wordpress.com/2011/11/jumlah-dan-selisih-dua-sudut1.pdf>
 - ✓ <https://www.slideshare.net/BocahXotc/bahan-ajar-kd-14-trigonometri-sinus-jumlah-dan-selisih-dua-sudut>
 - ✓ <https://matikzone.wordpress.com> (pembuktian rumus-rumus)

H, Langkah-Langkah Pembelajaran

| Kegiatan | Deskripsi Kegiatan | Alokasi waktu |
|----------------------|--|---------------|
| Kegiatan Pendahuluan | <ol style="list-style-type: none"> 1. Guru bersama peserta didik saling memberi dan menjawab salam serta berdoa untuk mengawali kegiatan. 2. Guru mengecek kehadiran siswa. 3. Peserta didik menyimak apersepsi dari guru tentang pelajaran sebelumnya dan mengaitkan dengan pengalamannya sebagai bekal pelajaran berikutnya. 4. Peserta didik bertanya jawab dengan guru berkaitan dengan materi sebelumnya (kolaborasi - menanya) 5. Guru memberikan motivasi agar memperbanyak latihan soal, karena kita akan bisa jika terbiasa, latihan. | 10 menit |

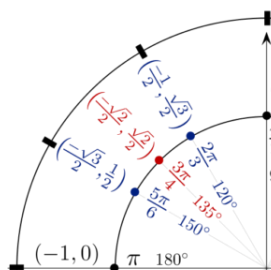
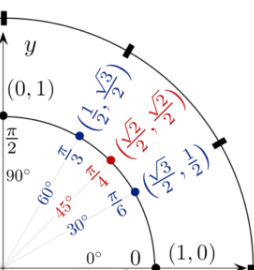


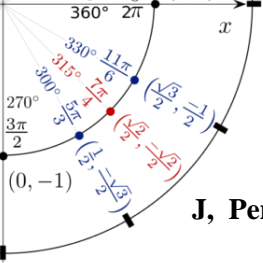


| | | |
|-------------------------|---|---------------------|
| <p>Kegiatan Inti</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. Peserta didik menyimak penjelasan guru tentang semua kegiatan yang akan dilakukan dan tujuan kegiatan belajar serta motivasi yang disampaikan guru (komunikasi) 2. Guru membentuk kelompok diskusi. 3. Peserta didik diberi motivasi dan panduan untuk melihat, mengamati, membaca dan menuliskannya kembali. Mereka diberi LKPD, tayangan video youtube dan bahan bacaan terkait materi jumlah dan selisih 2 sudut. (literasi) 4. Peserta didik membuka dan mempelajari secara mandiri atau bersama kelompok media pembelajaran yang diberikan guru melalui link. (literasi) 5. Guru memberikan kesempatan untuk mengidentifikasi sebanyak mungkin hal yang belum dipahami. Pertanyaan ini harus tetap berkaitan dengan materi sudut rangkap dan sudut paruh dengan cara memberikan kuis/latihan soal. (berpikir kritis) 6. Peserta didik diminta mendiskusikan materi jumlah dan selisih 2 sudut yang dipelajari dengan teman kelompoknya, jika ditemui hal-hal yang tidak dimengerti atau ada kesulitan dalam mengisi LKPD peserta didik dipersilakan bertanya.(kolaborasi) | <p>50 menit</p> |
| <p>Kegiatan Penutup</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. Peserta didik membuat rangkuman/simpulan pelajaran tentang point-point penting yang muncul dalam kegiatan pembelajaran yang telah dilakukan (kreatifitas) 2. Peserta didik menyampaikan hasil diskusinya bersama kelompok dan menerima tanggapan kelompok lain jika ada. (Komunikasi, Menerima pendapat orang lain) 3. Peserta didik dipersilakan bertanya jika masih ada yg belum jelas. 4. Peserta didik mengerjakan kuis atau latihan soal. 5. Guru dan peserta didik saling member salam kemudian berdoa untuk mengakhiri kegiatan pembelajaran. | <p>20 menit</p> |

I, Penilaian Hasil Pembelajaran

- Penilaian pengetahuan berupa tes tertulis pilihan ganda dan tertulis uraian, tugas dan latihan soal.
- Penilaian keterampilan diantaranya ketepatan waktu menyelesaikan tugas, kerapian jawaban, dll.
- Penilaian sikap bisa berupa respon peserta didik selama pembelajaran tatap muka terbatas, keaktifan dikelas, dll.

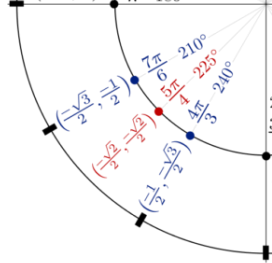




J, Pembelajaran Remedial

Berdasarkan hasil analisis Penilaian Harian, peserta didik yang belum mencapai ketuntasan belajar diberi kegiatan pembelajaran remedial dalam bentuk,

- Bimbingan perorangan jika peserta didik yang belum tuntas $\leq 20\%$
- Belajar kelompok jika peserta didik yang belum tuntas antara 20% dan 50%
- Pembelajaran ulang jika peserta didik yang belum tuntas $\geq 50\%$



K, Pembelajaran Pengayaan

Berdasarkan hasil analisis Penilaian Harian, peserta didik yang telah mencapai ketuntasan belajar diberi kegiatan pengayaan dalam bentuk latihan soal-soal yang berbeda dari soal-soal harian sebelumnya.

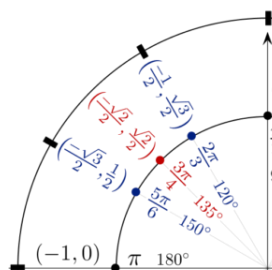
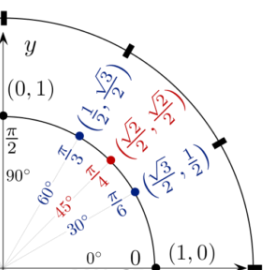
Mengetahui
Kepala Sekolah

Agus Prasmono, M.Pd
NIP. 19660516 198903 1 006

Ponorogo, 15 Juli 2020

Guru Mata Pelajaran

Anang Wibowo, S.Pd
NIP.



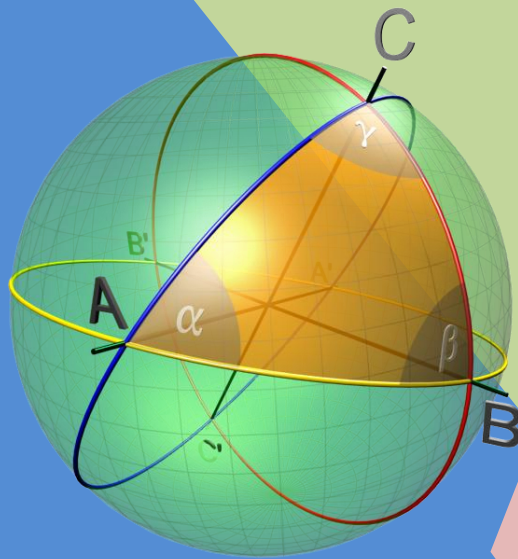
Lampiran 1

LKPD

Lembar Kegiatan Peserta Didik

Trigonometri

Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

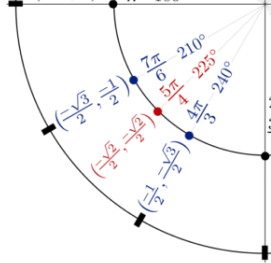
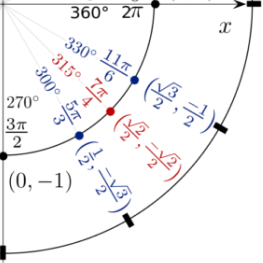


Oleh:

Anang Wibowo, S.Pd

Mahasiswa PPG Dalam Jabatan 2020 Angkatan 1

LPTK Universitas PGRI Madiun (UNIPMA)



Lembar Kegiatan Peserta Didik

Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Nama Siswa :
 Kelas :
 Semester/TP :

A. Kompetensi Inti (KI)

- KI-3 : Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
- KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

Indikator:

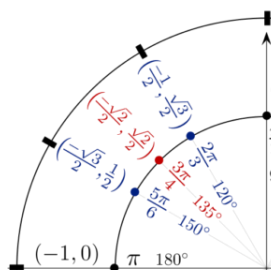
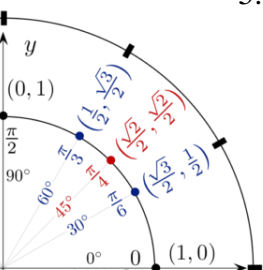
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih dua sudut.

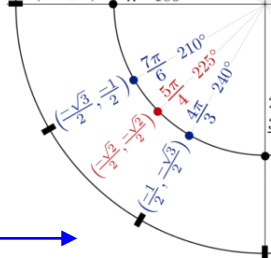
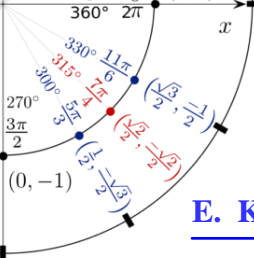
C. Tujuan Kegiatan

Setelah mengikuti pembelajaran daring dengan Google Classroom diharapkan peserta didik mampu menurunkan rumus jumlah dan selisih dua sudut kemudian menggunakannya dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus tersebut dengan teliti dan benar.

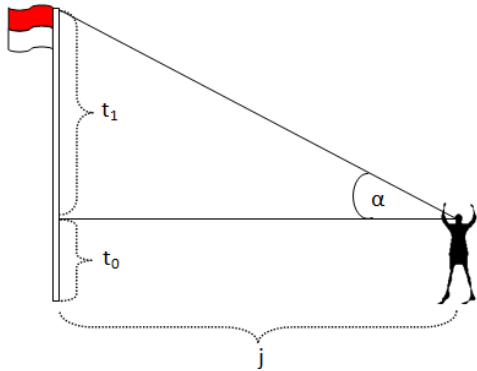
D. Petunjuk Kegiatan

1. Mulailah belajar dengan niat ikhlas menuntut ilmu dan berdoa.
2. Isilah data diri kalian dengan benar.
3. Baca dan cermati perintah dalam LKPD ini dengan seksama.
4. Isilah bagian-bagian yang kosong.
5. Jika ada kesulitan, diskusikan dengan teman kalian.





E. Kegiatan Peserta Didik



Dulu di kelas X kalian sudah mempelajari nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran I. Dengan rumus sudut berelasi ataupun bantuan grafik, juga sudah bisa menentukan nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV. Salah satu aplikasi dari trigonometri adalah untuk mengukur tinggi suatu benda, mengukur jarak kapal pada materi jurusan tiga angka, dan lain-lain.

Ada pertanyaan, apakah ada sudut-sudut lainnya selain sudut-sudut istimewa 0° , 30° , 45° , 60° , dan 90° yang bisa kita cari nilai trigonometrinya tanpa menggunakan alat bantu semisal tabel trigonometri dan kalkulator? Bisakah kita menentukan nilai trigonometri untuk sudut 15° , 75° , dan yang lainnya?

Pada materi ini kita akan mempelajari bagaimana menemukan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut kemudian menggunakan rumus tersebut dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan jumlah dan selisih dua sudut.

Penguasaan materi [perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku](#) dan [perbandingan trigonometri sudut berelasi](#) akan sangat membantu dalam mempelajari materi ini.

