

## RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN

---

<b>Satuan Pendidikan</b>	: SMA NEGERI 1 TOBOALI
<b>Mata Pelajaran</b>	: MATEMATIKA PEMINATAN
<b>Kelas/Semester</b>	: XII/1
<b>Materi Pokok</b>	: Limit Fungsi Trigonometri
<b>Alokasi Waktu</b>	: 4 x 45 menit (6 Pertemuan)

### A. Kompetensi Inti

KI 1: Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya

KI 2: Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, santun, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), bertanggung jawab, responsif, dan pro-aktif, dalam berinteraksi secara efektif sesuai dengan perkembangan anak di lingkungan, keluarga, sekolah, masyarakat dan lingkungan alam sekitar, bangsa, negara, kawasan regional, dan kawasan internasional.

KI 3: Memahami, menerapkan, menganalisis dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif pada tingkat teknis, spesifik, detil, dan kompleks berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI 4: Menunjukkan keterampilan menalar, mengolah, dan menyaji secara efektif, kreatif, produktif, kritis, mandiri, kolaboratif, komunikatif, dan solutif dalam ranah konkret dan abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah, serta mampu menggunakan metoda sesuai dengan kaidah keilmuan.

### B. KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
3.1 Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri	3.1.1 Menjelaskan rumus dasar limit fungsi trigonometri 3.1.2 Menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana 3.1.3 Menghitung nilai limit fungsi trigonometri
4.1 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri	4.1.1 Memecahkan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri menggunakan rumus-rumus trigonometri dan operasi-operasi aljabar 4.2.1 Menyusun model matematika berupa fungsi yang berhubungan dengan permasalahan yang diberikan

### C. Tujuan Pembelajaran

Melalui pendekatan saintifik model pembelajaran *Problem Based Learning*, peserta didik dapat menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri dan menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri dengan penuh rasa syukur, bertanggung jawab, disiplin, bekerja keras dan bekerja sama.

#### D. Materi Pembelajaran

1. Pengertian limit fungsi trigonometri
2. Menurunkan rumus limit fungsi trigonometri
  - a. Nilai limit fungsi trigonometri yang mengandung sinus dan tangen
  - b. Nilai limit fungsi trigonometri yang mengandung kosinus, sinus dan tangen

E. **Metode Pembelajaran** : Ceramah, tanya jawab, dan penugasan  
**Model Pembelajaran** : *Problem Based Learning*

F. **Media Pembelajaran** : Papan tulis, LCD, gambar ilustrasi pada LCD (projektor), laptop, HP dan media yang relevan

G. **Sumber Belajar** :

- a. Buku Matematika Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu Alam untuk kelas XI SMA dan MA Kurikulum 2013, Sukino, Erlangga, 2014
- b. Buku Matematika Untuk Kelas XI SMA dan MA Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu Alam penulis, Rosihan Ari Y dan Indriyastuti. Solo : Platinum, 2014.
- c. Seribu Pena Matematika SMU kelas 2 Untuk SMA dan MA, Husein Tampomas, Jakarta : Erlangga, 1999.

#### H. Langkah-Langkah Pembelajaran

##### Pertemuan 1 (2 x 45 menit)

**Indikator :** 3.1.1 Menjelaskan rumus dasar limit fungsi trigonometri

3.1.2 Menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana

Kegiatan	Deskripsi	Alokasi waktu
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Mengucapkan salam dan meminta seorang siswa untuk memimpin doa</li><li>2. Guru dan siswa mengecek kebersihan ruang kelas sebagai bentuk kepedulian terhadap lingkungan</li><li>3. Menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran secara disiplin dan bermakna;</li><li>4. Memberi motivasi belajar peserta didik secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi materi ajar dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional dan internasional, serta disesuaikan dengan karakteristik dan jenjang peserta didik;</li><li>5. Mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari;</li><li>6. Menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai; dan</li><li>7. Menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li></ol>	10 menit
Inti	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Peserta didik dibagi menjadi 7 kelompok</li></ol> <p><b>Stimulation</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>2. Peserta didik secara berkelompok diminta <b>mengamati</b> gambar di papan tulis tentang limit fungsi trigonometri secara intuitif</li></ol> <p><b>Problem statement</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>3. Peserta didik secara berkelompok mengidentifikasi gambar dan menghubungkan gambar tersebut dengan materi menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana, serta merumuskan <b>pertanyaan</b> terkait masalah yang belum</li></ol>	70 menit

