

POLA BILANGAN DAN JUMLAH PADA BARISAN ARITMETIKA DAN GEOMETRI

**Matematika
Wajib
Semester 3
2JP x 5**

3.6

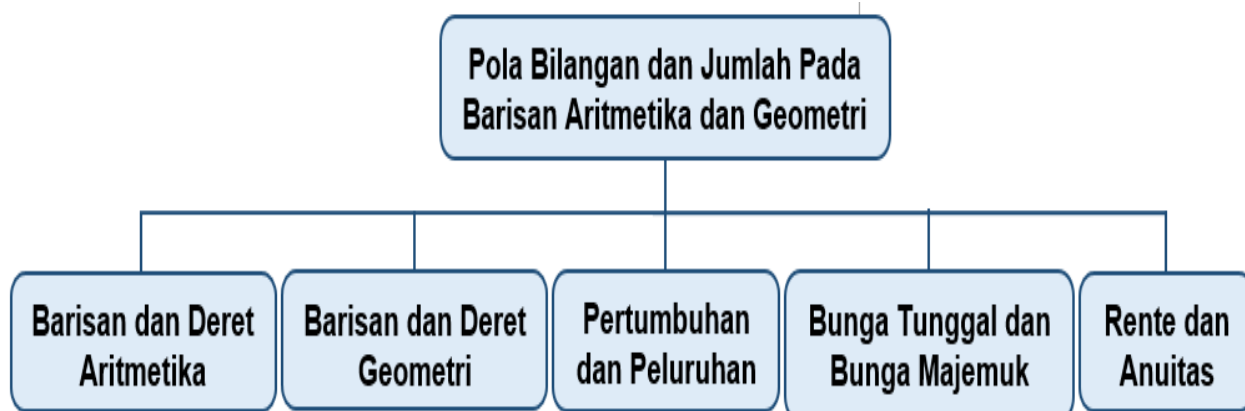
Menggeneralisasi pola bilangan dan jumlah pada barisan Aritmetika dan Geometri

4.6

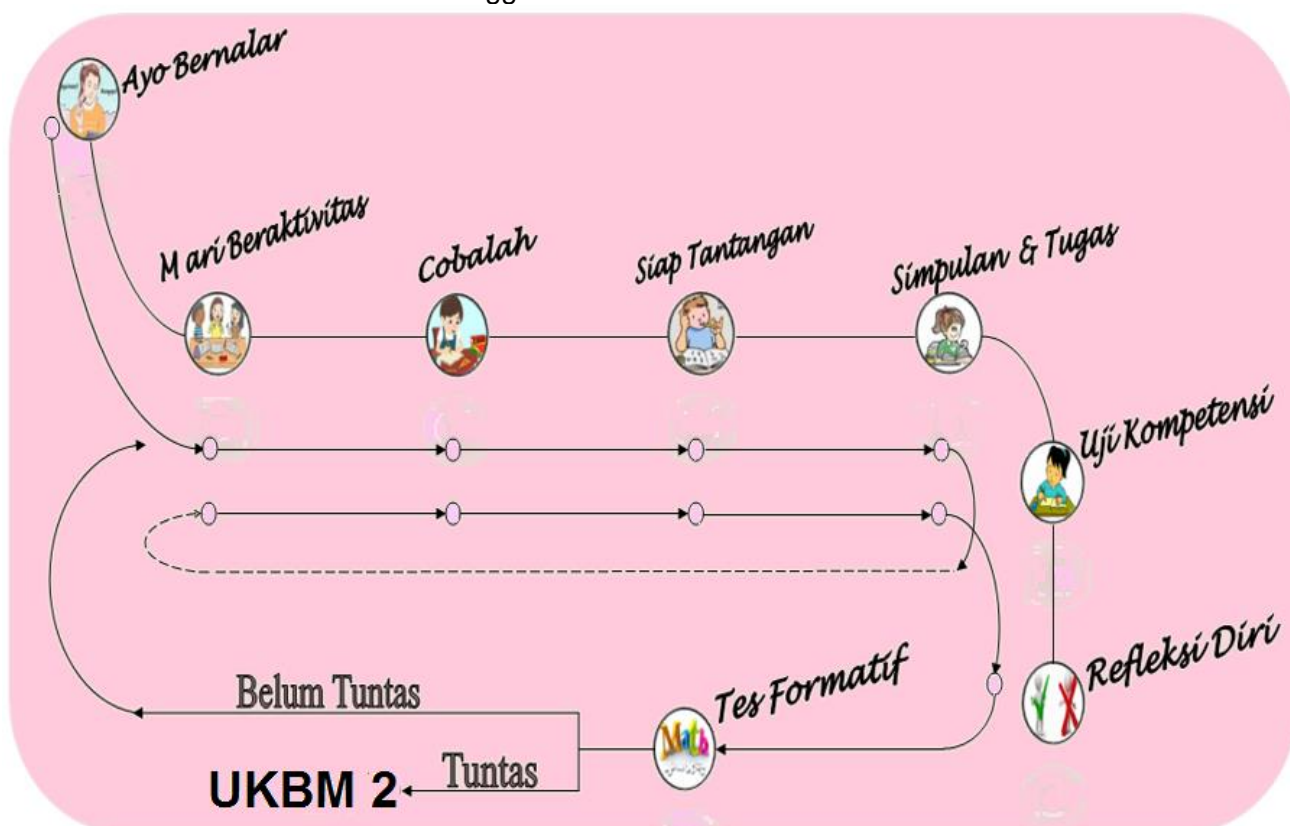
Menggunakan pola barisan aritmetika atau geometri untuk menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual (termasuk pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas)

Tujuan Pembelajaran:

Melalui proses pembelajaran materi pola bilangan dan jumlah pada barisan Aritmetika dan Geometri, kalian diharapkan *jujur*, *teliti*, dan *disiplin* dalam membedakan penggunaan pola barisan aritmetika dan geometri sesuai dengan ide-ide berdasarkan **berbagai sumber belajar**. Kalian juga diharapkan *teliti* dan *peduli* serta terampil dalam menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual (termasuk pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas) secara **tertulis**.

PETA KONSEP**PROSES BELAJAR****Petunjuk Umum Penggunaan UKBM**

Untuk menggunakan UKBM ini ikuti alur berikut:



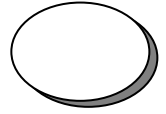
Mawa-3.6/4.6/O4/O1

PENDAHULUAN



Untuk mengawali proses belajar pada UKBM ini, mari melakukan kegiatan "Ayo Bernalar".