Berikut beberapa sudut relasi yang digunakan :

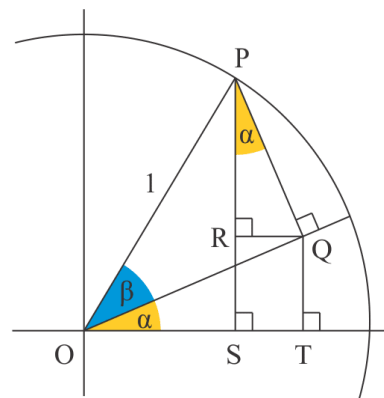
$$\begin{array}{ll} \sin(90^{\circ} - \theta) = \cos \theta & \cos(180^{\circ} - \theta) = -\sin \theta \\ \cos(90^{\circ} - \theta) = \sin \theta & \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \sin(180^{\circ} - \theta) = \sin \theta & \cos(-\theta) = \cos \theta \end{array}$$

sin (α + β) dan sin (α - β)

Perhatikan gambar di bawah, kemudian lengkapilah bagian-bagian penurunan rumus dibawahnya yang masih kosong!

Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Titik P terletak pada lingkaran sehingga $OP = 1$.

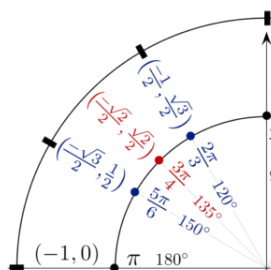
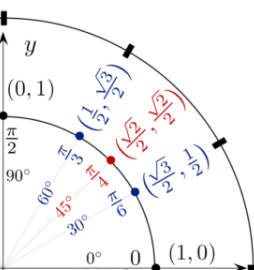
$$\begin{aligned} \angle POS &= \alpha + \beta \\ \angle QOT &= \angle OQR = \angle QPR = \alpha \end{aligned}$$

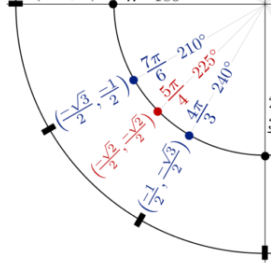
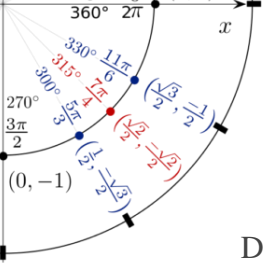


Dari segitiga OPS diperoleh

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\dots}{\dots} = PS$$

$PS = \dots + PR$ dan $RS = QT$, dapat kita tulis $PS = QT + PR$, akibatnya $\sin(\alpha + \beta) = QT + PR \dots\dots\dots(1)$





Dari segitiga OPQ diperoleh
 $\dots = \sin \beta$
 $OQ = \cos \beta$

Dari segitiga OQT dipeoleh

$$\sin \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$QT = \sin \alpha \times \dots$$

$$QT = \sin \alpha \times \cos \beta \dots \dots \dots (2)$$

Dari segitiga PQR diperoleh

$$\cos \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$PR = \cos \alpha \times PQ$$

$$PR = \cos \alpha \times \dots \dots \dots (3)$$

Dari (1), (2) dan (3) kita dapatkan

$$\sin(\alpha + \beta) = QT + PR$$

$$= \sin \alpha \times \dots + \dots \times \sin \beta$$

Jika β diganti dengan $-\beta$, maka

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \sin \alpha \dots + \cos \alpha \dots$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi sinus sebagai berikut :

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots + \dots$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots - \dots$$

Silakan simak video dibawah dengan men-scan atau klik QR Code



Penjabaran Sinus



Penjabaran Cosinus



Penjabaran Tangen



Soal-soal

cos (α + β) dan cos (α - β)

Rumus cos (α + β) dan cos (α - β) dapat kita tentukan dengan cara yang hampir sama seperti rumus sinus diatas. Namun, karena rumus sinus sudah kita peroleh, akan lebih mudah jika kita gunakan konsep sudut relasi kuadran I.

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta))$$

$$= \sin((90^\circ - \alpha) - \beta)$$

$$= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta$$

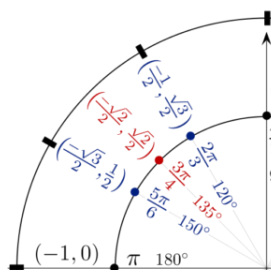
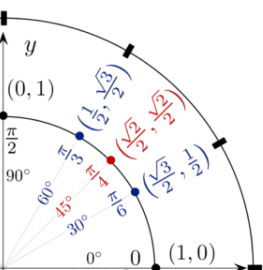
$$= \dots \cos \beta - \dots \sin \beta$$

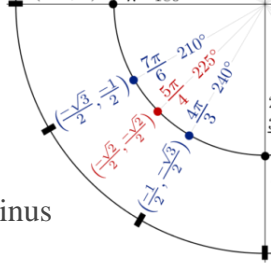
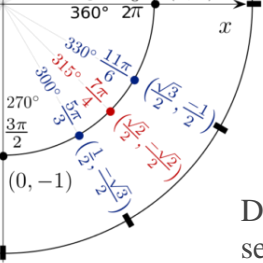
Jika β diganti dengan $-\beta$, maka

$$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \cos \alpha \dots - \sin \alpha \dots$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \dots$$





Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi cosinus sebagai berikut

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

tan (α + β) dan tan (α - β)

Berdasarkan identitas rasio $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, kita bisa menurunkan rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk tangen, yaitu

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan $\cos \alpha \cos \beta$

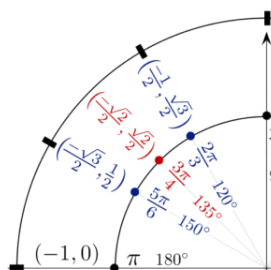
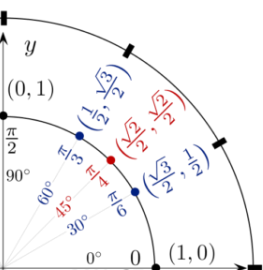
Jika β diganti dengan -β, maka

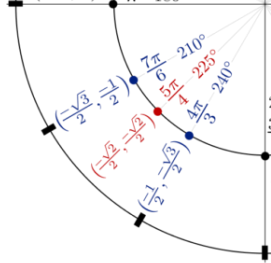
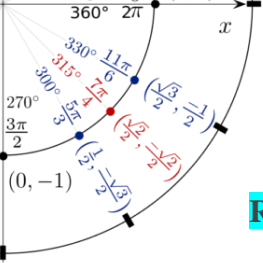
$$\begin{aligned} \tan(\alpha + (-\beta)) &= \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi tangen sebagai berikut.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$





Rangkuman

Dari kegiatan yang sudah kalian kerjakan di atas, silakan tuliskan atau rangkum kembali rumus-rumus yang telah kalian dapatkan.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

Contoh Soal

1. Tentukan nilai eksak dari $\sin 75^\circ$

Jawab :

$$\begin{aligned}
 \sin 75^\circ &= \sin (30^\circ + 45^\circ) \\
 &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{2} + \frac{1}{4} \sqrt{6} \\
 &= \frac{1}{4} (\sqrt{2} + \sqrt{6})
 \end{aligned}$$

2. Diketahui $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ dan $\sin \beta = \frac{5}{13}$. Jika α adalah sudut lancip dan β sudut tumpul, tentukan nilai dari $\sin (\alpha - \beta)$!

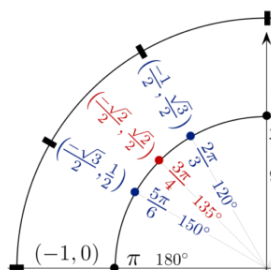
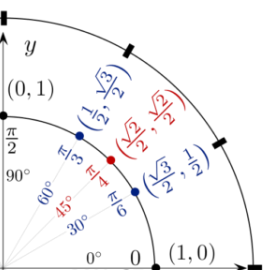
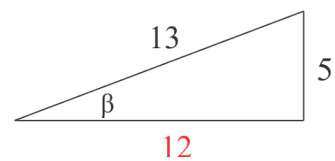
Jawab :

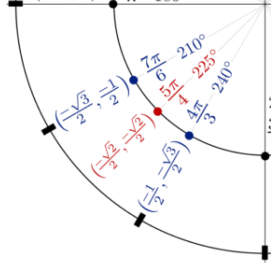
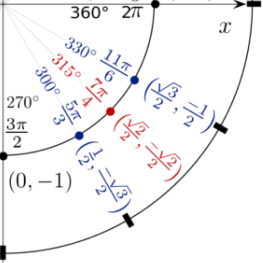
α lancip berarti α berada di kuadran I dan β tumpul berarti β berada di kuadran II

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$\sin \alpha$ bernilai positif karena α berada di kuadran I.

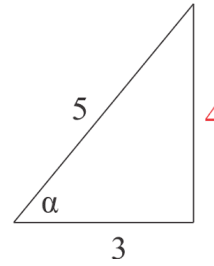
$$\sin \beta = \frac{5}{13} \rightarrow \cos \beta = -\frac{12}{13}$$





$\cos \beta$ bernilai negatif karena β berada di kuadran II.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} \\ &= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} \\ &= -\frac{63}{65} \end{aligned}$$



3. Segitiga PQR siku-siku di P. Jika $\cos(P + Q) = \frac{2}{3}$, tentukan nilai $\sin Q + \cos R$!

Jawab :

Karena sudut P siku-siku, maka $P = 90^\circ$

$$\cos(P + Q) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos(90^\circ + Q) = \frac{2}{3}$$

$$\cos 90^\circ \cos Q - \sin 90^\circ \sin Q = \frac{2}{3}$$

$$0 \cdot \cos Q - 1 \cdot \sin Q = \frac{2}{3}$$

$$0 - \sin Q = \frac{2}{3}$$

$$\sin Q = -\frac{2}{3}$$

$$P + Q + R = 180^\circ \rightarrow 90^\circ + Q + R = 180^\circ$$

$$R = 90^\circ - Q$$

$$\cos R = \cos(90^\circ - Q) = \sin Q$$

$$\text{diperoleh } \cos R = \sin Q = -\frac{2}{3}$$

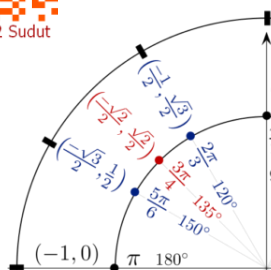
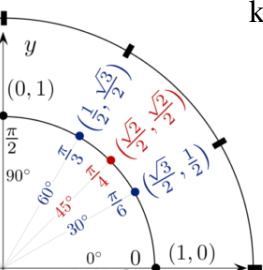
$$\text{Jadi, } \sin Q + \cos R = -\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

F. Latihan Soal

Berikut soal-soal yang bisa kalian coba untuk melihat sejauh mana kalian menguasai materi ini. Sering-seringlah latihan soal, jika kurang silakan mengambil dari berbagai sumber lainnya baik yang cetak maupun digital dan online. Ingat, tidak ada ceritanya orang merugi karena banyak latihan... Untuk mencoba latihan soal online, kalian bisa scan atau klik QR Code di samping. Selamat mencoba...



