LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK
(LKPD)

Satuan Pendidikan	: SMK Negeri 1 Purwodadi
Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas/Semester	: XII / Ganjil
Tema	: Integral
Sub Tema	: Integral Tak Tentu

Nama Anggota Kelompok :

1. ………………………………………….
2. ………………………………………….
3. ………………………………………….
4. ………………………………………….

A. Kompetensi Dasar

3.33 Menentukan nilai integral tak tentu dan tertentu fungsi aljabar

4.33 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu dan tertentu fungsi aljabar

B. Indikator Pencapaian Kompetesi

3.33.1 Menentukan hasil integral tak tentu dari fungsi aljabar.

4.33.1 Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan integral tak tentu

C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari LKPD diharapkan siswa dapat :

- Menemukan konsep integral tak tentu
- Memahami notasi integral
- Menganalisis sifat dasar integral tak tentu
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu fungsi aljabar

PETUNJUK PENGGUNAAN LKPD

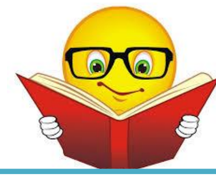
Langkah - langkah yang perlu diperhatikan dalam mengerjakan LKPD

1. Silahkan diskusikan permasalah yang ada dalam diskusi kelompok
2. Amatilah permasalahan yang tersedia
3. Ajukanlah pertanyaan yang ada di pikiran kalian dengan kelompok atau pun guru jika diperlukan
4. Diskusikan dengan teman satu kelompok kalian tentang apa saja informasi yang ada di dalam permasalahan yang disajikan
5. Isikan informasi yang tersedia.
6. Komunikasikan dengan teman sekelompok kalian dalam menyelesaikan permasalahan yang telah disajikan.
7. Simpulkan apa yang telah kalian kerjakan.

Setelah mempelajari konsep turunan pada materi sebelumnya. Anda akan mempelajari konsep integral sebagai antiturunan. Dengan demikian, Anda akan memahami hubungan antara turunan dan integral. Keterlibatan integral sangat menentukan perkembangan ilmu kalkulus. Bahkan juga sangat berpengaruh dalam ilmu lain seperti geometri, teknoligi, biologi,fisika, ekonomi dan lain-lain.

Integral sangat erat kaitannya dengan turunan suatu fungsi. Mari kita ingat kembali aplikasi konsep turunan pada bidang fisika. Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi jarak dan percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Bila kita berpikir kembali tentang aplikasi ini, maka bagaimana hubungan kecepatan jika percepatan yang diketahui. Hal ini mempunyai pemikiran terbalik dengan turunan. Konsep inilah yang akan kita pelajari yang disebut dengan Integral .

A. Integral Tak Tentu Sebagai Antiturunan



Ingat Rumus Turunan Fungsi:
Misalkan $F\,(x)$ adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada interval I, a bilangan real, maka:

- ❖ $F(x) = x^n$ turunannya $F'(x) = f\,(x) = n\,x^{n-1}$,
- ❖ $F(x) = a\,x^n$ turunannya $F'^{(x)} = f\,(x) = an\,x^{n-1}$,

Perhatikan contoh berikut!

$f(x)$	$f'(x)$
$3x^2 + 5$	$6x$
$3x^2 - 9$	$6x$
$3x^2$	$6x$

Berdasarkan contoh diatas dapat kita lihat bahwa $f'(x) = 6x$ dan mempunyai kebalikan dari turunan yaitu $f(x) = 3x^2 + 5, f(x) = 3x^2 - 9, f(x) = 3x^2$. Terlihat fungsi-fungsi ini hanya berbeda konstantanya saja. Secara umum dapat dituliskan bahwa $f(x) = 3x^2 + c$ merupan antiturunan dari $f'(x) = 6x$, dengan $c \in R$

Berdasarkan uraian diatas operasi integral dapat didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan F(x) adalah suatu fungsi umum dengan F'(x) = f(x) atau F(x) mempunyai turunan sehingga F'(x)= f(x). Dalam hal demikian, maka F(x) dinamakan himpunan pengintegralan dari fungsi F'(x) = f(x).