Ayo bernalar



POLA BILANGAN DAN JUMLAH PADA BARISAN ARITMETIKA DAN GEOMETRI

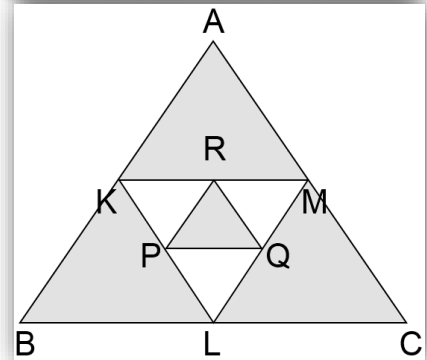


Perhatikan suasana kelas kalian, pastikan tempat kelas kalian *bersih, rapi, dan aman*. Kemudian lakukan kegiatan berikut.

Untuk mengawali proses belajar pada UKBM ini, mari lakukan kegiatan berikut:

Cermati bacaan di bawah ini!

- (1) Mula-mula sebuah bak mandi berisi 8 liter air. Untuk menambah jumlah air, keran dibuka dan air mengalir dengan debit 3 liter per menit.
- (2) Diketahui sebuah segitiga samasisi ABC yang panjang sisinya a cm. Titik tengah setiap sisi segitiga ABC dihubungkan untuk membentuk suatu segitiga KLM, selanjutnya titik tengah setiap sisi segitiga KLM dihubungkan untuk membentuk suatu segitiga PQR. Segitiga berikutnya dibentuk dengan proses yang sama.



Apa hubungan bacaan di atas dengan barisan dan deret?

Jawab:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

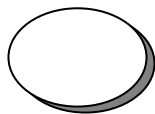
.....

.....





KEGIATAN INTI



Sudah siapkah belajar lebih jauh?
Yuk!! Kita lanjutkan ke
Kegiatan Inti UKBM ini



AKTIVITAS 1.1

Barisan dan Deret Aritmetika.



Setelah melakukan kegiatan “Ayo Bernalar”, sudahkah kalian mengetahui jawaban pertanyaannya? Untuk lebih memahaminya mari lakukan kegiatan “Mari Beraktivitas” berikut.

Mari Beraktivitas



Pada kegiatan ini, kalian akan mempelajari tentang barisan dan deret Aritmetika.



1. Bentuk Umum

Barisan Aritmetika: $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ dengan beda = b atau $a, (a + b), (a + 2b), \dots, (a + (n - 1)b)$
Deret Aritmetika: $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ atau $a, a + b, a + 2b, \dots, a + (n - 1)b$

2. Rumus Barisan dan Deret Aritmetika

(i) Beda (b):

$$\checkmark b = U_n - U_{n-1} \text{ atau } b = \frac{U_p - U_q}{p - q}$$

$$\checkmark b' = \frac{b}{k+1} \text{ dengan: } b' = \text{beda baru yang diperoleh dari suatu barisan Aritmetika yang telah disisipi satu atau lebih suku bilangan yang lain; dan } k = \text{banyaknya bilangan yang disisipkan}$$

Contoh:

Diketahui barisan 1, 7, 13, 19. Jika di antara 2 suku berurutan disisipkan 2 bilangan sehingga membentuk barisan baru, tentukan barisan baru itu.

Jawab:

Pada barisan 1, 7, 13, 19 diperoleh: $b = 7 - 1 = 13 - 7 = 19 - 13 = 6$ dan $k = 2$

$$\text{Maka: } b' = \frac{6}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Barisan yang baru adalah: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

(ii) Suku ke-n (U_n):

$$\checkmark U_n = a + (n - 1)b \text{ dengan } a = U_1$$

$$\checkmark U_{(p+q)} = U_p + q \cdot b \text{ dengan } U_{(p+q)} = \text{suku ke-}(p+q) \text{ dan } U_p = \text{suku ke-}p$$

(iii) Jumlah n suku pertama (S_n):

$$\checkmark S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b]$$

$$\checkmark S_n = \frac{n}{2}[a + U_n]$$

$$\checkmark S_n = \frac{n}{2}[U_p + U_q + (n - (p + q) + 1)b]$$

$$\checkmark S_n = n \cdot U_t \Leftrightarrow U_t = \frac{a + U_n}{2} \text{ dengan } U_t = \text{suku tengah}$$

(iv) Hubungan U_n dan S_n : $U_n = S_n - S_{(n-1)}$



Untuk mengecek pemahaman kalian setelah melakukan kegiatan “*Mari Beraktivitas*”, kerjakan soal pada “*Cobalah*” berikut.

COBALAH



1. Tentukan suku pertama dan beda, jika diketahui $U_6 = -5$ dan $U_{10} - U_2 = -2$.
2. Di antara bilangan 23 dan 119 disisipkan sebelas bilangan sehingga membentuk barisan Aritmetika, tuliskan barisan itu.
3. Barisan $(3k + 12)$, $(2k + 16)$, $(44 - k)$, ... merupakan 3 suku pertama suatu barisan Aritmetika. Tentukan rumus suku ke- n dari barisan tersebut.
4. Diketahui U_n menyatakan suku ke- n suatu barisan Aritmetika. Jika $U_p = q$ dan $U_q = p$, tentukan $U_{(p+q)}$.
5. Diketahui suku tengah suatu barisan Aritmetika adalah 25. Jika beda dan suku ke-5 berturut-turut adalah 4 dan 21, tentukan jumlah semua suku pada barisan itu.
6. Dari suatu deret Aritmetika diketahui $U_6 + U_9 + U_{12} + \dots + U_{15} = 20$. Tentukan S_{20} .
7. Jumlah n suku pertama suatu deret Aritmetika dirumuskan oleh $S_n = 3n^2 - 4n$, tentukan U_{10} .



Setelah melakukan kegiatan “*Cobalah*”, maka untuk mengembangkan kemampuan kalian lakukan kegiatan “*Siap Tantangan*” dengan menjawab soal tantangan berikut.

SIAP TANTANGAN



SOAL TANTANGAN:

Tiga bilangan merupakan 3 suku berurutan dari barisan Aritmetika yang suku pertamanya adalah 2. Jumlah ketiga bilangan tersebut 51 dan yang terbesar adalah 6 kurangnya dari suku ke-9. Salah satu dari ketiga bilangan tersebut adalah

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

E. 16



Setelah melakukan serangkaian kegiatan pada aktivitas 1.1, tulilah simpulan tentang apapun yang kalian ketahui mengenai barisan dan deret Aritmetika!

Simpulan :

.....

.....

.....

.....

.....





