

INTEGRAL TAK TENTU

KELAS XII



Kompetensi Dasar

- 3.33 Menentukan nilai integral tak tentu dan tertentu fungsi aljabar
- 4.33 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu dan tertentu fungsi aljabar

Indikator Pencapaian Kompetensi

- 3.33.1 Memecahkan persoalan integral tak tentu dari fungsi aljabar dengan tepat
- 4.33.1 Merinci langkah dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan teliti

Tujuan Pembelajaran :

Melalui kegiatan pembelajaran SPADA dengan pendekatan TPACK, peserta didik secara kreatif, kritis, kolaborasi dan komunikasi mampu :
Merinci langkah dalam memecahkan persoalan integral tak tentu dari fungsi aljabar setelah berdiskusi dan menggali informasi dengan mandiri, penuh rasa tanggung jawab, teliti, kerja keras dan percaya diri

NAMA KELOMPOK :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas/Semester : XII/ 1
Waktu : 30 Menit
Petunjuk :

- 1) Diskusikan Lembar Kerja berikut secara berkelompok.
- 2) Tanyakan kepada guru apabila terdapat hal yang belum jelas.

PART 1

Integral Tak Tentu Sebagai Kebalikan Dari Turunan Fungsi



Ingat Rumus Turunan Fungsi:

Misalkan $F(x)$ adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada interval I , a bilangan real, maka:

- ❖ $F(x) = x^n$ turunannya $F'(x) = f'(x) = n x^{n-1}$,
- ❖ $F(x) = a x^n$ turunannya $F'(x) = f'(x) = a n x^{n-1}$,

Perhatikan fungsi-fungsi berikut, dan turunkan masing-masing fungsi dengan mengisi titik-titik yang ada:

1. $F(x) = \frac{1}{3} x^3$ maka $F'(x) = f'(x) = y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2$

2. $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + 5$ maka

$$F'(x) = f'(x) = y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 + 5 \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2$$

3. $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - 7$ maka

$$F'(x) = f'(x) = y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 - 7 \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2$$

4. $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5}$ maka

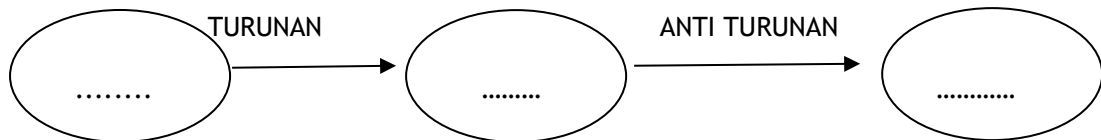
$$F'(x) = f'(x) = y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2$$

5. $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{13}{200}$ maka

$$F'(x) = f'(x) = y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{13}{200} \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2$$

Amati kelima fungsi $F(x)$ diatas.

1. Bagaimana turunan dari fungsi - fungsi tersebut? yaitu
2. Meskipun turunannya sama, apa yang membedakan masing-masing fungsi tersebut?
.....
3. Lengkapi bagan berikut:



Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh dari kegiatan diatas?

KESIMPULAN:

.....

Ayo Berlatih

Tentukan antiturunan dari fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = 2x$
Penyelesaian :

b. $f(x) = -\frac{3}{2}x$
Penyelesaian :

c. $f(x) = 5x^{\frac{1}{3}}$
Penyelesaian :



Rumus Dasar Integral



Tabel pola hubungan turunan dan anti turunan fungsi $y = ax^n$

Turunan fungsi ($f(x)$)	Anti turunan fungsi ($f(x)$)	Pola
1	x	$1x^0 \rightarrow \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$2x^1 \rightarrow \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$3x^2 \rightarrow \frac{3}{3}x^3 = \frac{3}{2+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$8x^3 \rightarrow \frac{8}{4}x^3 = \frac{8}{3+1}x^{3+1}$
...
ax^{n-1}	ax^n	$ax^{n-1} \rightarrow \frac{a}{n}x^n = \frac{a}{(n-1)+1}x^{n+1}$
ax^n	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Dari pengamatan pada tabel tersebut, dapat dilihat sebuah aturan integral atau pola anti turunan dari turunannya yaitu $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ dengan n bilangan rasional.