Quis Jumlah Selisih 2 Sudut



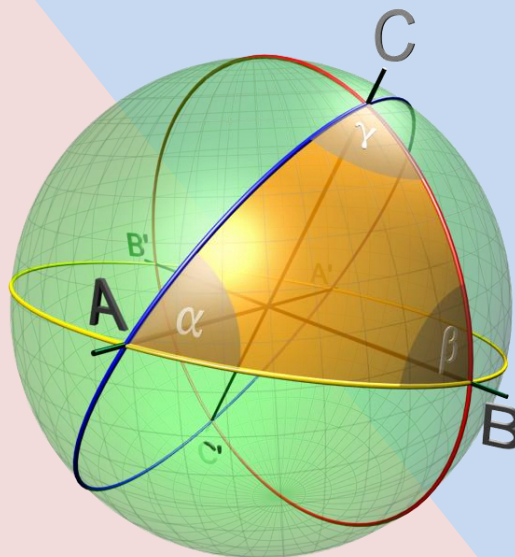
Lampiran 2

Bahan Ajar

Trigonometri 2

Matematika Peminatan SMA/MA

Kelas XI

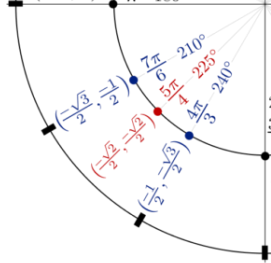
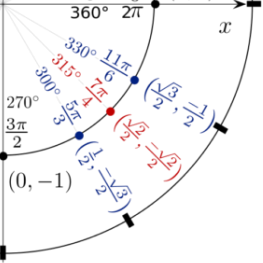


Oleh:

Anang Wibowo, S.Pd

Mahasiswa PPG Dalam Jabatan 2020 Angkatan 1

LPTK Universitas PGRI Madiun (UNIPMA)



Bahan Ajar

Trigonometri Analitik

Sekolah : SMA N 1 PONOROGO
 Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
 Kelas/Semester : XI/Ganjil

B. Kompetensi Inti (KI)

- KI-3 : Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
- KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

B. Kompetensi Dasar dan Indikator

3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

Indikator:

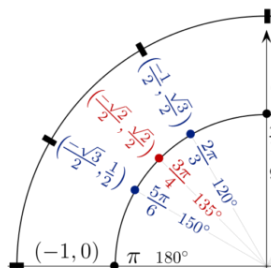
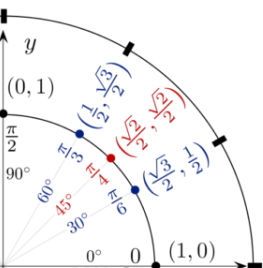
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih dua sudut.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus sudut ganda dan sudut setengah.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian trigonometri.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih trigonometri.

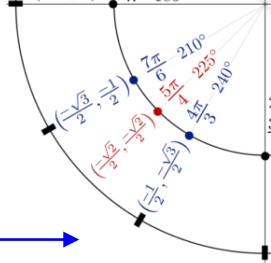
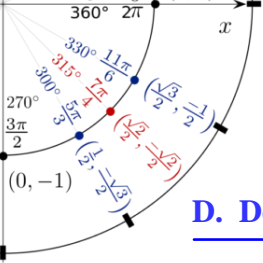
C. Petunjuk Penggunaan

Pelajari dan pahami materi dengan cermat, terutama pada proses penurunan rumus, kemudian proses bagaimana menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut. Perbanyaklah latihan soal, kita bisa karena terbiasa.

“Witing Iso Jalaran Soko Kulino”

(<https://s.id/matikzone>)





D. Deskripsi

Pada kesempatan ini kita akan mempelajari materi tentang rumus-rumus trigonometri analitik yang terdiri dari rumus jumlah dan selisih dua sudut, rumus sudut rangkap dan tengahan, rumus perkalian trigonometri dan rumus jumlah dan selisih trigonometri. Materi ini adalah lanjutan dari materi trigonometri yang pernah kalian pelajari di kelas X. Agar lancar dan tidak kesulitan dalam mempelajarinya, maka kalian harus sudah memahami dengan baik materi trigonometri yang pernah kalian pelajari di kelas X. Jika dirasa perlu, silakan buka kembali materi tersebut.

E. Materi Pelajaran

Materi Pendukung

Materi pendukung adalah materi trigonometri yang pernah kalian dipelajari di kelas X yang akan kita gunakan sebagai pijakan dalam mempelajari dan menemukan rumus-rumus jumlah dan selisih sudut, diantaranya adalah sebagai berikut:

- Nilai perbandingan sudut-sudut istimewa
- Sudut berelasi
- Grafik fungsi trigonometri

Berikut beberapa links untuk mengingat kembali materi yang pernah kalian pelajari di kelas X. Banyak-banyaklah membaca dan berlatih soal, InsyaAllah bisa.

- <https://www.slideshare.net/pramithasari27/bahan-ajar-trigonometri>
- https://www.academia.edu/11995956/Modul_Matematika_Kelas_X_Trigonometri
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLOBaZOkdgOIqoES54zX5U5rtW7CQxSaxE>
- <https://geogebra.org/m/rqumnu9q>
- <https://s.id/relasi>

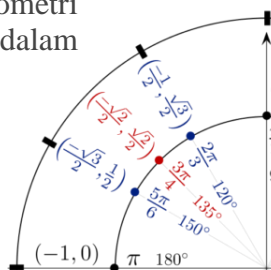
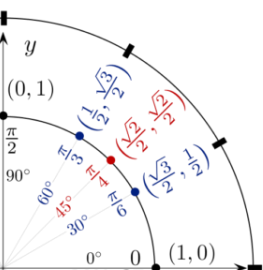
Materi Utama

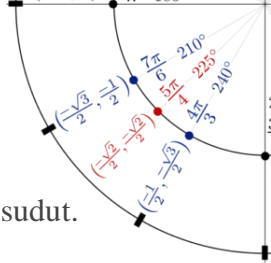
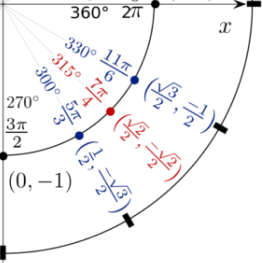
• Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Dulu di kelas X kalian sudah mempelajari nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran I. Dengan rumus sudut berelasi ataupun bantuan grafik, juga sudah bisa menentukan nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV.

Ada pertanyaan, apakah ada sudut-sudut lainnya selain sudut-sudut istimewa 0° , 30° , 45° , 60° , dan 90° yang bisa kita cari nilai trigonometrinya tanpa menggunakan alat bantu semisal tabel trigonometri dan kalkulator? Bisakah kita menentukan nilai trigonometri untuk sudut 15° , 22.5° , dan yang lainnya?

Pada materi ini kita akan mempelajari bagaimana menemukan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut kemudian menggunakan rumus tersebut dalam





menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan jumlah dan selisih dua sudut.

Penguasaan materi [perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku](#) dan [perbandingan trigonometri sudut berelasi](#) akan sangat membantu dalam mempelajari materi ini.

Berikut beberapa sudut relasi yang digunakan :

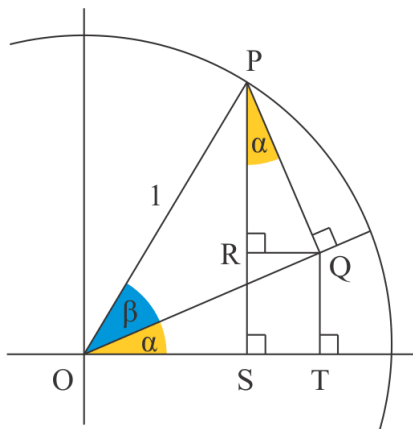
$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \theta) &= \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

sin (α + β) dan sin (α - β)

Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Titik P terletak pada lingkaran sehingga OP = 1.

$$\begin{aligned} \angle POS &= \alpha + \beta \\ \angle QOT &= \angle OQR = \angle QPR = \alpha \end{aligned}$$

Untuk lebih detailnya, perhatikan diagram berikut



Dari segitiga OPS diperoleh

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{PS}{1} = PS$$

PS = RS + PR dan RS = QT, dapat kita tulis

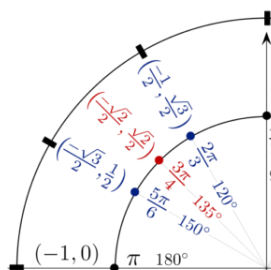
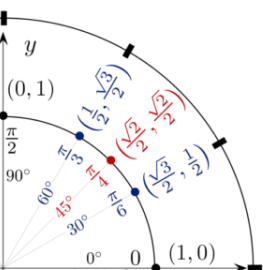
PS = QT + PR, akibatnya

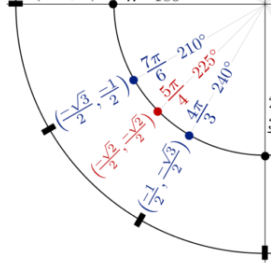
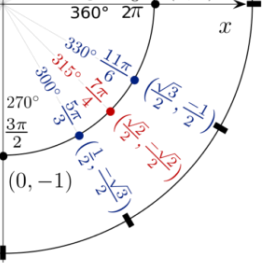
$$\sin(\alpha + \beta) = QT + PR \dots\dots\dots(1)$$

Dari segitiga OPQ diperoleh

$$PQ = \sin \beta$$

$$OQ = \cos \beta$$





Dari segitiga OQT dipeoleh

$$\sin \alpha = \frac{QT}{OQ}$$

$$QT = \sin \alpha \cdot OQ$$

$$QT = \sin \alpha \cdot \cos \beta \quad \dots\dots\dots(2)$$

Dari segitiga PQR diperoleh

$$\cos \alpha = \frac{PR}{PQ}$$

$$PR = \cos \alpha \cdot PQ$$

$$PR = \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \dots\dots\dots(3)$$

Dari (1), (2) dan (3) kita dapatkan

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= QT + PR \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Jika β diganti dengan $-\beta$, maka

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + (-\beta)) &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi sinus sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

cos ($\alpha + \beta$) dan cos ($\alpha - \beta$)

Rumus cos ($\alpha + \beta$) dan cos ($\alpha - \beta$) dapat kita tentukan dengan cara yang hampir sama seperti rumus sinus diatas. Namun, karena rumus sinus sudah kita peroleh, akan lebih mudah jika kita gunakan konsep sudut relasi kuadran I.

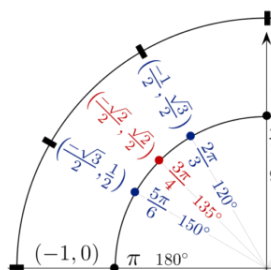
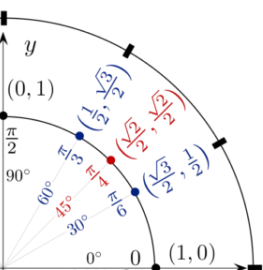
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

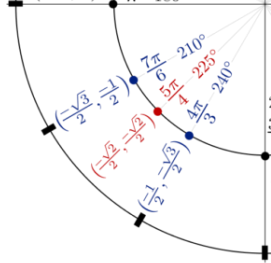
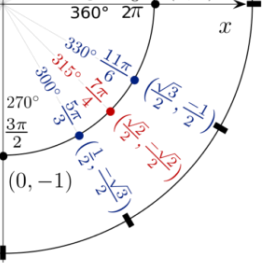
Jika β diganti dengan $-\beta$, maka

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + (-\beta)) &= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi cosinus sebagai berikut

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$





tan (α + β) dan tan (α - β)

Berdasarkan identitas rasio $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, akibatnya

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Jika β diganti dengan -β, maka

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + (-\beta)) &= \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi tangen sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.