Berlatihlah untuk memperkuat pemahaman kalian tentang materi yang dipelajari pada Aktivitas 1.1 dengan mengerjakan tugas berikut.

TUGAS

Kerjakan tugas individu ini (**di rumah**) sebagai tugas untuk cek pemahaman pada pertemuan ini. Tunjukkan ke guru pengajar kalian pada pertemuan berikutnya.

SOAL TUGAS:

1. Dari barisan aritmetika diketahui $U_2 = 7$ dan $U_5 = -2$. Tentukan S_{10} .
2. Diberikan 3 suku berurutan dari barisan aritmetika: $2a + b$, $6a + b$, $14a + b$.
Tentukan nilai a dan b .
3. Tentukan jumlah semua bilangan bulat antara 250 dan 1.000 yang habis dibagi 7.
4. Sebuah barisan aritmetika, diketahui $U_7 = 7\sqrt{2} + 5$ dan $U_{11} = 11\sqrt{2} + 9$. Tentukan U_{10} .

Barisan dan Deret Geometri.



Perhatikan suasana kelas kalian, pastikan tempat kelas kalian *bersih, rapi, dan aman*. Kemudian lakukan aktivitas belajar.

Setelah melakukan kegiatan pada "Aktivitas 1.1", selanjutnya lakukan kegiatan "Mari Beraktivitas" berikut.

Mari Beraktivitas



Pada kegiatan ini, kalian akan mempelajari tentang barisan dan deret Geometri.



1. Bentuk Umum

Barisan Geometri: $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ atau $ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, ar^n$

Deret Geometri: $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ atau $ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$

2. Rumus Barisan dan Deret Geometri

(i) Rasio (r):

$$\checkmark r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

$$\checkmark r^{p-q} = \frac{U_p}{U_q}$$

$$\checkmark r' = \sqrt[k+1]{r} \text{ dan } n' = a + (n-1)k$$

dengan: r' = rasio baru yang diperoleh dari suatu barisan Geometri yang telah disisipi satu atau lebih suku bilangan yang lain;

n' = banyaknya suku dari barisan Geometri yang baru

k = banyaknya bilangan yang disisipkan

(ii) Suku ke-n (U_n):

$$\checkmark U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$\checkmark U_{(p+q)} = U_p \cdot r^q \text{ dengan } U_{(p+q)} = \text{suku ke-}(p+q) \text{ dan } U_p = \text{suku ke-}p$$

(iii) Jumlah n suku pertama (S_n):

$$\checkmark S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ untuk } r > 1$$

$$\checkmark S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ untuk } r < 1$$

(iv) Hubungan U_n dan S_n : $U_n = S_n - S_{(n-1)}$

3. Rumus Deret Geometri Tak Hingga (S_∞)

$S_\infty = \infty$ untuk $r < -1$ atau $r > 1$ (deret divergen)

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$ untuk $-1 < r < 1$ (deret konvergen)

Contoh:

a) $1 + 4 + 16 + 64 + \dots = ?$

b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = ?$

Jawab:

a) $1 + 4 + 16 + 64 + \dots = \infty$ karena $r = \frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = 4 > 1$

b) $a = 1$ dan $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Maka: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$



Untuk mengecek pemahaman kalian setelah melakukan kegiatan “*Mari Beraktivitas*”, kerjakan soal pada “*Cobalah*” berikut.

COBALAH



1. Diberikan barisan geometri 4, a, b, 32. Tentukan nilai (a + b).
2. Sisipkan 4 bilangan di antara $\frac{1}{25}$ dan -125 agar menjadi barisan geometri.
3. Dari barisan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Tentukan U_{10} .
4. Diketahui $U_2 = a^{-3}$ dan $U_3 = a^k$. Jika $U_7 = a^{42}$, tentukan nilai k.
5. Diketahui 3 bilangan membentuk barisan geometri. Jika jumlah ketiga bilangan itu 13 dan hasil kali ketiga bilangan itu 27, tentukan jumlah bilangan pertama dan ketiga.
6. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga dari $1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1.000} + \dots = \dots$.
7. Diketahui persamaan $2x^2 + x + q = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Jika $x_1, x_2, \frac{1}{2}(x_1x_2)$ membentuk barisan geometri, tentukan nilai q.



Setelah melakukan kegiatan “*Cobalah*”, maka untuk mengembangkan kemampuan kalian lakukan kegiatan “*Siap Tantangan*” dengan menjawab soal tantangan berikut.

SIAP TANTANGAN



SOAL TANTANGAN:

Pada suatu barisan geometri dengan $U_1 \in$ bilangan Bulat dan $r > 1$. Diketahui dua kali jumlah empat suku pertama adalah tiga kali jumlah dua suku genap pertama. Jika di antara suku-suku tersebut disisipkan 4 bilangan dengan cara: antara suku kedua dan ketiga disisipkan 1 bilangan, dan antara suku ketiga dan suku keempat disisipkan 3 bilangan, maka akan terbentuk barisan aritmetika dengan beda r. Jumlah bilangan yang disisipkan adalah

A. 14

B. 24

C. 28

D. 32

E. 42



simpulan dan tugas



Setelah melakukan serangkaian kegiatan pada aktivitas 1.2, tulislah simpulan tentang apapun yang kalian ketahui mengenai barisan dan deret Geometri!

Simpulan:

.....

.....

.....

.....

Maḡa-3.6/4.6/04/01



Berlatihlah untuk memperkuat pemahaman kalian tentang materi yang dipelajari pada Aktivitas 1.2 dengan mengerjakan tugas berikut.

TUGAS



Kerjakan tugas individu ini (**di rumah**) sebagai tugas untuk cek pemahaman pada pertemuan ini. Tunjukkan ke guru pengajar kalian pada pertemuan berikutnya.

SOAL TUGAS:

1. Diketahui barisan geometri $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{32}{729}$. Jika $U_n = \frac{32}{729}$, tentukan nilai n yang memenuhi.
2. Diketahui suku pertama suatu barisan geometri adalah $\sqrt{3}$ dan suku kedua adalah $3 + \sqrt{3}$. Tentukan U_3 .
3. Jika x , $2x + 2$, dan $4x + 10$ adalah tiga suku pertama dalam barisan geometri, tentukan nilai dari suku ke-5.
4. Jika diketahui suatu barisan geometri dengan $U_2 + U_3 = 16$ dan $U_4 + U_5 = \frac{16}{9}$. Tentukan rasio deret geometri tersebut.

AKTIVITAS 1.3

Pertumbuhan dan Peluruhan.



Setelah melakukan kegiatan pada "Aktivitas 1.2", selanjutnya lakukan kegiatan "Mari Beraktivitas" berikut.