	<p>dipahami secara kreatif.</p> <p>4. <b>Pertanyaan-pertanyaan</b> peserta didik diinventarisir oleh setiap kelompok dan kemudian diidentifikasi menjadi beberapa pertanyaan/masalah pokok yang akan diajukan/sampaikan kepada kelompok lain untuk ditemukan jawabannya dalam kegiatan diskusi.</p> <p>5. Peserta didik secara berkelompok menerima pertanyaan dari kelompok lainnya dan mencermati pertanyaan tersebut.</p> <p><b>Data Collecting</b></p> <p>6. Peserta didik secara berkelompok <b>mengumpulkan informasi/data</b> yang dari sumber yang relevan dan merumuskan hipotesis (jawaban sementara) terhadap pertanyaan yang diterima dari kelompok lain</p> <p><b>Data Processing</b></p> <p>7. Peserta didik secara berkelompok berdiskusi mengolah, mengklasifikasikan dan menafsirkan data hasil pengamatan tentang menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana terkait dengan pertanyaan yang diterima dari kelompok lain.</p> <p>8. Peserta didik mendiskusikan hasil pengolahan data dan memverifikasi hasil pengolahan dengan teori pada buku sumber, yaitu dengan melakukan:</p> <p><b>Verification</b></p> <p>9. Mengkonfirmasi data (jawaban) dengan teori yang berhubungan dengan menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana</p> <p>10. Memverifikasi jawaban hasil diskusi kelompok tentang hasil analisis data masing masing individu yang ada dalam kelompok.</p> <p><b>Generalisation</b></p> <p>11. Peserta didik secara berkelompok merumuskan kesimpulan dari masalah pokok yang didiskusikan, dan <b>mengomunikasikan</b> di depan kelas.</p>	
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Peserta didik menyimpulkan materi yang telah dipelajari</li> <li>2. Guru memberikan umpan balik berdasarkan simpulan peserta didik (Cinta Produk Indonesia)</li> <li>3. Guru melakukan penilaian pembelajaran</li> <li>4. Peserta didik merefleksi pembelajaran yang telah berlangsung</li> </ol>	10 menit

## Pertemuan ke 2 dan 3 (4 x @ 45 menit)

Indikator : 3.1.3 Menghitung nilai limit fungsi trigonometri

Kegiatan	Deskripsi	Alokasi waktu
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mengucapkan salam dan meminta seorang siswa untuk memimpin doa</li> <li>2. Guru dan siswa mengecek kebersihan ruang kelas sebagai bentuk kepedulian terhadap lingkungan</li> <li>3. menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran;</li> <li>4. Memberi motivasi belajar peserta didik secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi materi ajar dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional dan internasional, serta disesuaikan dengan karakteristik dan jenjang peserta didik;</li> <li>5. mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari;</li> <li>6. menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai; dan</li> <li>7. menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan</li> </ol>	10 menit