Penjabaran Sinus



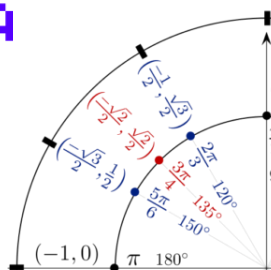
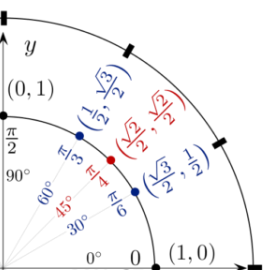
Penjabaran Cosinus

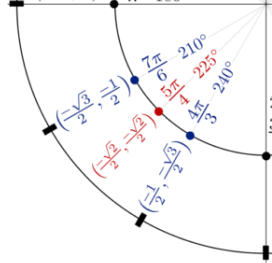
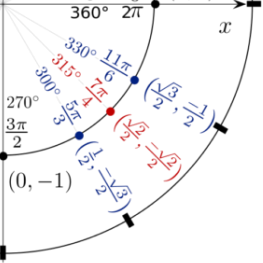


Penjabaran Tangen



Soal-soal





Contoh Soal

2. Tentukan nilai eksak dari $\sin 75^\circ$

Jawab :

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin (30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2} + \frac{1}{4} \sqrt{6} \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \end{aligned}$$

2. Tentukan nilai eksak dari $\cos 105^\circ$

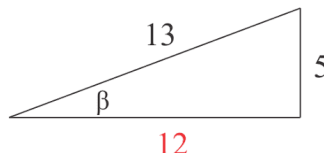
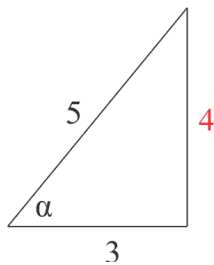
Jawab :

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{4} \sqrt{6} \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \end{aligned}$$

3. Diketahui $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ dan $\sin \beta = \frac{5}{13}$. Jika α adalah sudut lancip dan β sudut tumpul, tentukan nilai dari $\sin (\alpha - \beta)$!

Jawab :

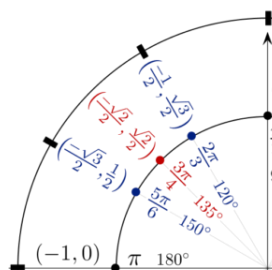
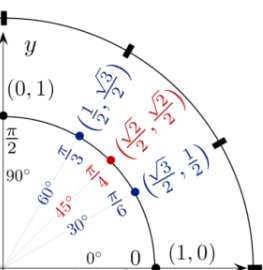
α lancip berarti α berada di kuadran I dan β tumpul berarti β berada di kuadran II.

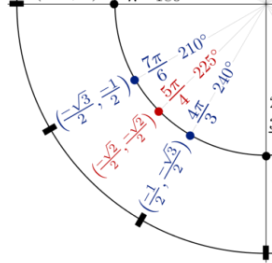
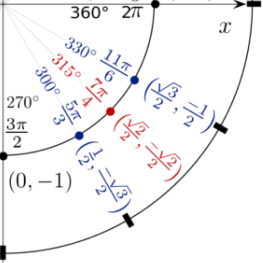


$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$\sin \alpha$ bernilai positif karena α berada di kuadran I.

$$\sin \beta = \frac{5}{13} \rightarrow \cos \beta = -\frac{12}{13}$$





$\cos \beta$ bernilai negatif karena β berada di kuadran II.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} \\ &= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} \\ &= -\frac{63}{65} \end{aligned}$$

4. Segitiga PQR siku-siku di P. Jika $\cos(P + Q) = \frac{2}{3}$, tentukan nilai $\sin Q + \cos R$!

Jawab :

Karena sudut P siku-siku, maka $P = 90^\circ$

$$\cos(P + Q) = \frac{2}{3}$$

$$\cos(90^\circ + Q) = \frac{2}{3}$$

$$\cos 90^\circ \cos Q - \sin 90^\circ \sin Q = \frac{2}{3}$$

$$0 \cdot \cos Q - 1 \cdot \sin Q = \frac{2}{3}$$

$$0 - \sin Q = \frac{2}{3}$$

$$\sin Q = -\frac{2}{3}$$

$$P + Q + R = 180^\circ$$

$$90^\circ + Q + R = 180^\circ$$

$$R = 90^\circ - Q$$

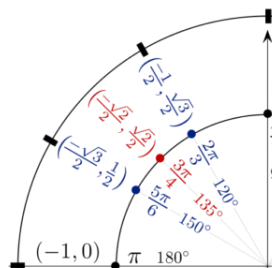
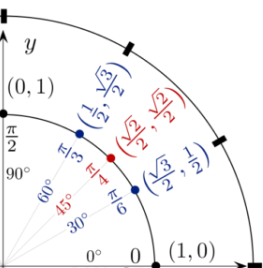
$$\cos R = \cos(90^\circ - Q) = \sin Q$$

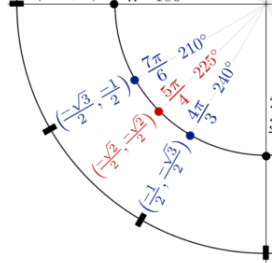
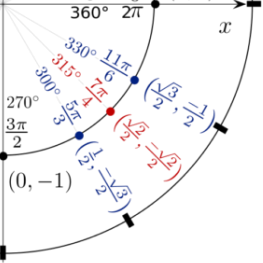
$$\text{diperoleh } \cos R = \sin Q = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Jadi, } \sin Q + \cos R = -\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

5. Diketahui $A - B = 30^\circ$ dengan sudut A dan B lancip. Jika $\sin A \cos B = \frac{7}{10}$, tentukan nilai $\sin(A + B)$!

Jawab :





Karena $A - B = 30^\circ$, maka $\sin(A - B) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{10} - \cos A \sin B$$

$$\cos A \sin B = \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{9}{10}$$

$$\text{Jadi, } \sin(A + B) = \frac{9}{10}$$

Rumus Sudut Ganda dan Sudut Setengah

Sudut ganda atau sudut rangkap dua biasa dinyatakan dalam sudut 2α . Perbandingan trigonometri untuk sudut ganda, yaitu **$\sin 2\alpha$** , **$\cos 2\alpha$** dan **$\tan 2\alpha$** dapat kita nyatakan dalam perbandingan trigonometri sudut tunggalnya, yaitu sudut α . Ekspresi trigonometri yang melibatkan sudut 2α dan sudut α inilah yang nantinya kita sebut dengan rumus trigonometri sudut ganda.

Rumus sudut ganda dapat dengan mudah kita turunkan dari [rumus jumlah dan selisih dua sudut](#), dalam hal ini $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ dan $\tan(\alpha + \beta)$.

Penurunan Rumus Sinus Sudut Ganda

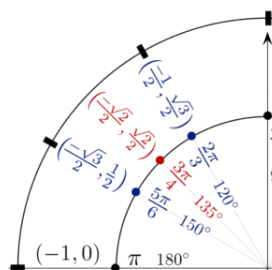
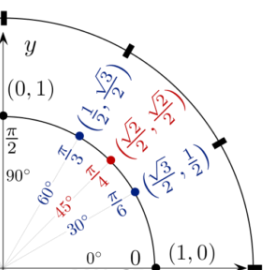
Coba perhatikan kembali rumus $\sin(\alpha + \beta)$.

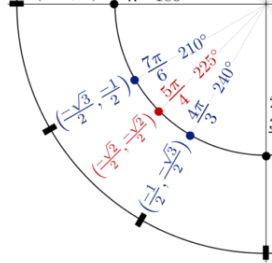
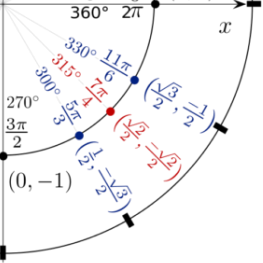
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Jika $\alpha = \beta$, maka rumus diatas menjadi $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

Karena $\alpha + \alpha = 2\alpha$ dan $\sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha \sin \alpha$, maka persamaan diatas menjadi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$





Penurunan Rumus Cosinus Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus $\cos(\alpha + \beta)$.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Jika $\alpha = \beta$, maka rumus diatas menjadi $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$, atau dapat kita tulis

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Jika kita substitusikan $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Jika kita substitusikan $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Penurunan Rumus Tangen Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

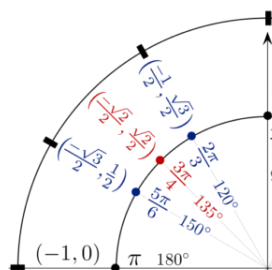
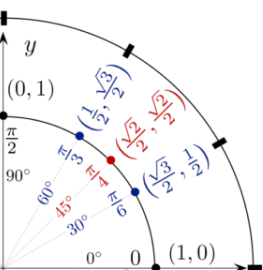
Jika $\alpha = \beta$, maka rumus diatas menjadi $\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha}$

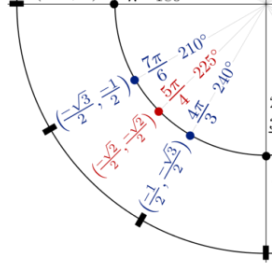
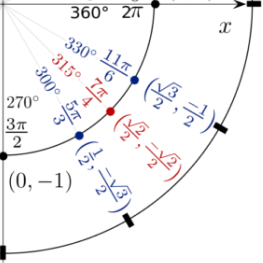
atau dapat kita tulis

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Rumus trigonometri sudut ganda akan sangat berguna dalam menyederhanakan ekspresi-ekspresi trigonometri nantinya, khususnya pada pokok bahasan yang melibatkan fungsi trigonometri seperti limit, turunan, integral dan persamaan trigonometri.

Untuk sudut setengah atau tengahan, kita bisa menurunkannya dari rumus sudut ganda cosinus, yaitu sebagai berikut:





Penurunan Rumus Sinus Sudut Setengah

Coba perhatikan kembali rumus $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Jika kita mengubah bentuk menjadi $\sin \alpha$, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha &\Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \\ &\Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Jika $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ maka

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Penurunan Rumus Cosinus Sudut Setengah

Coba perhatikan kembali rumus $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Jika kita mengubah bentuk menjadi $\cos \alpha$, kita dapatkan

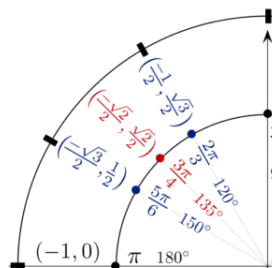
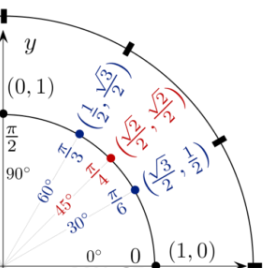
$$\begin{aligned} \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 &\Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ &\Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \end{aligned}$$

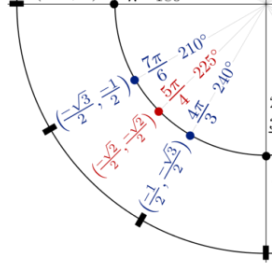
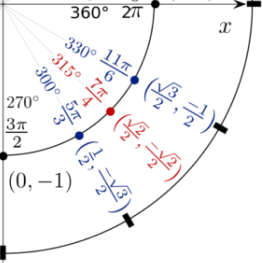
Jika $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ maka

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Penurunan Rumus Tangen Sudut Setengah

Karena $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ dan $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta}$ maka





$$\tan \frac{1}{2} \theta = \pm \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \text{ atau } \tan \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

Jika masing-masing pembilang dan penyebut dalam akar kita kalikan dengan $1 - \cos \theta$

akan kita dapatkan $\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$ dan

Jika masing-masing pembilang dan penyebut dalam akar kita kalikan dengan

$1 + \cos \theta$ akan kita dapatkan $\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.



Sudut Ganda



Soal-soal



Sudut Tengah



Soal-soal

Contoh Soal

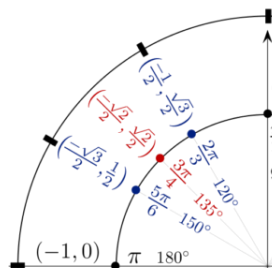
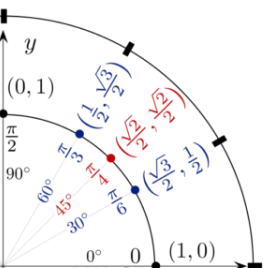
1. Tentukan nilai dari $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ dan $\tan 2\alpha$ jika diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, dengan α lancip!