Mari Beraktivitas



Pada kegiatan ini, kalian akan mempelajari tentang Pertumbuhan dan Peluruhan.



Pertumbuhan

Pertumbuhan merupakan aplikasi dari konsep barisan dan deret Aritmetika/Geometri naik. Secara umum ditulis: $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ dengan $U_1 < U_2 < U_3 < \dots < U_n$

Contoh:

Penduduk sebuah kota mengalami peningkatan sebesar 2% setiap tahun dari tahun sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk tahun 2012, jumlah penduduk di kota tersebut 900.000 jiwa. Berapa jumlah penduduk di kota tersebut pada tahun 2019?

Jawab:

Diketahui: $U_1 = a = 900.000$
 $i = 2\% = 0,02$
 $r = 1 + i = 1 + 0,02 = 1,02$
 $n = 2019 - 2012 + 1 = 8$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$\begin{aligned} U_8 &= 900.000 (1,02)^{8-1} \\ &= 900.000 (1,02)^7 \\ &= 1.033.817 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah penduduk di kota tersebut pada tahun 2019 adalah 1.033.817 jiwa.

Peluruhan

Pertumbuhan merupakan aplikasi dari konsep barisan dan deret Aritmetika/Geometri turun. Secara umum ditulis: $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ dengan $U_1 > U_2 > U_3 > \dots > U_n$

Contoh:

Sebuah pabrik membeli mesin produksi pada tahun 2014 seharga Rp500.000.000,00. Mesin tersebut mengalami penurunan harga sebesar 5% setiap tahun dari tahun sebelumnya. Berapa harga mesin pada tahun 2019?

Jawab:

Diketahui: $U_1 = a = 500.000.000$
 $i = 5\% = 0,05$
 $r = 1 - i = 1 - 0,05 = 0,95$
 $n = 2019 - 2014 + 1 = 6$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$\begin{aligned} U_6 &= 500.000.000 (0,95)^{6-1} \\ &= 500.000.000 (0,95)^5 \\ &= 368.890.468,75 \end{aligned}$$

Jadi, harga mesin pada tahun 2019 adalah Rp.368.890.468,75.



Untuk mengecek pemahaman kalian setelah melakukan kegiatan “*Mari Beraktivitas*”, kerjakan soal pada “*Cobalah*” berikut.

COBALAH



1. Penduduk sebuah kota mengalami peningkatan sebesar $a\%$ setiap tahun dari tahun sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk pada tahun 2010, jumlah penduduk di kota tersebut 270.000 jiwa. Jika pada tahun 2015 jumlah penduduk di kota tersebut sebanyak 313.004 jiwa, berapa jumlah penduduk pada tahun 2020?
2. Kultur jaringan pada suatu uji laboratorium menunjukkan bahwa satu bakteri dapat membelah diri menjadi 2 dalam waktu 5 menit. Pada awal kultur jaringan tersebut terdapat 500 bakteri, berapa banyak bakteri setelah 2 jam?
3. Populasi lebah di suatu tempat pada tanggal 4 April 2019 adalah 10.000 ekor. Tiap 2 hari populasinya bertambah 20% dari jumlah semula. Berapa populasi lebah tersebut pada tanggal 18 April 2019?
4. Suatu bahan radioaktif yang semula berukuran 150 gram mengalami reaksi kimia sehingga meluruh 15% dari ukuran sebelumnya setiap 16 jam. Berapa ukuran bahan radioaktif tersebut setelah 4 hari?
5. Harga sebuah mesin pada saat pembelian adalah Rp5.000.000,00. Setiap tahun, harganya menyusut 5% terhadap nilai pada awal permulaan tahun. Berapa harga mesin tersebut pada akhir tahun ke-10?
6. Berdasarkan penelitian, diketahui bahwa populasi hewan A berkurang menjadi setengahnya tiap 10 tahun. Pada tahun 2018 populasinya tinggal 1 juta ekor. Berapa populasi hewan A pada tahun 1978?



Setelah melakukan kegiatan “*Cobalah*”, maka untuk mengembangkan kemampuan kalian lakukan kegiatan “*Siap Tantangan*” dengan menjawab soal tantangan berikut.



SIAP TANTANGAN

SOAL TANTANGAN:

Diperkirakan jumlah penduduk dalam suatu kota tertentu dalam 4 tahun naik 14% setiap tahun dari tahun sebelumnya. Berapa persen kenaikan penduduk setelah 4 tahun?

A. 56

B. 70

C. 148

D. 169

E. 193



simpulan dan tugas



Setelah melakukan serangkaian kegiatan pada aktivitas 1.3, tulislah simpulan tentang apapun yang kalian ketahui mengenai pertumbuhan dan peluruhan!

Simpulan:

.....

.....

.....

.....

.....





Berlatihlah untuk memperkuat pemahaman kalian tentang materi yang dipelajari pada Aktivitas 1.3 dengan mengerjakan tugas berikut.

TUGAS



Kerjakan tugas individu ini (**di rumah**) sebagai tugas untuk cek pemahaman pada pertemuan ini. Tunjukkan ke guru pengajar kalian pada pertemuan berikutnya.

SOAL TUGAS:

1. Suatu jenis bakteri akan membelah diri menjadi dua setelah 1 detik. Jika pada saat permulaan ada 5 bakteri, berapa lama bakteri itu membelah diri hingga banyaknya bakteri menjadi sebanyak 320?
2. Seorang produsen berhasil meningkatkan unit produksinya 10% setiap tahun dari tahun sebelumnya. Hasil produksi pada awal tahun ke-5 adalah 14.641 unit. Tentukan hasil produksi pada awal tahun ke-3.
3. Pak Amir menyetujui untuk bekerja pada hari pertama dengan honor Rp.100.000,00; hari kedua Rp.200.000,00; hari ketiga Rp.400.000,00; hari keempat Rp.800.000,00; demikian seterusnya. Berapa besar honor pak Amir pada hari ke-15?
4. Pada tahun 2009, jumlah penduduk kabupaten A adalah 206.730 jiwa. Kemudian pada tahun 2019, jumlah penduduk kabupaten A menjadi 278.741 jiwa. Berapa laju pertumbuhan penduduk kabupaten A per tahun?

👉 Untuk mengecek pemahaman kalian setelah melakukan kegiatan "Mari Beraktivitas", kerjakan soal pada "Cobalah" berikut.



1. Doni meminjam Rp.10.000.000,00 ke bank yang memberikan bunga tunggal 7,5% per tahun. Berapa bunga dan total uang yang harus dibayarkan Doni ke bank jika ia meminjam selama: a) 4 tahun b) 5 tahun 3 bulan
2. Harga sebuah kendaraan jenis minibus sebesar Rp.180.000.000,00 jika dibayar tunai. Nina membeli kendaraan itu secara angsuran selama 1 tahun dan harganya menjadi Rp.240.000.000,00. Berapa besarnya suku bunga tunggal per bulan untuk pembelian secara angsuran tersebut?
3. Tentukan nilai akhir sebuah modal sebesar Rp.125.000.000,00 yang diperbungakan dengan bunga majemuk selama 8 tahun:
 - a) dengan bunga $2\frac{1}{2}\%$ tiap triwulan
 - b) dengan bunga 6% tiap setengah tahun
4. Suatu modal sebesar Rp.3.200.000,00 diperbungakan dengan bunga majemuk. Setelah 10 tahun modal itu menjadi Rp.4.514.000,00. Tentukan persen bunganya.

👉 Setelah melakukan kegiatan "Cobalah", maka untuk mengembangkan kemampuan kalian lakukan kegiatan "Siap Tantangan" dengan menjawab soal tantangan berikut.



SIAP TANTANGAN

SOAL TANTANGAN:
 Beda antara bunga majemuk dan bunga tunggal yang diberikan kepada sebuah tabungan dengan suku bunga 10% per tahun selama 3 tahun adalah Rp.310.000,00. Berapakah besar tabungan awalnya?

A. Rp.5.000.000,00	C. Rp.10.000.000,00	E. Rp.15.000.000,00
B. Rp.7.500.000,00	D. Rp.12.500.000,00	

simpulan dan tugas

👉 Setelah melakukan serangkaian kegiatan pada aktivitas 1.4, tuliskan simpulan tentang apapun yang kalian ketahui mengenai bunga tunggal dan bunga majemuk!

Simpulan:

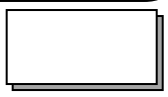
.....

.....

.....

.....

.....





Berlatihlah untuk memperkuat pemahaman kalian tentang materi yang dipelajari pada Aktivitas 1.4 dengan mengerjakan tugas berikut.

TUGAS

Kerjakan tugas individu ini (**di rumah**) sebagai tugas untuk cek pemahaman pada pertemuan ini. Tunjukkan ke guru pengajar kalian pada pertemuan berikutnya.

SOAL TUGAS:

1. Heri meminjam uang di bank sebesar Rp.900.000,00. Bank tersebut memberikan pinjaman dengan bunga tunggal 15% per tahun. Jika Heri ingin mengembalikan pinjaman dengan cara mengangsur selama 18 bulan, berapa besar angsuran tiap bulannya?
2. Sebuah pinjaman harus dikembalikan selama 10 bulan dengan angsuran dan bunganya sebesar Rp.414.000,00 per bulan. Jika bank memberikan pinjaman dengan bunga tunggal 18% per tahun, berapa besar pinjaman mula-mula?
3. Modal sebesar Rp.500.000.000,00 disimpan di bank dengan suku bunga majemuk 20% per tahun dan bunga dibayarkan setiap 3 bulan sekali. Tentukan besar bunga selama 6 bulan.
4. Sebuah modal sebesar Rp.1.096.787.072,00 diinvestasikan dengan sistem suku bunga majemuk sebesar 11% per tahun. Setelah berapa tahun modal itu menjadi Rp.1.500.000.000,00?

AKTIVITAS 1.5

Rente dan Anuitas



Perhatikan suasana kelas kalian, pastikan tempat kelas kalian **bersih, rapi, dan aman**. Kemudian lakukan kegiatan berikut.

Setelah melakukan kegiatan pada “Aktivitas 1.5”, selanjutnya lakukan kegiatan “*Mari Beraktivitas*” berikut.

Mari Beraktivitas



Pada kegiatan ini, kalian akan mempelajari tentang rente dan anuitas.



A. RENTE (NILAI AKHIR)

Rente adalah serentetan modal yang dibayar (atau diterima), yang tetap besarnya pada setiap jangka waktu tertentu.

- a) **Rente Praenumerando**, jika pembayarannya dilakukan pada setiap awal jangka waktu pembayaran rente itu. Rumus Umum: $NA_{Pra} = \frac{M(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$
- b) **Rente Postnumerando**, jika pembayarannya dilakukan pada setiap akhir jangka waktu pembayaran rente itu. Rumus Umum: $NA_{Post} = \frac{M[(1+i)^n - 1]}{i}$

Keterangan:

NA_{Pra} = Nilai akhir Rente Praenumerando

i = bunga majemuk (dalam %)

NA_{Post} = Nilai akhir Rente Postnumerando

n = jangka waktu

M = Modal (simpanan awal)

Contoh:

Selama 3 bulan berturut-turut setiap bulannya Ani menyimpan uangnya di bank sebesar Rp.1.000.000,00 dengan suku bunga majemuk 2% per bulan. Berapa besar modal setelah 3 bulan (akhir bulan ke-3)?

Jawab:

Diketahui: $M = 1.000.000$, $i = 2\% = 0,02$ per bulan, dan $n = 3$ bulan.

(1) Dengan Rente **Praenumerando**

$$NA_{Pra} = \frac{M(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{1.000.000(1+0,02)[(1+0,02)^3 - 1]}{0,02} = \frac{1.000.000(1,02)(0,061208)}{0,02} = 3.121.608$$

Jadi besar simpanannya/modalnya setelah 3 bulan (akhir bulan ke-3) adalah Rp.3.121.608.

(2) Dengan Rente **Postnumerando**

$$NA_{Post} = \frac{M[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{1.000.000[(1+0,02)^3 - 1]}{0,02} = \frac{1.000.000(0,061208)}{0,02} = 3.060.400$$

Jadi besar simpanannya/modalnya setelah 3 bulan (akhir bulan ke-3) adalah Rp.3.060.400

B. RENTE (NILAI TUNAI)

Merupakan kebalikan dari poin (A) di atas.

- a) **Rente Praenumerando**, Rumus Umum: $NT_{Pra} = \frac{M(1+i)[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$

Contoh:

Setiap **awal bulan** selama 6 bulan, Dono menerima beasiswa sebesar Rp.1.000.000,00 dari sebuah bank. Untuk suatu keperluan Dono meminta beasiswa tersebut dibayarkan semua pada awal bulan pertama dan pihak bank menyetujui dengan perhitungan bunga 2% per bulan. Berapa jumlah uang yang diterima Dono?