Operasi pengintegralan dinotasikan dengan nolambang " $\int$ " dan di baca integral

Untuk mengingat kembali materi ini silahkan Klik link video pembelajaran berikut ini

https://www.youtube.com/watch?v=SUZXxGIPpPA

Kegiatan Siswa 1

Perhatikan fungsi-fungsi berikut, dan turunkan masing-masing fungsi dengan mengisi titik-titik yang ada. Silahkan berdiskusi dengan teman sebangku!

No.	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{F'(x) = f(x) = y'}$
1.	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} = x^2$
2.	$\frac{1}{3}x^3 + 5$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right) = \ldots\cdot 3\cdot x^{\cdots-1} = x^2$
3.	$\frac{1}{3}x^3 - 7$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 7\right) = \frac{1}{\ldots\ldots}x^{3-\cdots} = x^2$
4.	$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) \ldots\cdot\ldots\cdot x^{\cdots-\cdots} = x^2$
5.	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{13}{200}$	$\frac{d}{dx}(\ldots x^3) = \ldots\cdot\ldots\cdot x^{\cdots-\cdots} = x^2$
6.	$\frac{1}{3}x^3 + C$	$\frac{d}{dx}(\ldots x^3 + C) = \ldots\cdot\ldots\cdot x^{\cdots-\cdots} = x^2$

Keterangan:

c adalah suatu konstanta dengan $c \in R$

Amati kelima fungsi F (x) diatas.

1. Bagaimana turunan dari fungsi – fungsi tersebut?.................yaitu...............
2. Meskipun turunannya sama, apa yang membedakan masing-masing fungsi tersebut?..
3. Nampak bahwa ..., -..., $\frac{\cdots}{5}$, $\frac{13}{\ldots\ldots}$ termasuk kedalam anggota C yaitu biasa dikenal dengan Konstanta real (bilangan tak tentu), sehingga secara umum diwakili C.
4. Lengkapi bagan berikut

5. Jika F(x) adalah fungsi umum yang bersifat F′(x) = f(x), maka F(x) merupakan antiturunan atau integral dari f(x).

   Pengintegralan fungsi f(x) terhadap x dinotasikan sebagai berikut.

$$\int \ldots.\ dx = \cdots + c$$

B. Integral Tak Tentu

Integral fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $\int f(x)\,dx$, yaitu operasi yang digunakan untuk menentukan fungsi F sedemikian sehingga dipenuhi $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, untuk setiap x pada domainnya. Integral dari fungsi $f(x)$ adalah F(x) ditambah dengan sembarang konstanta, yaitu F(x) + c.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

Dengan $\int f(x)\,dx$ = Notasi dari integral tak tentu.

F(x) + c = Fungsi anti turunan

$f(x)$ = Fungsi integran

c = Konstanta

Kegiatan Siswa 2

Amati tabel di bawah ini! Diskusikan dengan kelompo kalian !

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
1	x	$1x^0 \rightarrow \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$2x^1 \rightarrow \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$3x^2 \rightarrow \frac{3}{3}x^3 = \frac{2}{1+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$8x^3 \rightarrow \frac{8}{4}x^3 = \frac{8}{3+1}x^{3-1}$
…	…	…
anx^{n-1}	ax^n	$anx^{n-1} \rightarrow \frac{a}{1}x^n = \frac{a}{(n-1)+1}x^{(n-1)+1}$
ax^n	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Dari pengamatan pada tabel di atas, kita melihat sebuah aturan integrasi atau pola

anti turunan dari turunannya yaitu :

$$\boxed{\int ax^n = \frac{\dots}{\dots + \dots} x^{n+\dots}}$$

Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh dari kegiatan diatas?

KESIMPULAN :

....
....
....
....
....
....
....

C. Sifat - Sifat

Perhatikan Sifat sifat integral tak tentu berikut ini :

1. $\int dx = x + c$
2. $\int kdx = kx + c$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C$
4. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + C,\ n \neq -1$
5. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$
6. $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C$
7. $\int f(x) - g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx + C$

Contoh :

Tentukan hasil integral fungsi berikut :

a. $\int 2\,dx$

b. $\int 3x^4\,dx$

c. $\int x^5 dx$

d. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

e. $\int \frac{1}{2x^5}\,dx$

Pembahasan :

a. $\int 2\,dx = 2\int dx = 2x + c$

b. $\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx = \frac{3}{4+1}x^{4+1} + c = \frac{3}{5}x^5 + c$

c. $\int x^5\,dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c$

d. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{1}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

e. $\int \frac{1}{2x^5}\,dx = \int \frac{1}{2}x^{-5}\,dx = \frac{1}{2}\int x^{-5}dx$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + c = \frac{1}{2}.\frac{1}{-4}x^{-4} + c = -\frac{1}{8}x^{-4} + c$$

Kegiatan Siswa 3

Menyelesaiakan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu

1

Diketahui kecepatan sebuah benda $v(t) = 6t^2$ dan jarak s(1)=8.

Tentukan rumus jarak s(t)

2

Biaya marginal (Mc) merupakan biaya tambahan akibat adanya tambahan produksi satu unit. Secara matematika, biaya ini merupakan turunan (diferensial) dari biaya total (C) terhadap x unit produksi. Misalkan diketahui biaya marginal per unit MC(x) = 600+2x dan biaya total bulanan RP6.000.000,00. Ketika x = 100 unit produksi perbulan. Tentukan fungsi biaya total dalam memproduksi x unit barang perbulan.

3

Sebuah benda mulai bergerak dengan kecepatan awal 20 m/detik. Percepatannya pada saat t adalah (18-2t) m/detik^2. Tentukan kecepatannya setelah 6 detik dan jarak yang telah ditempuh setelah waktu ini jika jarak awal 5 m.

Evaluasi

Kerjakan !

1. Tentukan integral-integral tak tentu berikut ini !

   a. $\int \left(2x^3\right) dx$

   b. $\int \left(3x^2 - 3x + 7\right) dx$

   c. $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 3\right) dx$

   d. $\int \left(5x^3 + 10x^2 + 3x + \frac{1}{4}\right) dx$

2. Tentukanlah fungsi g(t), jika diketahui :

   a. $g'(t) = 3t^2 + 8t - 1$ dan $g(2) = 5$

   b. $g'(t) = 6t^2 + 4t + 1$ dan $g(1) = 5$

Kunci Jawaban Evaluasi

PENSKORAN

No	Soal	KunciJawaban	skor
1	a. $\int\left(2x^3\right)dx$ b. $\int\left(3x^2-3x+7\right)dx$ c. $\int\left(\frac{1}{4}x^4+2x^3+3\right)dx$ d. $\int\left(5x^3+10x^2+3x+\frac{1}{4}\right)dx$	a. $\frac{2}{4}x^4+c$ b. $\frac{3}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7x+c$ c. $\frac{\frac{1}{4}}{5}x^5+\frac{2}{4}x^4+3x+c=\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{2}x^4+3x+c$ d. $=\frac{5}{4}x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x+c$	10 10 10 10
2	Tentukanlah fungsi g(t), jika diketahui: a. $g'(t)=3t^2+8t-1$ dan $g(2)=5$ b. $g'(t)=6t^2+4t+1$ dan $g(1)=5$	a. $g(t)=\int g'(t)dt=\int(3t^2+8t-1)dt$ $=3t^3+4t^2-t+c$ $g(2)=5$ $3(2)^3+4(2)^2-2+c=5$ $24+16-2+c=5$ $38+c=5$ $c=5-38$ $c=-33$ Jadi $g(t)=3t^3+4t^2-t-33$ b. $g(t)=\int(6t^2+4t+1)dt=2t^3+2t^2+t+c$ $g(1)=5$ $2(1)^3+2(1)^2+1+c=5$ $5+c=5$ $c=0$ Jadi $g(t)=2t^3+2t^2+t$	15 15

JUMLAH SKOR	60

Nilai = $\frac{\Sigma \text{ Skor}}{60} \times 100$

Catatan:

Penskoran bersifat holistic dan komprehensif, tidak saja memberi skor untuk jawaban akhir, tetapi juga proses pemecahan yang terutama meliputi pemahaman, komunikasi matematis (ketepatan penggunaan symbol dan istilah), penalaran (logis), serta ketepatan strategi memecahkan masalah menghitung integral taktentu dari fungsi aljabar dan menentukan fungsi F(X).