Pola hubungan turunan dan anti turunan beberapa fungsi $F(x)$

Turunan fungsi $(f(x))$	Anti turunan fungsi $(f(x))$	Pola
	x^{10}	
	x^2	
	$-3x^{12}$	
	$-3x^5 + 4x^5$	
	$0,5x^{0,5} - 1,25x^{1,5}$ $+ 2,5x^{1,5}$	
	$2x^{\frac{1}{3}}$	
	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$	
	$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}$	
	$2x^{-1}$	
	$0,55x^{-1}$	
	$\frac{3}{2}x^{-1}$	

Buatlah kesimpulan dari hasil pengamatanmu! Dapatkah kamu tentukan syarat n pada $y = ax^n$ agar pola integrasi tersebut dapat berlaku secara umum?



Agar integrasi berlaku secara umum, maka syarat $n \neq -1$.

Kesimpulan :

Untuk $y = ax^n$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int a \cdot x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

RUMUS DASAR INTEGRAL

$$1) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int a \cdot x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

Contoh



Tentukan nilai $\int 4x^3 + 2x^2 dx$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3 + 2x^2 dx = \frac{4}{3+1} x^{3+1} + \frac{2}{2+1} x^{2+1} + c$$

$$= \frac{4}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + c$$

$$= x^4 + \frac{2}{3} x^3 + c$$



Mari Berlatih

Tentukan hasil pengintegralan berikut.

1. $\int -x^5 dx$

Penyelesaian :

2. $\int (4x^8 + 2x^5 + 3) dx$

Penyelesaian :

3. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}} dx$

Penyelesaian :

4. $\int (x + 5)^2 dx$

Penyelesaian :

Menentukan Persamaan Kurva

kalian telah mempelajari gradien dan persamaan garis singgung kurva di suatu titik. Jika $y = f(x)$, gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva adalah $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$. Oleh karena itu, jika gradien garis singgungnya sudah diketahui persamaan kurvanya dapat ditentukan dengan :

$$y = \int f(x)dx = f(x) + c$$

example

Diketahui $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$, dengan $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan dari fungsi $y = f(x)$. Misal grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik $(0,5)$. Bagaimana rumus fungsi tersebut?

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}y &= \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx \\&= \int (4x - 5) dx \\&= 2x^2 - 5x + c\end{aligned}$$

Kurva $y = 2x^2 - 5x + c$ melalui titik $(0,5)$ sehingga

$$5 = 2(0)^2 - 5(0) + c$$

$$5 = c$$

Maka rumus fungsi yang dimaksud adalah $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 5$



Mari Berlatih

Gradien garis singgung suatu kurva di sembarang titik $P(x,y)$ dirumuskan dengan $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{2x}$. Jika kurva melalui titik $(4,3)$ tentukan persamaan kurva tersebut

Penyelesaian

Diskusikan masalah yang berkaitan dengan integrar tak tentu berikut !

HOT'S

1

Diketahui kecepatan sebuah benda $v(t) = 6t^2$ dan jarak $s(1)=8$.

Tentukan rumus jarak $s(t)$!

(mengingat s adalah anti turunan dari v)

Penyelesaian



2

Biaya marginal (M_c) merupakan biaya tambahan akibat adanya tambahan produksi satu unit. Secara matematika, biaya ini merupakan turunan (diferensial) dari biaya total (C) terhadap x unit produksi. Misalkan diketahui biaya marginal per unit $MC(x) = 600+2x$ dan biaya total bulanan Rp6.000.000,00. Ketika $x = 100$ unit produksi perbulan. Tentukan fungsi biaya total dalam memproduksi x unit barang perbulan.

Penyelesaian