Jawab:

Diketahui: $M = 1.000.000$, $i = 2\% = 0,02$ per bulan, dan $n = 6$ bulan.

$$NT_{Pra} = \frac{M(1+i)[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = \frac{1.000.000(1+0,02)[1 - (1+0,02)^{-6}]}{0,02} = \frac{1.000.000(1,02)(0,112028617)}{0,02} = 5.713.459,46$$

Jadi jumlah semua uang yang diterima Dono pada awal bulan pertama adalah Rp.5.713.459,46.

Mawa-3.6/4.6/04/01

b) **Rente Postnumerando**, Rumus Umum: $NT_{\text{Post}} = \frac{M[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$

Contoh:

Setiap **akhir bulan** selama 6 bulan, Dono menerima beasiswa sebesar Rp.1.000.000,00 dari sebuah bank. Untuk suatu keperluan Dono meminta beasiswa tersebut dibayarkan semua pada awal bulan pertama dan pihak bank menyetujui dengan perhitungan bunga 2% per bulan. Berapa jumlah uang yang diterima Dono?

Jawab:

Diketahui: $M = 1.000.000$, $i = 2\% = 0,02$ per bulan, dan $n = 6$ bulan.

$$NT_{\text{Pra}} = \frac{M[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = \frac{1.000.000[1 - (1+0,02)^{-6}]}{0,02}$$

$$= \frac{1.000.000(0,112028617)}{0,02} = 5.601.430,89$$

Jadi jumlah semua uang yang diterima Dono pada awal bulan pertama adalah Rp.5.601.430,89.

C. RENTE KEKAL

Merupakan rente yang jangka waktu pembayarannya terus menerus (tidak terbatas).

a) Jika pembayarannya dilakukan pada setiap awal periode disebut **Rente Praenumerando Kekal**.

$$\text{Rumus Umum: } NT_{\text{Pra K}} = \frac{M(1+i)}{i}$$

b) Jika pembayarannya dilakukan pada setiap akhir periode disebut **Rente Postnumerando Kekal**.

$$\text{Rumus Umum: } NT_{\text{Post K}} = \frac{M}{i}$$

Contoh:

(1) Suatu badan sosial memberikan bantuan kepada Yayasan "Yatim Piatu" uang sebesar Rp.500.000,00 tiap bulan dengan **jangka waktu yang tak terbatas** dengan bunga 2% tiap bulan dan penerimaan tiap awal bulan. Jika Yayasan tersebut meminta agar bantuan diterima sekaligus pada awal bulan pertama, berapakah besar uang yang akan diterima oleh Yayasan?

Jawab:

Diketahui: $M = 500.000$ dan $i = 2\% = 0,02$ per bulan.

$$NT_{\text{Pra K}} = \frac{M(1+i)}{i} = \frac{500.000(1+0,02)}{0,02} = \frac{500.000(1,02)}{0,02} = 25.500.000$$

Jadi jumlah semua uang yang diterima Yayasan pada awal bulan pertama adalah Rp.25.500.000,00.

(2) Dari contoh (1) jika Yayasan tersebut menerima bantuan tiap akhir bulan, dan Yayasan tersebut meminta agar bantuan diterima sekaligus pada awal bulan pertama. Berapa besar uang yang akan diterima oleh Yayasan tersebut?

Jawab:

$$NT_{\text{Post K}} = \frac{M}{i} = \frac{500.000}{0,02} = 25.000.000$$

Jadi jumlah semua uang yang diterima Yayasan pada awal bulan pertama adalah Rp.25.000.000,00.

D. ANUITAS

Anuitas adalah suatu rangkaian pembayaran/penerimaan sejumlah uang dengan periode waktu yang sama untuk setiap pembayaran. Rumus Umum: $A = \frac{M \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ atau $A = \frac{M \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$.

Contoh:

Utang sebesar Rp.5.000.000,00 akan dilunasi dengan cara anuitas bulanan dalam 8 kali angsuran dengan suku bunga 5% per bulan. Tentukan besar anuitasnya?

Jawab:

Diketahui: $M = 5.000.000$; $i = 5\% = 0,05$ per bulan; dan $n = 8$.

$$A = \frac{M \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1.000.000(0,05)(1+0,05)^8}{(1+0,05)^8 - 1} = \frac{369.363,86}{0,477455443} = 773.609,07$$

Jadi besar anuitasnya adalah Rp.773.609,07.

E. RENCANA ANGSURAN (RENCANA PELUNASAN)

Merupakan strategi pelunasan pembayaran pinjaman dan pembayaran bunga.

$$\text{angsuran} = \text{Anuitas} - \text{bunga} \Leftrightarrow a = A - b$$

Contoh:

Utang sebesar Rp.40.000.000,00 akan dilunasi secara anuitas sebesar Rp.10.000.000,00 per bulan dengan besar suku bunga 5% per bulan. Buatlah rencana angsuran dan tabel pelunasannya.

Jawab:

Diketahui: $M = 40.000.000$; $i = 5\% = 0,05$ per bulan; dan $A = 10.000.000$

Rencana Angsuran:

- Bunga bulan ke-1 (b_1) : $M \times i = 40.000.000 \times 0,05 = 2.000.000$
- Angsuran bulan ke-1 (a_1) : $A - b_1 = 10.000.000 - 2.000.000 = 8.000.000$
- Sisa pinjaman akhir bulan ke-1 (S_1) : $M - a_1 = 40.000.000 - 8.000.000 = 32.000.000$
- Bunga bulan ke-2 (b_2) : $S_1 \times i = 32.000.000 \times 0,05 = 1.600.000$
- Angsuran bulan ke-2 (a_2) : $A - b_2 = 10.000.000 - 1.600.000 = 8.400.000$
- Sisa pinjaman akhir bulan ke-2 (S_2) : $S_1 - a_2 = 32.000.000 - 8.400.000 = 23.600.000$
- Bunga bulan ke-3 (b_3) : $S_2 \times i = 23.600.000 \times 0,05 = 1.180.000$
- Angsuran bulan ke-3 (a_3) : $A - b_3 = 10.000.000 - 1.180.000 = 8.820.000$
- Sisa pinjaman akhir bulan ke-3 (S_3) : $S_2 - a_3 = 23.600.000 - 8.820.000 = 14.780.000$
- Bunga bulan ke-4 (b_4) : $S_3 \times i = 14.780.000 \times 0,05 = 739.000$
- Angsuran bulan ke-4 (a_4) : $A - b_4 = 10.000.000 - 739.000 = 9.261.000$
- Sisa pinjaman akhir bulan ke-4 (S_4) : $S_3 - a_4 = 14.780.000 - 9.261.000 = 5.519.000$
- Bunga bulan ke-5 (b_5) : $S_4 \times i = 5.519.000 \times 0,05 = 275.950$