	sesuai silabus.	
Inti	<p>1. Peserta didik dibagi menjadi 7 kelompok</p> <p><b>Stimulation</b></p> <p>2. Guru memberikan permasalahan mengenai limit fungsi trigonometri yaitu <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 4x} = \dots</math> dengan mengaitkan kedalam sifat-sifat umum limit fungsi trigonometri dan rumus identitas trigonometri (sehingga tidak menghasilkan nilai <math>(\frac{0}{0})</math>).</p> <p>3. Peserta didik secara berkelompok diminta <b>mengamati</b> permasalahan tersebut.</p> <p><b>Problem statement</b></p> <p>4. Peserta didik secara berkelompok mengidentifikasi permasalahan yang diberikan dan menghubungkan dengan sifat umum limit trigonometri dan rumus identitas trigonometri dan menyelesaikan permasalahan yang diberikan, serta merumuskan <b>pertanyaan</b> terkait masalah yang belum dipahami.</p> <p>5. <b>Pertanyaan-pertanyaan</b> peserta didik diinventarisir oleh setiap kelompok dan kemudian diidentifikasi menjadi beberapa pertanyaan/masalah pokok yang akan diajukan/sampaikan kepada kelompok lain untuk ditemukan jawabannya dalam kegiatan diskusi.</p> <p>6. Peserta didik secara berkelompok menerima pertanyaan dari kelompok lainnya dan mencermati pertanyaan tersebut..</p> <p><b>Data Collecting</b></p> <p>7. Peserta didik secara berkelompok <b>mengumpulkan informasi/data</b> yang dari sumber yang relevan dan merumuskan hipotesis (jawaban sementara) terhadap pertanyaan yang diterima dari kelompok lain</p> <p><b>Data Processing</b></p> <p>8. Peserta didik secara berkelompok berdiskusi mengolah, mengklasifikasikan dan menafsirkan data hasil pengamatan tentang limit fungsi trigonometri dengan menggunakan sifat serta rumus identitas trigonometri terkait dengan pertanyaan yang diterima dari kelompok lain.</p> <p>9. Peserta didik mendiskusikan hasil pengolahan data dan memverifikasi hasil pengolahan dengan teori pada buku sumber, yaitu dengan melakukan:</p> <p><b>Verification</b></p> <p>10. Mengkonfirmasi data (jawaban) dengan teori yang berhubungan dengan menentukan nilai limit fungsi trigonometri</p> <p>11. Memverifikasi jawaban hasil diskusi kelompok tentang hasil analisis data masing masing individu yang ada dalam kelompok.</p> <p><b>Generalisation</b></p> <p>12. Peserta didik secara berkelompok merumuskan kesimpulan dari masalah pokok yang didiskusikan, dan <b>mengomunikasikan</b> di depan kelas.</p>	70 menit
Penutup	<p>1. Peserta didik menyimpulkan materi yang telah dipelajari</p> <p>2. Guru memberikan umpan balik berdasarkan simpulan peserta didik</p> <p>3. Guru melakukan penilaian pembelajaran</p> <p>4. Peserta didik merefleksi pembelajaran yang telah berlangsung</p> <p>5. Peserta didik diberikan tugas mengumpulkan data tentang terapan limit fungsi dalam kehidupan nyata</p>	10 menit

Indikator : 4.1.1 Memecahkan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri menggunakan rumus-rumus trigonometri dan operasi-operasi aljabar

Kegiatan	Deskripsi	Alokasi waktu
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Mengucapkan salam dan meminta seorang siswa untuk memimpin doa</li> <li>2. Guru dan siswa mengecek kebersihan ruang kelas sebagai bentuk kepedulian terhadap lingkungan</li> <li>3. Menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran secara disiplin dan bermakna;</li> <li>4. Memberi motivasi belajar peserta didik secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi materi ajar dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional dan internasional, serta disesuaikan dengan karakteristik dan jenjang peserta didik;</li> <li>5. Mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari;</li> <li>6. Menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai; dan</li> <li>7. Menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li> </ol>	10 menit
Inti	<p>Peserta didik dibagi menjadi 7 kelompok</p> <p><b>Stimulation</b> Peserta didik secara berkelompok diminta <b>mengamati</b> gambar di papan tulis tentang limit fungsi trigonometri secara intuitif</p> <p><b>Problem statement</b> Peserta didik secara berkelompok mengidentifikasi suatu permasalahan yang ada kaitannya dengan limit fungsi aljabar dan limit fungsi trigonometri, serta merumuskan <b>pertanyaan</b> terkait masalah yang belum dipahami secara kreatif. <b>Pertanyaan-pertanyaan</b> peserta didik diinventarisir oleh setiap kelompok dan kemudian diidentifikasi menjadi beberapa pertanyaan/masalah pokok yang akan diajukan/sampaikan kepada kelompok lain untuk ditemukan jawabannya dalam kegiatan diskusi. Peserta didik secara berkelompok menerima pertanyaan dari kelompok lainnya dan mencermati pertanyaan tersebut.</p> <p><b>Data Collecting</b> Peserta didik secara berkelompok <b>mengumpulkan informasi/data</b> yang dari sumber yang relevan dan merumuskan hipotesis (jawaban sementara) terhadap pertanyaan yang diterima dari kelompok lain</p> <p><b>Data Processing</b> Peserta didik secara berkelompok berdiskusi mengolah, mengklasifikasikan dan menafsirkan data hasil pengamatan tentang memecahkan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri menggunakan rumus-rumus trigonometri dan operasi-operasi aljabar</p> <p><b>Verification</b> Mengkonfirmasi data (jawaban) dengan teori yang berhubungan dengan memecahkan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri menggunakan rumus-rumus trigonometri dan operasi-operasi aljabar Memverifikasi jawaban hasil diskusi kelompok tentang hasil analisis data masing-masing individu yang ada dalam kelompok.</p> <p><b>Generalisation</b> Peserta didik secara berkelompok merumuskan kesimpulan dari masalah pokok yang didiskusikan, dan <b>mengomunikasikan</b> di depan kelas.</p>	70 menit