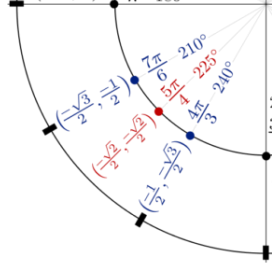
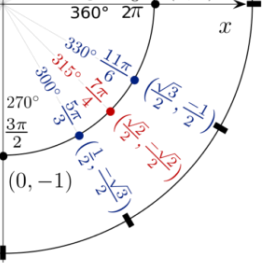
Jawab :

Diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada

segitiga siku-siku akan diperoleh $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ dan $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$





$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

2. Diketahui $\sin \alpha = p$ dan $\cos \beta = q$.

Nyatakan $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$ dalam p dan q .

Jawab :

$$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \frac{1}{2}((1 - 2\sin^2 \alpha) + (2\cos^2 \beta - 1)) = \frac{1}{2}(2\cos^2 \beta - 2\sin^2 \alpha) = q^2 - p^2$$

3. Diketahui segitiga sama kaki ABC dengan $\angle A = \angle B = \alpha$ dan $\angle C = \theta$. Jika $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, maka $\tan \theta = \dots$

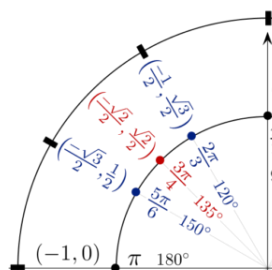
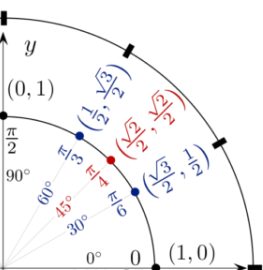
Jawab :

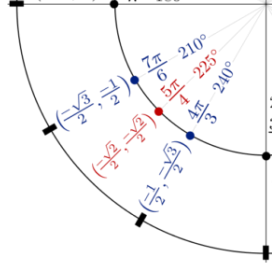
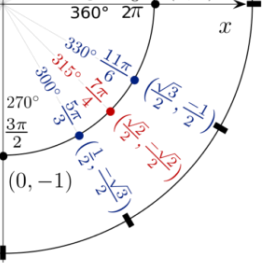
Diketahui $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada

segitiga siku-siku akan diperoleh $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \alpha + \alpha + \theta &= 180^\circ \\ \Rightarrow \theta &= 180^\circ - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan (180^\circ - 2\alpha) \\ &= -\tan 2\alpha \\ &= -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= -\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = -\frac{24}{7} \end{aligned}$$





4. Gunakan rumus sinus sudut ganda untuk menyederhakan bentuk-bentuk berikut!

- (a) $8\sin 3x \cos 3x$ (b) $\cos 5x \sin 5x$ (c) $(\sin 4x - \cos 4x)^2 = 1 - \sin 8x$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{a) } 8\sin 3x \cos 3x &= 4 \cdot 2\sin 3x \cos 3x \\ &= 4 \cdot \sin 2(3x) \\ &= 4\sin 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 5x \sin 5x &= \frac{1}{2} \cdot 2\sin 5x \cos 5x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin 2(5x) \\ &= \frac{1}{2} \sin 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\sin 4x - \cos 4x)^2 &= (\sin 4x - \cos 4x)(\sin 4x - \cos 4x) \\ &= \sin^2 4x + \cos^2 4x - 2\sin 4x \cos 4x \\ &= 1 - \sin 2(4x) \\ &= 1 - \sin 8x \end{aligned}$$

5. Tunjukkan bahwa: $1 - \cos nx = 2 \sin^2 \left(\frac{nx}{2} \right)$, n konstan.

Jawab :

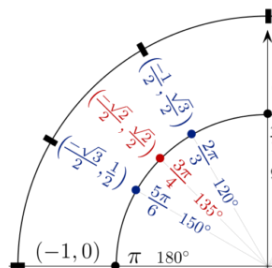
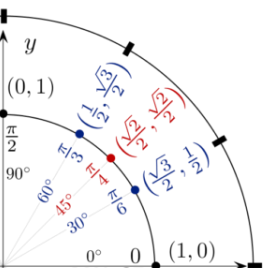
$$1 - \cos nx = 1 - \cos 2\left(\frac{nx}{2}\right)$$

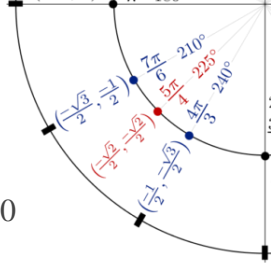
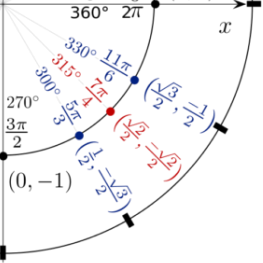
Misalkan $\left(\frac{nx}{2}\right) = \alpha$, sehingga persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} 1 - \cos nx &= 1 - \cos 2\alpha \\ &= 1 - (1 - 2\sin^2\alpha) \\ &= 1 - 1 + 2\sin^2\alpha \\ &= 2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

Substitusikan kembali $\alpha = \left(\frac{nx}{2}\right)$ sehingga diperoleh

$$1 - \cos nx = 2\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$$





6. Untuk $0 < x < 2\pi$, tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

Jawab :

$$\begin{aligned} \cos 2x - 3\sin x + 1 &= 0 \\ (1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 1 &= 0 \\ -2\sin^2 x - 3\sin x + 2 &= 0 \\ 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 &= 0 \\ (\sin x + 2)(2\sin x - 1) &= 0 \\ \sin x &= -2 \text{ atau } \sin x = 1/2 \end{aligned}$$

$\sin x = -2 \rightarrow$ tidak mempunyai solusi

$\sin x = 1/2 \rightarrow x = \{30^\circ, 150^\circ\}$

Jadi, HP = $\{\pi/6, 5\pi/6\}$

Rumus Perkalian Trigonometri

Dengan menjumlahkan atau mengurangi rumus-rumus pada bagian pertama, kita akan mendapatkan rumus-rumus baru yaitu

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

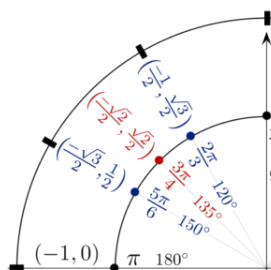
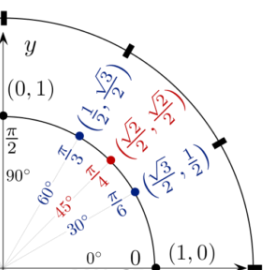
$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

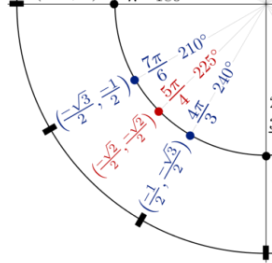
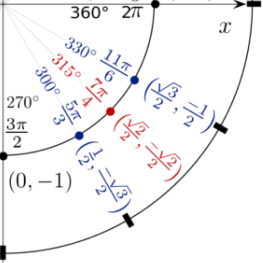
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$





Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.



Perkalian Sudut



Soal-soal



Soal-soal

Contoh Soal

1. Hitunglah nilai dari $\sin 105^\circ \cos 75^\circ$.

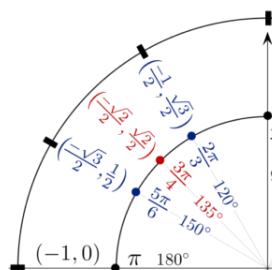
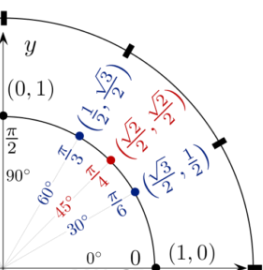
Jawab:

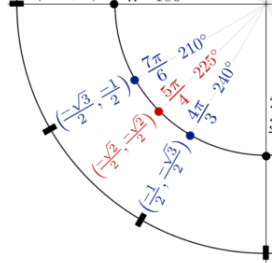
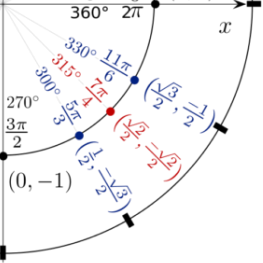
$$\begin{aligned} \sin 105^\circ \cos 75^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 105^\circ \cos 75^\circ \\ &= \frac{1}{2} (\sin(105 + 75)^\circ + \sin(105 - 75)^\circ) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 180^\circ + \sin 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Nilai eksak dari $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ adalah...

Jawab:

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \right) \cos 80^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) \right) \cos 80^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right) \right) \cos 80^\circ \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 20^\circ \right) \cos 80^\circ \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 80^\circ \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} 2 \cos 20^\circ \cos 80^\circ \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} (\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \left(-\cos 80^\circ + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ - \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Rumus Jumlah dan Selisih Trigonometri

Dari rumus perkalian dia atas, kita bisa menurunkan rumus baru yaitu rumus jumlah dan selisih trigonometri. Caranya adalah dengan membuat suatu pemisalan, yaitu

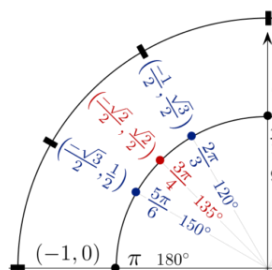
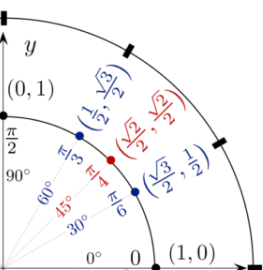
Misalkan $\alpha + \beta = P$ dan $\alpha - \beta = Q$ maka

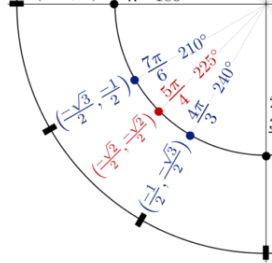
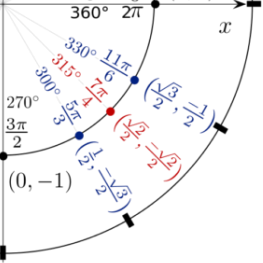
$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= P & \alpha + \beta &= P \\
 \alpha - \beta &= Q & \alpha - \beta &= Q \\
 \hline
 2\alpha &= P + Q & 2\beta &= P - Q \\
 \alpha &= \frac{1}{2}(P + Q) & \beta &= \frac{1}{2}(P - Q)
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusinya ke persamaan sebelumnya, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \\
 \Rightarrow \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q) &= \frac{1}{2} \cos P + \frac{1}{2} \cos Q \\
 \Rightarrow 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q) &= \cos P + \cos Q
 \end{aligned}$$

$\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$





$$-\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow -\sin \frac{1}{2}(P+Q) \sin \frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2} \cos P - \frac{1}{2} \cos Q$$

$$\Rightarrow -2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \sin \frac{1}{2}(P-Q) = \cos P - \cos Q$$

$$\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \sin \frac{1}{2}(P-Q)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \sin \frac{1}{2}(P+Q) \cos \frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2} \sin P + \frac{1}{2} \sin Q$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \cos \frac{1}{2}(P-Q) = \sin P + \sin Q$$

$$\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P+Q) \cos \frac{1}{2}(P-Q)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \cos \frac{1}{2}(P+Q) \sin \frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2} \sin P - \frac{1}{2} \sin Q$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{1}{2}(P+Q) \sin \frac{1}{2}(P-Q) = \sin P - \sin Q$$

$$\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P+Q) \sin \frac{1}{2}(P-Q)$$