Karena $S_4 < A$ maka $a_5 = S_4 = 5.519.000$

Tabel Pelunasan:

Pinjaman Awal Bulan ke-n	Anuitas = 10.000.000		Sisa Pinjaman Akhir Bulan ke-n
	Bunga 5%	Angsuran	
40.000.000	2.000.000	8.000.000	32.000.000
32.000.000	1.600.000	8.400.000	23.600.000
23.600.000	1.180.000	8.820.000	14.780.000
14.780.000	739.000	9.261.000	5.519.000
5.519.000	275.950	5.519.000	0

F. HUBUNGAN ANTAR ANGSURAN

Rumus Umum: $a_n = a_1(1 + i)^{n-1}$ dengan a_n = angsuran ke-n dan a_1 = angsuran pertama

Contoh:

Utang sebesar Rp.7.500.000,00 akan dilunasi dengan anuitas bulanan sebesar Rp.500.000,00 dan besar suku bunga 2% per bulan. Tentukan angsuran ke-4.

Jawab:

Diketahui: $M = 7.500.000$; $i = 2\% = 0,02$ per bulan; dan $A = 500.000$

Bunga bulan pertama (b_1) = $M \times i = 7.500.000 \times 0,02 = 150.000$

Angsuran bulan pertama (a_1) = $A - b_1 = 500.000 - 150.000 = 350.000$

Angsuran bulan ke-n (a_n) = $a_1(1 + i)^{n-1} = 350.000(1 + 0,02)^3 = 350.000(1.061.208) = 371.422,8$

Jadi angsuran ke-4 adalah Rp.371.422,8

G. SISA PINJAMAN

Rumus Umum: $S_n = \frac{b_{n+1}}{i}$ dengan S_n = Sisa Pinjaman ke-n dan b_{n+1} = bunga ke-n

Contoh:

Pinjaman sebesar Rp.10.000.000,00 akan dilunasi dengan 10 kali anuitas bulanan. Jika suku bunganya 3% per bulan. Tentukan sisa pinjaman setelah mengangsur selama 6 bulan.

Jawab:

Diketahui: $M = 10.000.000$; $i = 3\% = 0,03$ per bulan; dan $n = 10$

$$A = \frac{M \cdot i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} = \frac{10.000.000(0,03)(1 + 0,03)^{10}}{(1 + 0,03)^{10} - 1} = \frac{403.174,91}{0,343916379} = 1.172.305,06$$

Bunga bulan ke-1 (b_1) = $M \times i = 10.000.000 \times 0,03 = 300.000$

Angsuran ke-1 (a_1) = $A - b_1 = 1.172.305,06 - 300.000 = 872.305,06$

Angsuran ke-7 (a_7) = $a_1(1 + i)^6 = 872.305,06(1 + 0,03)^6 = 1.041.577,86$

Bunga bulan ke-7 (b_7) = $A - a_7 = 1.172.305,06 - 1.041.577,86 = 130.727,2$

$$S_6 = \frac{b_7}{i} = \frac{130.727,2}{0,03} = 4.357.573,33$$

Jadi sisa pinjaman setelah mengangsur selama 6 bulan adalah Rp.4.357.573,33

Mawa-3.674.6704/01



Untuk mengecek pemahaman kalian setelah melakukan kegiatan “*Mari Beraktivitas*”, kerjakan soal pada “*Cobalah*” berikut.

COBALAH



1. Setiap awal tahun Ayah menyetorkan uang ke bank sebesar Rp.1.000.000,00. Jika bank memberi bunga majemuk 4% per tahun, tentukan jumlah uang simpanan Ayah setelah akhir tahun ke-3.
2. Carilah nilai akhir suatu rente postnumerando jika pembayaran setiap tahun sebesar Rp.2.500.000,00 selama 8 tahun dengan sistem bunga majemuk 6% per tahun.
3. Carilah nilai tunai suatu rente postnumerando jika pembayaran setiap tahun sebesar Rp.3.000.000,00 selama 10 tahun dengan sistem bunga majemuk 4% per tahun.
4. Seorang anak mendapat beasiswa sebesar Rp.1.000.000,00 setiap awal bulan mulai bulan Januari 2016 selama 3 tahun. Dengan perhitungan bunga majemuk 2% per bulan. Jika anak tersebut ingin menerima semua uangnya pada tanggal 1 Januari 2016, berapa besar uang yang diterimanya?
5. Suatu pinjaman sebesar Rp.450.000.000,00 dibayar pada akhir tiap bulan sebanyak 10 kali. Pembayaran pertama dilakukan setelah 1 bulan dengan bunga 2% per tahun. Hitunglah:
 - a) besar anuitasnya
 - b) angsuran pada akhir bulan ke-6
6. Suatu pinjaman sebesar Rp.1.500.000,00 akan dilunasi dengan 8 anuitas. Pembayaran pertama dilakukan sesudah 1 tahun, dengan bunga 3,5% per tahun. Hitunglah sisa utang pada akhir tahun ke-3.



simpulan dan tugas



Setelah melakukan serangkaian kegiatan pada aktivitas 1.5, tuliskan simpulan tentang apapun yang kalian ketahui mengenai rente dan anuitas!

Simpulan:

.....

.....

.....

.....



Berlatihlah untuk memperkuat pemahaman kalian tentang materi yang dipelajari pada Aktivitas 1.5 dengan mengerjakan tugas berikut.

TUGAS



Kerjakan tugas individu ini (**di rumah**) sebagai tugas untuk cek pemahaman pada pertemuan ini. Tunjukkan ke guru pengajar kalian pada pertemuan berikutnya.

SOAL TUGAS:

1. Hitunglah nilai akhir modal yang ditabung setiap awal bulan sebesar Rp.500.000,00 setelah 4 tahun, dengan suku bunga majemuk 2% per bulan.
2. Seseorang meminjam uang sebesar Rp.2.500.000,00 di suatu bank dengan bunga 6% per tahun. Pinjaman itu akan dilunasi dengan anuitas selama 8 tahun, di mana anuitas pertama dibayar setelah 1 tahun. Hitunglah besar anuitas itu.
3. Suatu utang sebesar Rp.350.000.000,00 dilunasi dalam 5 tahun dengan anuitas. Anuitas dibayar sesudah 1 tahun dengan bunga 5% per tahun. Buatlah rencana angsurannya.

Mawa-3.6/4.6/04/01



Berlatihlah untuk mempersiapkan diri dalam menghadapi Ulangan Harian dengan mengerjakan Uji Kompetensi berikut.