Penutup	<p>Peserta didik menyimpulkan materi yang telah dipelajari</p> <p>Guru memberikan umpan balik berdasarkan simpulan peserta didik (Cinta Produk Indonesia)</p> <p>Guru melakukan penilaian pembelajaran</p> <p>Peserta didik merefleksikan pembelajaran yang telah berlangsung</p>	10 menit
---------	---	----------

### Pertemuan ke 6 ( 2 x @ 45 menit)

Indikator : 4.1.2 Menyusun model matematika berupa fungsi yang berhubungan dengan

permasalahan limit fungsi trigonometri yang diberikan

Kegiatan	Deskripsi	Alokasi waktu
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"> <li>Mengucapkan salam dan meminta seorang siswa untuk memimpin doa</li> <li>Guru dan siswa mengecek kebersihan ruang kelas sebagai bentuk kepedulian terhadap lingkungan</li> <li>Menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran secara disiplin dan bermakna;</li> <li>Mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari;</li> <li>Menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai; dan</li> <li>Menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li> </ol>	10 menit
Inti	<p>Peserta didik dibagi menjadi 7 kelompok</p> <p><b>Stimulation</b> Peserta didik secara berkelompok diminta memperhatikan sebuah soal yang dijadikan sebagai suatu permasalahan yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri</p> <p><b>Problem statement</b> Peserta didik secara berkelompok mengidentifikasi suatu permasalahan yang ada kaitannya dengan menyusun model matematika berupa fungsi yang berhubungan dengan permasalahan limit fungsi trigonometri yang diberikan, serta merumuskan <b>pertanyaan</b> terkait masalah yang belum dipahami secara kreatif.</p> <p><b>Pertanyaan-pertanyaan</b> peserta didik diinventarisir oleh setiap kelompok dan kemudian diidentifikasi menjadi beberapa pertanyaan/masalah pokok yang akan diajukan/sampaikan kepada kelompok lain untuk ditemukan jawabannya dalam kegiatan diskusi.</p> <p>Peserta didik secara berkelompok menerima pertanyaan dari kelompok lainnya dan mencermati pertanyaan tersebut.</p> <p><b>Data Collecting</b> Peserta didik secara berkelompok <b>mengumpulkan informasi/data</b> yang dari sumber yang relevan dan merumuskan hipotesis (jawaban sementara) terhadap pertanyaan yang diterima dari kelompok lain</p> <p><b>Data Processing</b> Peserta didik secara berkelompok berdiskusi mengolah,</p>	70 menit

	<p>mengklasifikasikan dan menafsirkan data hasil pengamatan tentang memecahkan masalah berkaitan Menyusun model matematika berupa fungsi yang berhubungan dengan permasalahan limit fungsi trigonometri yang diberikan</p> <p><b>Verification</b> Mengkonfirmasi data (jawaban) dengan teori yang berhubungan dengan Menyusun model matematika berupa fungsi yang berhubungan dengan permasalahan limit fungsi trigonometri yang diberikan Memverifikasi jawaban hasil diskusi kelompok tentang hasil analisis data masing masing individu yang ada dalam kelompok.</p> <p><b>Generalisation</b> Peserta didik secara berkelompok merumuskan kesimpulan dari masalah pokok yang didiskusikan, dan <b>mengomunikasikan</b> di depan kelas.</p>	
Penutup	<p>Peserta didik menyimpulkan materi yang telah dipelajari Guru memberikan umpan balik berdasarkan simpulan peserta didik (Cinta Produk Indonesia) Guru melakukan penilaian pembelajaran Peserta didik merefleksi pembelajaran yang telah berlangsung</p>	10 menit

## Penilaian

1. Teknik Penilaian
  - A. Penilaian Pengetahuan : Tes tertulis dan Penugasan
  - B. Penilaian Keterampilan : Unjuk kerja
2. Bentuk Penilaian
  - A. Tes tertulis : Uraian (Penilaian Harian) dan Pilihan Ganda (UAS)
  - B. Penugasan : Penilaian Tugas
  - C. Unjuk kerja : Lembar penilaian presentasi
3. Instrumen penilaian : Terlampir

Mengetahui,  
Kepala SMA Negeri 1 Toboali,

Toboali, Agustus 2019  
Guru Mata Pelajaran

**ASPANDI, S.Pd.**  
NIP. 19710912 199802 1 002

**DESSY NOVRIANTI, S.Pd**  
NIP. -

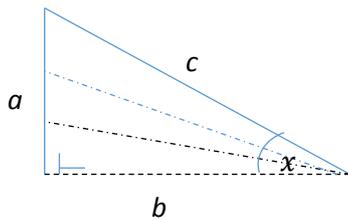
## LAMPIRAN –LAMPIRAN ;

### LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

#### A. Menentukan Limit Fungsi Trigonometri Secara Intuitif

Sebelum membahas lebih lanjut limit fungsi trigonometri, terlebih dahulu kita perlu membahas cara mencari limit fungsi trigonometri secara intuitif. Misalkan kita akan mencari  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$ .