Untuk rumus jumlah dan selisih dari tangent jarang dibahas mengingat bentuk rumusnya yang sedikit kompleks. Berikut penjabaran rumus yang dimaksud,

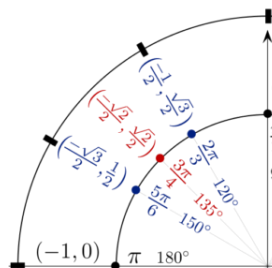
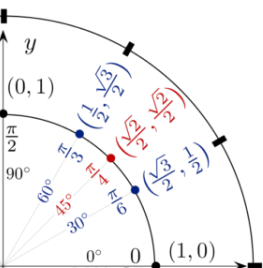
$$\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)$$

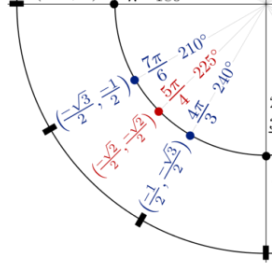
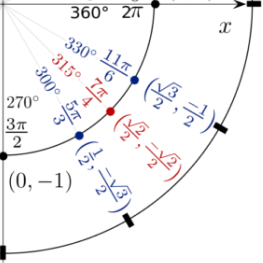
$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} + \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)(1 + \tan \alpha \tan \beta) + (\tan \alpha - \tan \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta)}{(1 - \tan \alpha \tan \beta)(1 + \tan \alpha \tan \beta)}$$

$$= \frac{2 \tan \alpha + 2 \tan \alpha \tan^2 \beta}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}$$

$$= \frac{2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \beta)}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}$$





Atau $\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta) = \frac{2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \beta)}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}$

Setelah disubstitusi diperoleh

$$\tan P + \tan Q = \frac{2 \tan \frac{1}{2}(P+Q) \left(1 + \tan^2 \frac{1}{2}(P-Q)\right)}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}(P+Q) \tan^2 \frac{1}{2}(P-Q)}$$

dengan cara yang sama akan diperoleh bentuk pengurangan tan, yaitu

$$\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta) = \frac{2 \tan \beta (1 + \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}$$

Setelah disubstitusi diperoleh

$$\tan P - \tan Q = \frac{2 \tan \frac{1}{2}(P-Q) \left(1 + \tan^2 \frac{1}{2}(P+Q)\right)}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}(P+Q) \tan^2 \frac{1}{2}(P-Q)}$$

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.



Rumus Jumlah Selisih

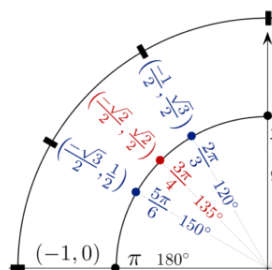
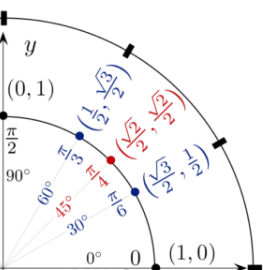


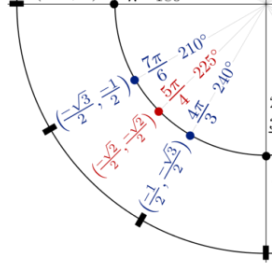
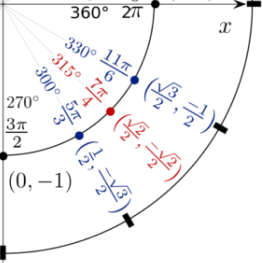
Soal-soal

Contoh Soal

1. $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ = \dots$

Jawab:





$$\begin{aligned} \sin 105^\circ - \sin 15^\circ &= 2 \cos\left(\frac{105+15}{2}\right) \sin\left(\frac{105-15}{2}\right) \\ &= 2 \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Buktikan bahwa $\frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$

Jawab:

$$\begin{aligned} \frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} &= \frac{\sin 3A + \sin A}{\cos 3A + \cos A} \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{3A+A}{2}\right) \cos\left(\frac{3A-A}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{3A+A}{2}\right) \cos\left(\frac{3A-A}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \sin 2A \cos A}{2 \cos 2A \cos A} \\ &= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} \\ &= \tan 2A \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

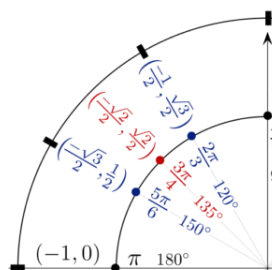
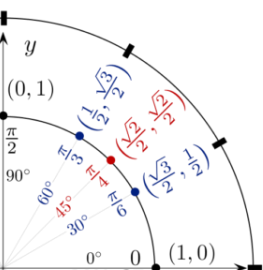
F. Latihan Soal

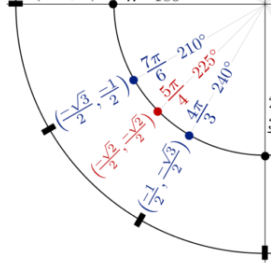
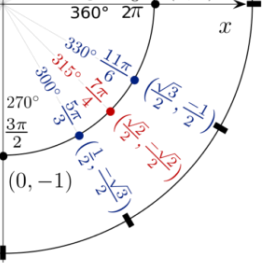
Berikut soal-soal yang bisa kalian coba untuk melihat sejauh mana kalian menguasai materi ini. Sering-seringlah latihan soal, jika kurang silakan mengambil dari berbagai sumber lainnya baik yang cetak maupun digital dan online. Ingat, tidak ada ceritanya orang merugi karena banyak latihan... Selamat mencoba...

• Pilihlah jawaban yang benar.

1. Nilai $\tan 105^\circ$ adalah...

| | |
|---------------------|---------------------|
| a. $-2 - 2\sqrt{3}$ | d. $-2 + 2\sqrt{3}$ |
| b. $-2 - \sqrt{3}$ | e. $2 + 2\sqrt{3}$ |
| c. $-2 + \sqrt{3}$ | |





2. Diketahui $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ dan $\tan x = \frac{4}{3}$, nilai $\sin(30^\circ - x)$ adalah...

- a. $\frac{1}{10}(4\sqrt{3} - 3)$
- b. $\frac{1}{10}(4\sqrt{3} + 3)$
- c. $\frac{1}{10}(3 - 4\sqrt{3})$
- d. $\frac{1}{10}(3 - 2\sqrt{3})$
- e. $\frac{1}{10}(2\sqrt{3} + 3)$

3. Bentuk sederhana dari $\sin \alpha - \sin(\alpha - 120^\circ) - \sin(\alpha - 240^\circ)$ adalah ...

- a. $\sin \alpha$
- b. $\cos \alpha$
- c. $\sin 2\alpha$
- d. $2 \sin \alpha$
- e. $2 \cos \alpha$

4. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, x sudut tumpul dan y sudut lancip. Nilai

$\tan(x + y) = \dots$

- a. $-\frac{56}{33}$
- b. $-\frac{16}{63}$
- c. $\frac{8}{63}$
- d. $\frac{16}{63}$
- e. $\frac{56}{33}$

5. Jika $\tan A = \frac{4}{3}$ dan $\tan B = 7$, hasil $A + B$ adalah ...

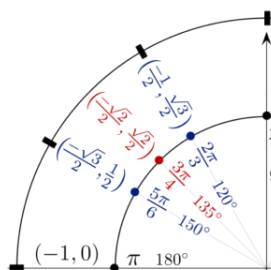
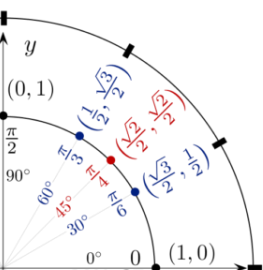
- a. 45°
- b. 135°
- c. 150°
- d. 225°
- e. 330°

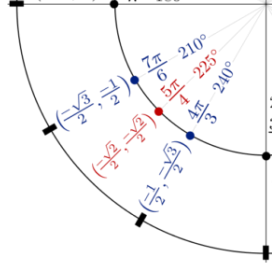
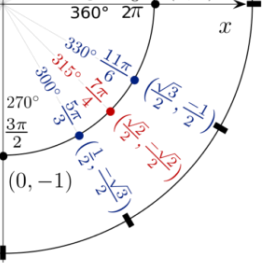
6. Nilai dari $8 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$ adalah ...

- a. $4\sqrt{3}$
- b. 4
- c. 2
- d. $2\sqrt{3}$
- e. 1

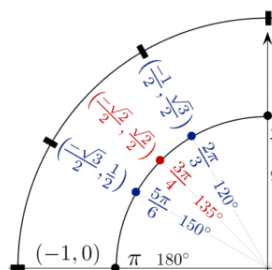
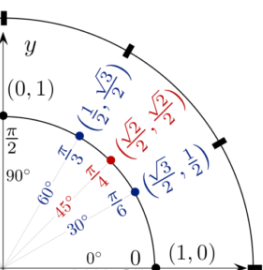
7. Diketahui $1 - \tan A \sin 2A = -\frac{5}{13}$, nilai $\cos 4A = \dots$

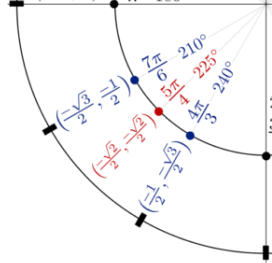
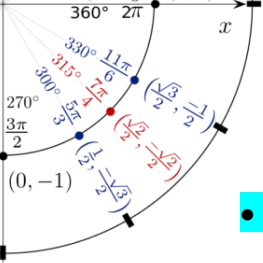
- a. $-\frac{219}{169}$
- b. $-\frac{119}{169}$
- c. $\frac{119}{169}$
- d. $\frac{139}{169}$
- e. $\frac{219}{169}$





8. $4 \sin x \cos 3x = \dots$
- a. $2 \sin 2x + 2 \sin 4x$
 - b. $2 \sin 4x - 2 \sin 2x$
 - c. $\sin 4x - \sin 2x$
 - d. $\sin 4x + \sin 2x$
 - e. $\sin 4x + 2 \sin 2x$
9. $\cos^2 3x \sin 3x = \dots$
- a. $\frac{1}{4}(\cos 9x + \cos 3x)$
 - b. $\frac{1}{2}(\cos 9x + \cos 3x)$
 - c. $\frac{1}{2}(\sin 9x + \sin 3x)$
 - d. $\frac{1}{4}(\sin 9x + \sin 3x)$
 - e. $\frac{1}{4}(\sin 6x + \sin 3x)$
10. Jika $A+B+C = \pi$, maka $4 \sin A \sin B \sin C = \dots$
- a. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$
 - b. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$
 - c. $\cos A + \cos B + \cos C$
 - d. $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C$
 - e. $\cos A - \cos B - \cos C$
11. Nilai eksak dari $\tan 5^\circ \cdot \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 65^\circ \cdot \tan 85^\circ$ adalah ...
- a. -1
 - b. $-\frac{1}{2}$
 - c. 0
 - d. $\frac{1}{2}$
 - e. 1
12. Nilai dari $\frac{\cos 20^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 20^\circ}$ adalah ...
- a. 2
 - b. 1
 - c. 0
 - d. $\frac{1}{2}$
 - e. $\frac{1}{2} \sqrt{2}$
13. $\sin 51^\circ + \cos 81^\circ = \dots$
- a. $\sin 30^\circ$
 - b. $\cos 30^\circ$
 - c. $\cos 21^\circ$
 - d. $\sin 21^\circ$
 - e. $\sin 31^\circ$
14. Nilai dari $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = \dots$
- a. -1
 - b. 0
 - c. 1
 - d. 2
 - e. 3
15. $\frac{1 + \sin 2A - \cos 2A}{1 + \sin 2A + \cos 2A} = \dots$
- a. $\cotan 2A$
 - b. $\tan 2A$
 - c. 1
 - d. $\tan A$
 - e. $\cotan A$





● **Jawablah dengan benar.**

1. Sederhanakan bentuk $\cos(100^\circ + x) \cos(10^\circ - x) + \sin(100^\circ + x) \sin(10^\circ - x)$.
2. Jika $\sin A = 3/5$, dengan A sudut lancip, hitunglah nilai $\tan 2A$.
3. $\cos \pi/8 = \dots$
4. Buktikan bahwa $\tan x + \tan y = \frac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$

● **Latihan soal Quizizz**

Untuk memperbanyak latihan, silakan scan atau klik gambar QR-Code berikut ini untuk mencoba kuis soal-soal trigonometri.