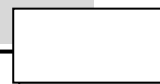
Uji Kompetensi

Ujilah kompetensi kalian dengan berlatih soal-soal di bawah ini.

Soal-soal Uji Kompetensi, terbagi dalam 2 bagian, yaitu: Pilihan Ganda dan Uraian.

1. Diskusikan dengan kelompok Kalian.

2. Tuliskan jawaban kalian pada buku tulis.



A. Pilihan Ganda

- Jika S_n menyatakan jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika, maka $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = \dots$.
A. n kali suku pertama deret
B. n kali beda deret
C. suku pertama deret
D. beda deret
E. nol
- Empat buah bilangan merupakan suku berurutan suatu deret aritmetika. Hasil kali kedua suku tengahnya sama dengan 135 dan hasil kali kedua suku tepinya sama dengan 63. Jumlah kedua suku tengah itu adalah ...
A. -35 atau 35
B. -27 atau 27
C. -24 atau 24
D. -21 atau 21
E. -15 atau 15
- Jumlah deret geometri tak hingga $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}$ adalah ...
A. $3(\sqrt{3} + 1)$
B. $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$
C. $\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$
D. $\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$
E. $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - 1)$
- Jika t_n adalah suku ke- n dari suatu barisan geometri dan $p > 3$, maka $t_{p-3} \cdot t_{3p+5} = \dots$.
A. $(2t_{p+1})^2$
B. $(t_{2p+1})^2$
C. $(t_{2p})^2$
D. $(t_{2p-1})^2$
E. $(t_{p-1})^2$
- Sebuah bola yang jatuh dari ketinggian 10 meter memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{4}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus-menerus hingga bola berhenti. Panjang seluruh lintasan bola adalah ... meter.
A. 60
B. 70
C. 80
D. 90
E. 100
- Pada akhir tahun 2014 penduduk desa Sukamaju adalah 225.000 jiwa. Jika tiap tahun jumlah penduduk bertambah 20%, maka penduduk desa Sukamaju pada akhir tahun 2019 berjumlah ... jiwa.
A. 466.560
B. 559.872
C. 671.846
D. 806.215
E. 967.458
- Bimo meminjam uang di sebuah bank sebesar Rp.3.000.000,00 yang akan diangsur tiap bulan selama 5 bulan. Jika bank menggunakan sistem bunga tunggal 18% per tahun, maka sisa pinjaman setelah angsuran ke-3 adalah ...
A. Rp.645.000,00
B. Rp.1.280.000,00
C. Rp.1.290.000,00
D. Rp.1.935.000,00
E. Rp.1.950.000,00
- Vasya mendepositokan uang sebesar Rp.12.000.000,00 di sebuah bank. Bank itu memberikan suku bunga tunggal 7% per caturwulan. Supaya jumlah depositonya menjadi Rp.14.940.000,00, maka lamanya menyimpan uang tersebut adalah ... bulan. (1 caturwulan = 4 bulan)
A. 10
B. 12
C. 14
D. 15
E. 18
- Modal sebesar Rp.70.000.000,00 diinvestasikan selama 5 tahun dan setelah 5 tahun modal itu menjadi Rp.174.182.400,00 dengan sistem bunga majemuk. Suku bunga dari nilai investasi sebesar ... per tahun.
A. 10%
B. 15%
C. 18%
D. 20%
E. 25%

10. Sebuah modal setelah 2 tahun menjadi Rp.79.213.800,00. Jika suku bunga yang diberlakukan bunga majemuk sebesar 6% per tahun, besar modal awal sebesar
- A. Rp.87.719.400,00
 - B. Rp.86.966.600,00
 - C. Rp.75.000.000,00
 - D. Rp.70.500.000,00
 - E. Rp.70.000.000,00
11. Besar anuitas sebuah utang sebesar Rp.1.000.000,00 yang dilunasi dalam 5 tahun dengan anuitas pertama dibayar setelah 1 tahun dengan bunga 6% per tahun adalah
- A. Rp.201.432,40
 - B. Rp.237.396,40
 - C. Rp.250.457,40
 - D. Rp.288.591,50
 - E. Rp.290.457,50
12. Suatu pinjaman akan dilunasi dengan 7 anuitas. Anuitas pertama dibayar setelah satu tahun. Suku bunga 6% per tahun. Angsuran pada akhir tahun pertama sebesar Rp.2.382.843,53. Maka besar pinjamannya adalah
- A. Rp.10.000.000,00
 - B. Rp.15.000.000,00
 - C. Rp.20.000.000,00
 - D. Rp.25.000.000,00
 - E. Rp.30.000.000,00

B. Uraian.

1. Tiga bilangan membentuk deret geometri dengan jumlah 61. Jika suku pertama dikurangi 1, deret itu menjadi deret aritmetika. Tentukan ketiga bilangan itu.
2. Harga suatu barang menyusut setiap tahun 16% dari harga pada awal tahun. Jika harga barang tersebut Rp.1.000.000,00, tentukan harga barang setelah 5 tahun.
3. Suatu pinjaman uang sebesar Rp.2.000.000,00 dengan anuitas sebesar Rp.461.950,00 per bulan dan dengan bunga 5% per bulan. Buatlah rencana angsuran. Berapa bulan utang itu lunas?



Refleksi Diri



AKU PAHAM

Setelah kalian melakukan serangkaian proses belajar pada UKBM ini, maka berilah tanda centang (✓) pada setiap kompetensi berikut.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1.	Saya dapat menentukan beda, suku ke-n, dan jumlah n suku pertama suatu barisan dan deret aritmetika		
2.	Saya dapat menentukan rasio, suku ke-n, dan jumlah n suku pertama suatu barisan dan deret geometri.		
3.	Saya dapat menentukan rasio, suku pertama, dan jumlah tak hingga dari suatu barisan dan deret geometri tak hingga.		
4.	Saya dapat menggunakan barisan dan deret aritmetika maupun geometri untuk menyelesaikan masalah pertumbuhan dan peluruhan		
5.	Saya dapat menggunakan barisan dan deret aritmetika maupun geometri untuk menyelesaikan masalah bunga tunggal dan bunga majemuk		
6.	Saya dapat menggunakan barisan dan deret geometri untuk menyelesaikan masalah rente dan anuitas		



AKU SIAP

Berdasarkan hasil belajar saya dan cek list pada tabel di atas maka saya menyatakan:

- Siap untuk mengikuti tes formatif
- Belum siap untuk mengikuti tes formatif

Rekomendasi dari guru pengajar:

.....

.....

.....

Tanda Tangan
Guru Pengajar