Perhatikan gambar segitiga siku-siku berikut ini



Apabila sudut  $x$  makin lama makin kecil (mendekati 0) maka panjang  $a$  juga makin mengecil (mendekati 0) sehingga nilai limit  $\sin x$ , untuk  $x$  mendekati 0 adalah 0 (ingat bahwa nilai  $\sin x$  apabila dikaitkan segitiga siku-siku di atas adalah panjang sisi didepan sudut  $x$  dibagi dengan sisi miringnya) atau  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

Demikian pula untuk mencari  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ . Apabila sudut  $x$  makin lama makin kecil (mendekati 0) maka panjang  $a$  juga mendekati 0, akibatnya panjang  $c$  hampir sama dengan  $b$  sehingga nilai limit  $\cos x$ , untuk  $x$  mendekati 0 adalah 1 atau  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

Secara umum, dapat dituliskan sebagai berikut

$$\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$$

Rumus diatas menggunakan substitusi  $x = c$  ke dalam fungsi trigonometri yang akan dicari limitnya. Berikut ini terapannya untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana

#### B. Menentukan Nilai Limit Fungsi Trigonometri Sederhana

##### 1. Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri Dengan Substitusi

Pada pembahasan limit fungsi aljabar (yang sebelumnya sudah dipelajari di kelas XI matematika wajib), kalian telah mempelajari cara menentukan nilai  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  dengan mensubstitusikan  $x = c$  ke dalam  $f(x)$ . jika diperoleh hasil (nilai) tertentu maka nilai tersebut adalah nilai fungsinya. Cara tersebut juga dapat digunakan untuk mencari nilai limit fungsi trigonometri. namun, jika hasilnya  $\frac{0}{0}$ ,

kalian harus menggunakan cara lain.

Contoh soal :

Tentukan nilai limit berikut

a.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x - \sin x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$

Jawab :

a.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x - \sin x) = \cos \pi - \sin \pi$   
 $= -1 - 0$   
 $= -1$

b.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{1 - \cos(\frac{\pi}{2})}$   
 $= \frac{0}{1 - 0}$   
 $= 0$

c.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})}$   
 $= \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{1 - \cos(0)}$   
 $= \frac{1}{1 - 1}$   
 $= \infty$

## 2. Menentukan Nilai Fungsi Trigonometri Dengan Cara Menguraikan atau Menyederhanakan

Pada pembahasan sebelumnya, jika limit fungsi tidak dapat dikerjakan dengan cara substitusi, limit tersebut mempunyai bentuk tak tentu, yaitu  $\frac{0}{0}$ . Keadaan seperti ini dapat kalian kerjakan dengan menyederhanakan atau menguraikan bentuk fungsi yang dicari limitnya terlebih dahulu. Hal ini dapat dikerjakan dengan menggunakan rumus-rumus perbandingan trigonometri yang telah kalian pelajari di kelas XI. Agar lebih jelas, pelajari contoh berikut ini.

Contoh:

Tentukan limit fungsi berikut

a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$

Jawab :

- a. Bentuk seperti ini jika kalian substitusikan langsung, akan diperoleh  $\frac{0}{0}$ . Oleh karena itu, bentuk ini harus disederhanakan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \\ &= (1 + \sin \frac{\pi}{2}) \\ &= 2\end{aligned}$$

- b. Bentuk ini juga merupakan bentuk  $\frac{0}{0}$ . Oleh karena itu, bentuk ini harus diuraikan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ &= \cos 0 = 1\end{aligned}$$

- c. Bentuk ini juga merupakan bentuk  $\frac{0}{0}$ . Dengan menyederhanakan terlebih dahulu, diperoleh nilai limit yang dimaksud

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \\ &= 2 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