Kuis Jumlah Selisih 2 Sudut



Kuis Sudut Rangkap



Kuis Perkalian Sudut



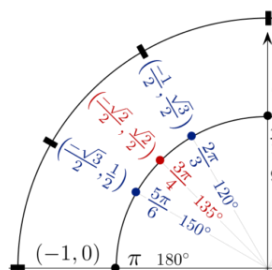
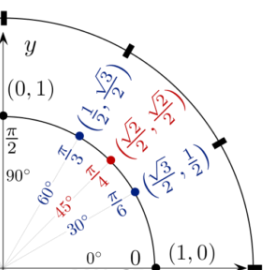
Kuis Jumlah Selisih

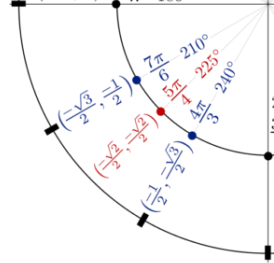
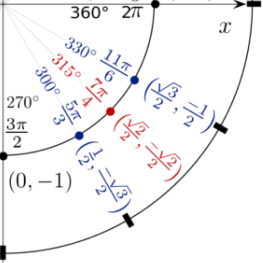
G. Penutup

Selamat, kalian telah sampai pada penghujung materi ini dan telah menyelesaikan KD 3.2 tentang rumus jumlah dan selisih sudut. Sekali lagi perbanyak latihan, kita bisa karena terbiasa, maka biasakanlah...

G. Daftar Pustaka

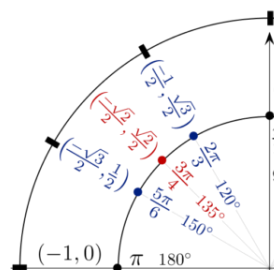
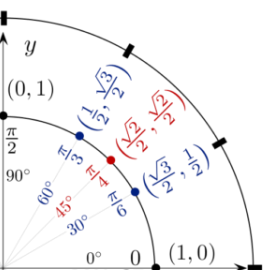
- Sukino, [Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Peminatan](#), Penerbit Erlangga, 2017.
- Aksin, Nur dkk. [Matematika untuk SMA/MA Peminatan kelas XI \(LKS PR\)](#), Intan Pariwara, 2020.
- <https://smatika.blogspot.com/2017/08/rumus-trigonometri-jumlah-dan-selisih.html>
- <https://smatika.blogspot.com/2017/12/rumus-trigonometri-sudut-ganda.html>
- <https://edumatik.net/rumus-jumlah-dan-selisih-dua-sudut-trigonometri/>
- <https://matikzone.wordpress.com>
- <https://quizizz.com>

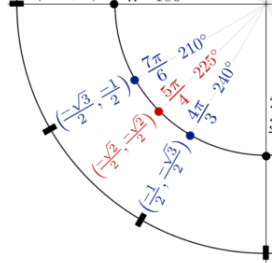
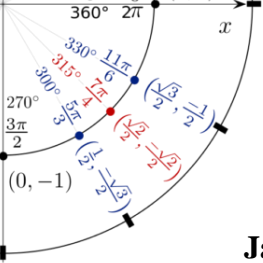




Rubrik Penilaian
Kunci Jawaban Soal Pilihan Ganda

1. B
2. C
3. D
4. E
5. B
6. C
7. B
8. A
9. D
10. A
11. E
12. B
13. C
14. B
15. D





Jawaban Soal Uraian

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \cos(100^\circ + x) \cos(10^\circ - x) + \sin(100^\circ + x) \sin(10^\circ - x) \\
 &= \cos[(100^\circ + x) - (10^\circ - x)] \\
 &= \cos(90^\circ + 2x) \\
 &= -\sin 2x
 \end{aligned}$$

2. Diketahui $\sin A = 3/5$. Dengan bantuan segitiga siku-siku diperoleh $\tan A = 3/4$, sehingga..

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

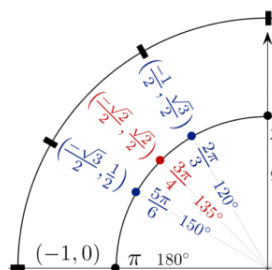
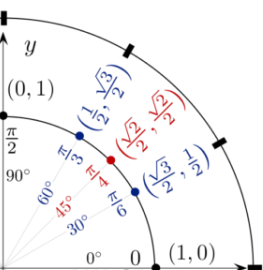
3. $\cos \pi/8 = \dots$

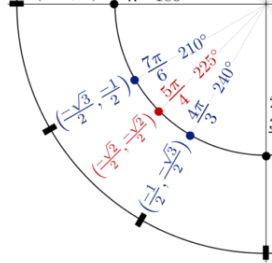
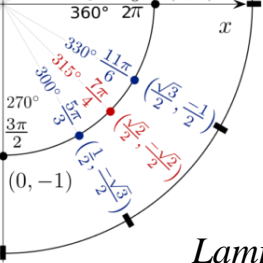
$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2} \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\
 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \tan x + \tan y &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos y \cos x} \\
 &= \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y} \\
 &= \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} \\
 &= \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)) \\
 &= \frac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}
 \end{aligned}$$

terbukti

- PG = Soal Pilihan Ganda yang Benar (bobot 4 persoal)
- U = Soal Uraian yang Benar (bobot 10 persoal)
- NA = Nilai Akhir
- = 4PG + 10U





Lampiran 3

Soal Latihan / Kuis

Soal latihan menggunakan Quizizz.

Link soal:

<https://quizizz.com/join/quiz/5e9322f387a261001b09c6f9/start?studentShare=true>

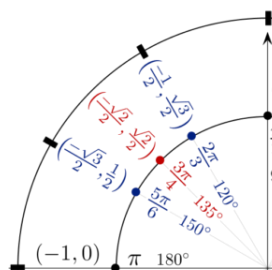
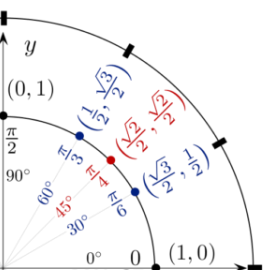
Lampiran 4

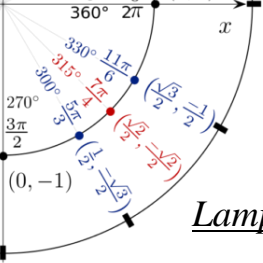
Soal Latihan Pengayaan

Karena di matematika tidak melupakan penilaian proses, maka diberikan soal uraian dan dikirim via Google Classroom.

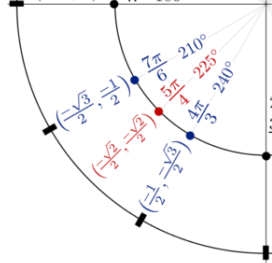
Link soal:

https://drive.google.com/file/d/1AVphdf-p7iZfRBqnpAJ_UwIMDlxa4W_x/view?usp=sharing





Lampiran 5



Evaluasi Pembelajaran

Penilaian Pengetahuan / Kognitif

Kisi-kisi Soal

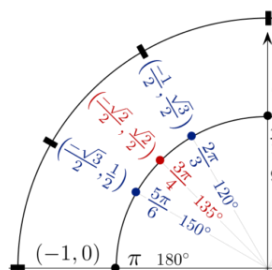
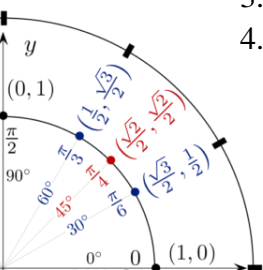
| No | KD | Materi | Bentuk Soal | No Soal |
|----|---|--------------------------------|-------------|------------|
| 1 | <p>3.3 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus. Indikator: Menemukan rumus jumlah dan selisih dua sudut.</p> <p>4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan kosinus. Indikator: Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih dua sudut.</p> | Rumus jumlah dan selisih sudut | Uraian | 1, 2, 3, 4 |

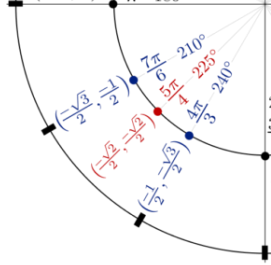
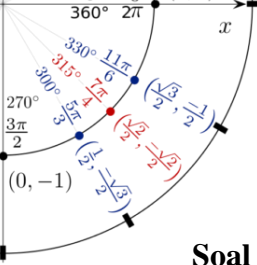
Soal

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
 Materi : Sudut Ganda dan Tengahan
 Kelas/Semester : XI SMA-MA / Gasal
 Waktu : 15 menit

Petunjuk Soal:

1. Mulailah dengan membaca do'a terlebih dahulu.
2. Kerjakan soal yang kalian anggap lebih mudah lebih dahulu.
3. Kerjakan secara mandiri, teliti, dan teratur.
4. Kerjakan dengan memuat unsur-unsur diketahui, ditanya, dan penyelesaian.



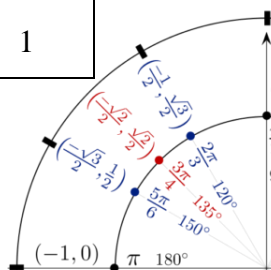
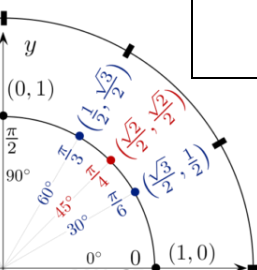


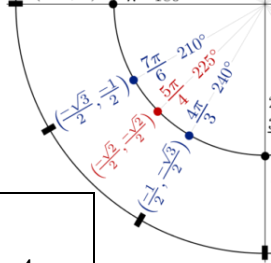
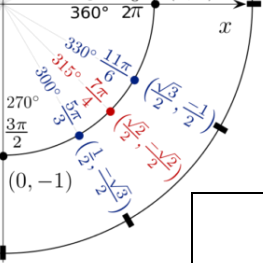
Soal

1. Nilai $\sin 105^\circ$ adalah...
2. Diketahui $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ dan $\tan x = \frac{4}{3}$, nilai $\sin(30^\circ - x)$ adalah...
3. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, x sudut tumpul dan y sudut lancip. Nilai $\tan(x + y) = \dots$
4. Diketahui A dan B adalah sudut lancip yang memenuhi $\tan(A+B) = \frac{1}{2}$ dan $\tan(A-B) = \frac{1}{3}$. Nilai $\tan A$ adalah ... (**Soal UM STIS 2011**)

Rubrik Penilaian

| No. | Soal dan Jawaban | Skor |
|-----|--|---|
| 1. | <p>Nilai $\sin 105^\circ$ adalah...</p> <p>Jawab Diketahui : - Ditanya : $\sin 105^\circ$ Penyelesaian :</p> $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\sin 105^\circ = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$ $= \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2}$ $= \frac{1}{4} \sqrt{6} + \frac{1}{4} \sqrt{2}$ $= \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ <p>Jadi, $\sin 105^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$</p> | <p>(10) mudah</p> <p>1</p> <p>3</p> <p>4</p> <p>2</p> |
| 2. | <p>Diketahui $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ dan $\tan x = \frac{4}{3}$, nilai $\sin(30^\circ - x)$ adalah....</p> <p>Jawab Diketahui : $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ dan $\tan x = \frac{4}{3}$, Ditanya : $\sin(30^\circ - x)$</p> | <p>(18) sedang</p> <p>1</p> <p>1</p> |

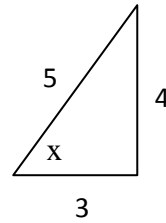




Penyelesaian :

- Karena $\tan x = \frac{4}{3}$, maka berdasar perbandingan sisi-sisi segitiga

siku-siku diperoleh $\sin x = \frac{4}{5}$, dan $\cos x = \frac{3}{5}$,



$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(30^\circ - x) = \sin 30 \cos x - \cos 30 \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{1}{10} (3 - 4\sqrt{3})$$

$$\text{Jadi, } \sin(30^\circ - x) = \frac{1}{10} (3 - 4\sqrt{3})$$

4

3

5

2

2

3. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, x sudut tumpul dan y sudut lancip. Nilai $\tan(x + y) = \dots$

(18)
sedang

Jawab

Diketahui : $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, x sudut tumpul dan y sudut lancip,

1

Ditanya : Nilai $\tan(x + y)$

1

Penyelesaian :

- Karena $\sin x = \frac{3}{5}$ maka berdasar perbandingan sisi-sisi segitiga siku-

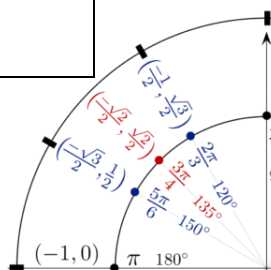
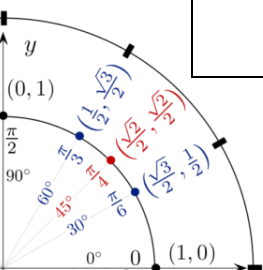
siku diperoleh $\tan x = \frac{3}{4}$

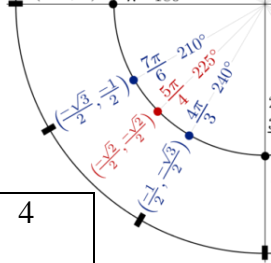
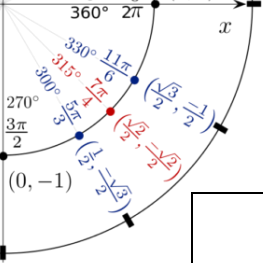
3

- Dan karena $\cos y = \frac{12}{13}$ maka berdasar perbandingan sisi-sisi segitiga

siku-siku diperoleh $\tan y = \frac{5}{12}$

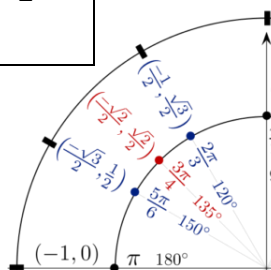
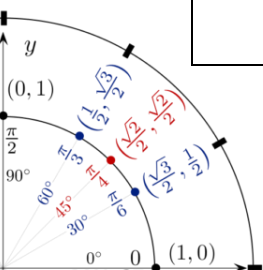
3

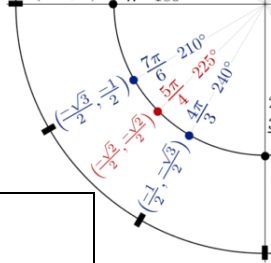
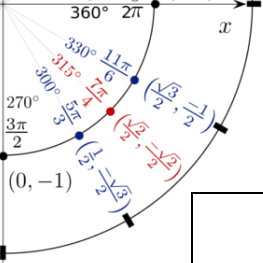




| | | |
|--|--|-------------------|
| | $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ $= \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}}$ $= \frac{\frac{9}{12} + \frac{5}{12}}{\frac{4 \cdot 12 - 3 \cdot 5}{4 \cdot 12}}$ $= \frac{14}{33}$ $= \frac{14}{12} \times \frac{4 \cdot 12}{33}$ $= \frac{56}{33}$ <p>Jadi, $\tan(x + y) = \frac{56}{33}$</p> | <p>4</p> <p>4</p> |
| | | |
| | | <p>2</p> |

| | | |
|----|---|---|
| 4. | <p>Diketahui A dan B adalah sudut lancip yang memenuhi $\tan(A+B) = \frac{1}{2}$ dan $\tan(A-B) = \frac{1}{3}$. Nilai $\tan A$ adalah ...</p> <p>Jawab</p> <p>Diketahui : A dan B adalah sudut lancip yang memenuhi $\tan(A+B) = \frac{1}{2}$ dan $\tan(A-B) = \frac{1}{3}$</p> <p>Ditanya : $\tan A$</p> <p>Penyelesaian :</p> $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ $\Rightarrow 1 - \tan A \tan B = 2 \tan A + 2 \tan B \dots(1)$ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ $\Rightarrow 1 + \tan A \tan B = 3 \tan A - 3 \tan B \dots(2)$ $3 \times (1) \Rightarrow 3 - 3 \tan A \tan B = 6 \tan A + 6 \tan B \dots(3)$ $2 \times (2) \Rightarrow 2 + 2 \tan A \tan B = 6 \tan A - 6 \tan B \dots(4)$ | <p>(30)</p> <p>Sulit</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>3</p> <p>3</p> <p>2</p> <p>2</p> |
|----|---|---|





Persamaan (3) + Persamaan (4)

$$\Rightarrow \begin{aligned} 5 - \tan A \tan B &= 12 \tan A \\ 12 \tan A + \tan A \tan B &= 5 \end{aligned} \quad \dots(5)$$

2

Persamaan (3) - Persamaan (4)

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1 - 5 \tan A \tan B &= 12 \tan B \\ 12 \tan B + 5 \tan A \tan B &= 1 \\ (12 + 5 \tan A) \tan B &= 1 \\ \tan B &= \frac{1}{12 + 5 \tan A} \end{aligned} \quad \dots(6)$$

3

Substitusi persamaan (6) ke (5)

$$\begin{aligned} 12 \tan A + \tan A \tan B = 5 &\Rightarrow 12 \tan A + \frac{\tan A}{12 + 5 \tan A} = 5 \\ &\Rightarrow 12 \tan A(12 + 5 \tan A) + \tan A = 5(12 + 5 \tan A) \\ &\Rightarrow 144 \tan A + 60 \tan^2 A + \tan A = 60 + 25 \tan A \\ &\Rightarrow 60 \tan^2 A + 120 \tan A - 60 = 0 \\ &\Rightarrow \tan^2 A + 2 \tan A - 1 = 0 \end{aligned}$$

5

Dengan rumus kuadrat, kita akan mendapatkan

$$\begin{aligned} \tan A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\Rightarrow \tan A = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

4

2

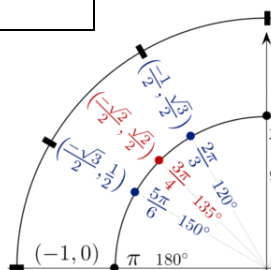
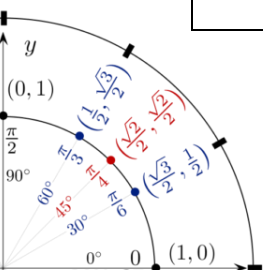
Karena A adalah sudut lancip, maka nilai tan A positif, yaitu $\sqrt{2} - 1$

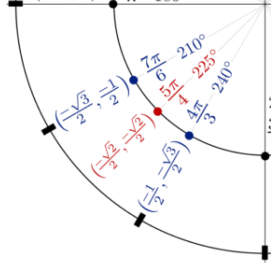
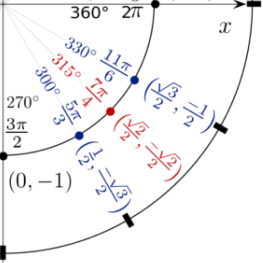
Jadi, $\tan A = \sqrt{2} - 1$

2

Skor Maks = 12 + 18 + 18 + 30 = 78

Nilai Akhir = $\frac{\text{Skor Perolehan Siswa}}{\text{Skor Maks}} \times 100$





Penilaian Sikap / Afektif

**LEMBAR PENILAIAN SIKAP
PENILAIAN OBSERVASI**

KELAS :

| NO | NAMA SISWA | SIKAP | | | | Nilai Akhir (modus) |
|----|------------|--------|-----------|-----------|-------|------------------------|
| | | Respon | Keaktifan | Kerjasama | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

Rubrik penilaian:

Sesuai aplikasi E-Raport dari kemdikbud, disana ada kriteria penilaian untuk sikap yaitu:

A = Sangat baik, B = Baik, C = Cukup, dan D = Kurang. Hanya memilih 4 kriteria tersebut tanpa ada skor atau nilai yang di input.

Strategi:

Cukup menandai siswa yang mempunyai karakter khusus dan menonjol. Secara umum nilai sikap yang diberikan adalah B.

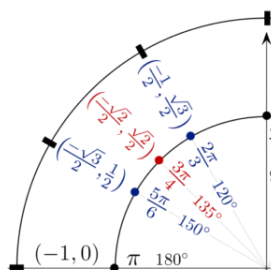
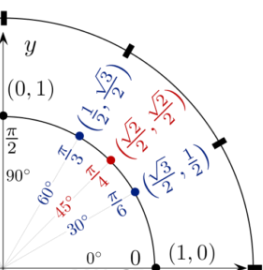
Mengetahui
Kepala Sekolah

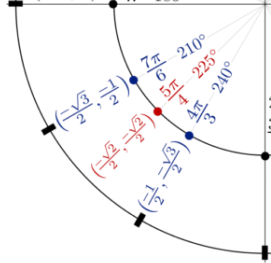
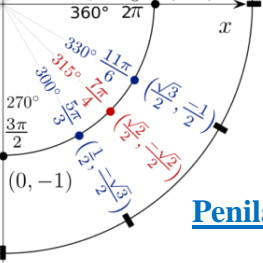
Agus Prasmono, M.Pd
NIP. 19660516 198903 1 006

Ponorogo, 18 Sept 2020

Guru Mata Pelajaran

Anang Wibowo, S.Pd
NIP.





Penilaian Keterampilan / Psikomotor

LEMBAR PENILAIAN KETRAMPILAN

KELAS :

| NO | NAMA SISWA | KETRAMPILAN | | | Rata-rata |
|----|------------|-------------|-----------------|-----------------------|-----------|
| | | Tugas | Hasil Pekerjaan | Unjuk Kerja/ Pendapat | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |

Rubrik Penilaian

| Kriteria | Deskripsi | | |
|--------------|----------------------------|-------------------------------|---|
| | Kelengkapan Tugas | Hasil Pekerjaan | Unjuk Kerja/ Pendapat |
| A = 92 – 100 | Tugas komplet, tepat waktu | Runtut dan rapi | Sering menyampaikan pendapat, hasil kerjaan atau latihan, |
| B = 84 – 91 | Tugas komplet | Runtut atau rapi | Pernah |
| C = 75 – 83 | Tugas kurang | Kurang runtut atau rapi | Jarang |
| D < 75 | Tidak mengumpulkan tugas | Susah dipahami, salah, kosong | - |

Mengetahui
Kepala Sekolah

Agus Prasmono, M.Pd
NIP. 19660516 198903 1 006

Ponorogo, 18 Sept 2020

Guru Mata Pelajaran

Anagus Wibowo, S.Pd
NIP.

