LKPD MATEMATIKA

untuk kelas XI SMA

DETERMINAN & INVERS MATRIKS

disusun oleh
Akhmada Khasby Ash Shidiqy, S.Pd

Hari, tanggal	:
Nama	:
Kelas	:

Lembar Kegiatan Peserta Didik

Invers Matriks Berordo 2×2

(Pertemuan 1)

Tujuan Pembelajaran

1. Setelah membaca pengertian invers matriks dan cara memperoleh invers matriks berordo 2×2, peserta didik dapat menentukan invers matriks berordo 2×2
2. Melalui eksplorasi invers matriks, peserta didik dapat mengidentifikasi sifat-sifat invers matriks berordo 2×2

Petunjuk

1. Bacalah LKPD dengan cermat, tanyakan kepada guru jika ada yang tidak jelas
2. Diskusikan permasalahan yang diberikan dengan teman/ anggota kelompokmu
3. Lakukan kegiatan sesuai dengan langkah-langkah yang diberikan

Kegiatan I

Perhatikan beberapa pasangan berikut ini. Periksa hasil kali masing-masing pasangan matriksnya

	I		II
1)	$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $AB =$	1)	$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $GH =$
2)	$C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ $CD =$	2)	$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $J = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $IJ =$
3)	$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ dan $F = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $EF =$	3)	$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $KL =$

"Pasangan-pasangan matriks pada kolom I disebut pasangan-pasangan matriks yang saling invers (B adalah invers dari A, atau sebaliknya). Sedangkan pasangan-pasangan matriks pada kolom II bukan merupakan

Berdasarkan pengamatanmu terhadap pasangan-pasangan matriks yang saling invers pada kolom I, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini:

a. Bagaimana ciri-ciri pasangan matriks yang saling invers dilihat dari hasil kali matriks dan inversnya?

b. Bagaimana ordo pada matriks-matriks yang memiliki invers?

Kegiatan II

Menemukan invers matriks berordo 2×2

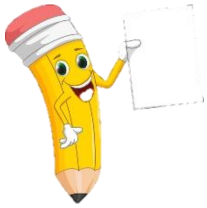
1. Misal $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$. Carilah k, l, m, dan n sehingga $P \times Q = I$ menggunakan prinsip kesamaan matriks.

2. Misal $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$. Carilah k, l, m, dan n sehingga $P \times Q = I$ menggunakan prinsip kesamaan matriks.

3. Misal $Y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $Z = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$. Carilah k, l, m, dan n sehingga $Y \times Z = I$.

4. Apakah semua matriks persegi berordo 2×2 pasti memiliki invers? Jelaskan pendapatmu.

5. Kesimpulan apa yang kamu dapatkan pada kegiatan hari ini?



Catatan:

Selain menggunakan matriks identitas, invers matriks dapat dicari dengan menggunakan rumus $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\text{Adjoin } A]$. Simak penjelasannya lengkapnya dengan scan QR Code di bawah ini atau dengan mengunjungi tautan berikut: https://www.youtube.com/watch?v=-aJ0HN_2fms

Hari, tanggal :

Nama :

Kelas :

Lembar Kegiatan Peserta Didik

Determinan Matriks Berordo 3×3

(Pertemuan 2)

Tujuan Pembelajaran

3. Peserta didik dapat menentukan determinan matriks berordo 3×3 dengan metode Sarrus
4. Peserta didik dapat menerapakan determinan matriks (aturan Cramer) berordo 3×3 untuk menentukan penyelesaian SPLTV

Petunjuk

4. Bacalah LKPD dengan cermat, tanyakan kepada guru jika ada yang tidak jelas
5. Diskusikan permasalahan yang diberikan dengan teman/ anggota kelompokmu
6. Lakukan kegiatan sesuai dengan langkah-langkah yang diberikan

Kegiatan 1

Determinan Matriks Berordo 3×3

Matriks berordo 3×3 nilai determinannya dapat dihitung dengan menggunakan suatu metode yang disebut **ATURAN SARRUS**. Yaitu memperluas determinan tersebut dengan menambahkan dua kolom pertama setelah kolom terakhir.

Bentuk umum matriks berordo 3×3

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan matriks B adalah

$$|B| = \det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Literasi digital

Scan QR Code di samping untuk mendapatkan penjelasan menggunakan video atau kunjungi link berikut: https://www.youtube.com/watch?v=gcgLSX6e4SA

Mari Berlatih

Hitunglah determinan dari matriks-matriks berikut ini:

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Kegiatan 2

Aturan Cramer untuk menyelesaikan SPLTV

Sistem persamaan linier dengan tiga variabel

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

Bentuk di atas dapat diubah ke bentuk matriks berikut ini

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai x, y dan z dapat dilakukan dengan menggunakan determinan matriks atau yang lebih dikenal dengan **Aturan Cramer**

$$\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D}}, \qquad \boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}} \qquad \textbf{dan } \boldsymbol{z = \frac{D_z}{D}}$$

dengan

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}$$

Mari Berlatih

Dino dan Dini pergi ke counter pulsa. Dino membeli 2 buah kartu perdana A, 2 buah kartu perdana B dan 1 buah kartu perdana C dengan harga Rp 209.000,00. Dini membeli 3 buah kartu perdana A, 1 buah kartu perdana B dan 2 buah kartu perdana C dengan harga Rp 236.000,00. Sedangkan Deni membeli 1 buah kartu perdana A, 2 buah kartu perdana B dan 1 buah kartu perdana C dengan harga Rp 177.000,00

Apabila Dina mempunyai Rp 300.000,00 dapatkah Dina membeli 2 buah kartu perdana A, 3 buah kartu perdana B dan 1 buah kartu perdana C. Gunakan aturan Cramer untuk menentukan solusinya.

a. Buatlah pemodelan matematika dari persoalan di atas.