### C. Rumus Dasar Limit Fungsi Trigonometri

Berikut ini ada beberapa rumus dasar yang berlaku pada limit fungsi trigonometri:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-a)}{\sin(x-a)} = 1$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(ax)}{(ax)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax)^2}{\sin^2(ax)} = 1$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

#### D. Menentukan Nilai Limit Fungsi Trigonometri

Sebagai bahan latihan, coba kalian buktikan rumus-rumus diatas

Contoh soal:

Tentukan nilai limit berikut :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{4x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin 2x \sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$$

Jawab :

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times \frac{6}{3} \\ &= 1 \times 1 \times 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{2}{4} \times 1 \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin 2x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{x}{\sin x} \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{4x^2} \\ &= \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \\ &= \frac{2}{4} \times (1)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## INTRUMEN PENILAIAN OBSERVASI KEGIATAN DISKUSI DAN PRESENTASI

Satuan pendidikan : SMAN 1 Toboali  
Tahun pelajaran : 2018/2019  
Kelas/Semester : XII / Semester I  
Mata Pelajaran : MATEMATIKA PEMINATAN

No	Nama	Indikator				Jumlah score
		Gagasan Kritis	Kebenaran konsep	Kerja sama	Keaktifan	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						

### Kriteria:

4 = sangat baik, 3 = baik, 2 = cukup, 1 = kurang, dan 0 = sangat kurang

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Jumlah Skor Perolehan}}{\text{skor maksimal}} \times 100$$

Mengetahui,  
Kepala SMA Negeri 1 Toboali,

Toboali, Agustus 2019  
Guru Mata Pelajaran

**ASPANDI, S.Pd.**  
NIP. 19710912 199802 1 002

**DESSY NOVRIANTI S.Pd**  
NIP. -

## INTRUMEN PENILAIAN PENUGASAN

Satuan pendidikan : SMAN 1 Toboali  
Tahun pelajaran : 2018/2019  
Kelas/Semester : XII / Semester I  
Mata Pelajaran : MATEMATIKA PEMINATAN

No	Nama	Indikator				Jumlah score
		Tata Tulis	Orisinalitas	Ide	Isi Laporan	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						

**Kriteria:**

5 = sangat baik, 4 = baik, 3 = cukup, 2 = kurang, dan 1 = sangat kurang

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Jumlah Skor Perolehan}}{\text{skor maksimal}} \times 100$$

Mengetahui,  
Kepala SMA Negeri 1 Toboali,

Toboali, Agustus 2019  
Guru Mata Pelajaran

**ASPANDI, S.Pd**  
NIP. 19710912 199802 1 002

**DESSY NOVRIANTI S.Pd**  
NIP. -

### KISI-KISI PENULISAN INSTRUMEN PENILAIAN

No.	IPK	Tingkatan Kognitif	Indikator Soal	Nomor Soal	Bentuk
1	3.1.3 Menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana	C3	Peserta didik mampu menentukan nilai limit fungsi trigonometri sederhana	1	Uraian dan Pilihan ganda
	3.1.4 Menghitung nilai limit fungsi trigonometri	C3	Peserta didik mampu menentukan limit fungsi trigonometri kompleks dengan menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri	2	Uraian dan Pilihan ganda

Instrumen Penilaian

**Uraian (Ulangan Harian)**

1. Tentukan nilai limit fungsi trigonometri dari :  

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \cos x)$$
2. Hitunglah nilai limit dari  $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\cos(x+p) - \cos x}{p}$

**Pedoman Penskoran**

No	Kunci Jawaban	Skor
1	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \cos x)$ $\left( \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \right)$ $1 + 2 \cdot 0$ $1$	<p>1</p> <p>1</p>
2	$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\cos(x+p) - \cos x}{p}$ $\frac{-2 \sin \left( \frac{(x+p)+x}{2} \right) \sin \left( \frac{(x+p)-x}{2} \right)}{p}$ $\frac{-2 \cancel{\sin \left( \frac{(2x+p)}{2} \right)} \cancel{\sin \left( \frac{p}{2} \right)} \cdot 1/2}{\cancel{p}}$ $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{-\sin \left( \frac{2x+p}{2} \right)}{1}$ $-\sin \left( \frac{2x+0}{2} \right)$ $-\sin x$	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>
		7

Mengetahui,  
Kepala SMA Negeri 1 Toboali,

Toboali, Agustus 2019  
Guru Mata Pelajaran

**ASPANDI, S.Pd.**  
NIP. 197109121998021002

**DESSY NOVRIANTI S.Pd**  
NIP. -