Penyelesaian:

b. Ubahlah pemodelan matematika tesebut menjadi bentuk matriks.

Penyelesaian:

c. Selesaikan persoalan tersebut menggunakan determinan matriks (aturan Cramer)

Penyelesaian:

Hari, tanggal :	
Nama :	
Kelas :	

Lembar Kegiatan Peserta Didik

Invers Matriks Berordo 3×3

(Pertemuan 3)

Tujuan Pembelajaran:

1. Setelah membaca pengertian minor dan kofaktor, peserta didik dapat menentukan minor dan kofaktor dari suatu elemen matriks berordo 3×3
2. Peserta didik dapat menentukan invers matriks berordo 3×3 dengan menerapkan rumus $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\text{Adjoin } A]$
3. Peserta didik dapat mengidentifikasi eksistensi invers suatu matriks dengan menganalisis singularitas matriks berordo 3×3
4. Melalui eksplorasi invers matriks, peserta didik dapat mengidentifikasi sifat-sifat invers matriks berordo 3×3
5. Peserta didik dapat menggunakan invers matriks untuk menentukan penyelesaian SPLTV

Petunjuk:

1. Bacalah LKS dengan cermat, tanyakan kepada guru jika ada yang tidak jelas
2. Diskusikan permasalahan yang diberikan dengan anggota kelompokmu
3. Lakukan kegiatan sesuai dengan langkah-langkah yang diberikan

Kegiatan 1

Minor dan Kofaktor

Misal A suatu matriks persegi 3x3, maka minor dari elemen a_{ij} dilambangkan dengan M_{ij} merupakan determinan dari submatriks yang tersisa dari A setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan. Sedangkan nilai dari $(-1)^{i+j} \times M_{ij}$ disebut kofaktor dari a_{ij}, dilambangkan dengan C_{ij}.

Untuk minor (M_{ij}) dan kofaktor yang bersesuaian (C_{ij}), keduanya bernilai sama atau saling berlawanan tanda tergantung pada nilai $(-1)^{i+j}$, yaitu $+1$ atau -1. Hubungan antara minor dan kofaktor untuk setiap elemen matriks mengikuti pola sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Literasi digital

Scan QR Code di samping untuk mendapatkan penjelasan menggunakan video atau kunjungi link berikut:
https://www.youtube.com/watch?v=Y9ADq6ouF64

Mari Berlatih 1

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 11 \end{bmatrix}$, hitunglah minor dan kofaktor dari matriks A

Penyelesaian:

Mencari Minor dan Kofaktor Matriks A:

1. Minor $a_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -9 & 11 \end{vmatrix} =$ ....

   $C_{11} = M_{11} =$ ....

2. Minor $a_{12} =$ ....

   $C_{12} =$ ....

Kegiatan 2

Invers Matriks Berordo 3x3

<u>Menentukan Adjoint Matriks Berordo 3x3</u>

Jika A adalah matriks 3×3 dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$ disebut matriks kofaktor A. Transpose dari matriks ini dinamakan adjoint A dan dinyatakan dengan adj(A).

<u>Menentukan Invers Matriks Berordo 3×3</u>

Jika A adalah matriks persegi dan jika terdapat matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka B dinamakan invers dari A. Jika tidak ada matriks B yang ditemukan, maka A dikatakan singular/tidak memiliki invers.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, maka invers dari A (dilambangkan A^{-1}) adalah

Mari Berlatih 2

Berdasarkan **Kegiatan 1**, setelah diperoleh minor dan kofaktor dari matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 11 \end{bmatrix}$, maka hitunglah invers matriks A.

Penyelesaian:

Kegiatan 3

Ingat kembali sifat-sifat invers matriks berordo 2x2.

Sifat-sifat Invers Matriks Berordo 2x2

Misalkan matriks A dan B matriks persegi yang berordo sama dan memiliki invers masing-masing A^{-1} dan B^{-1} , maka

a. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ dengan I adalah matriks identitas perkalian matriks

Akibatnya, untuk persamaan matriks:

$$\begin{aligned} AX = C \Rightarrow A^{-1}AX &= A^{-1}C \\ IX &= A^{-1}C \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A^{-1}C} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} XA = C \Rightarrow XAA^{-1} &= CA^{-1} \\ XI &= CA^{-1} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{CA^{-1}} \end{aligned}$$

b. $(A^{-1})^{-1} = A$

c. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Mari Berlatih 3

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, carilah dan bandingkanlah antara:

1. $A^{-1}A$ dengan I
2. BB^{-1} dengan I
3. $(A^{-1})^{-1}$ dengan A
4. $(A^T)^{-1}$ dengan $(A^{-1})^T$
5. $(AB)^{-1}$dengan $B^{-1}A^{-1}$

Penyelesaian:

Kegiatan 4

Mari Berlatih 4

Harga 2 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 1 kg anggur adalah Rp 70.000,00. Harga 1 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 2 kg anggur adalah Rp 90.000,00. Jika harga 2 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 3 kg anggur adalah Rp 130.000,00, berapa harga 1 kg anggur?

Penyelesaian: