



**LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK  
(LKPD)**

**LIMIT FUNGSI ALJABAR  
ROHMAN**

# LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD 1)

Waktu:  
20 menit

## DEFINISI DAN EKSISTENSI LIMIT FUNGSI ALJABAR DI SUATU TITIK

Satuan Pendidikan : SMA  
Mata Pelajaran : Matematika  
Wajib  
Kelas/Semester : XI/Genap

### Anggota Kelompok:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

### Tujuan:

Melalui pengerjaan LKPD 1 ini, siswa diharapkan secara intuitif dapat:

1. mendefinisikan arti limit fungsi aljabar di suatu titik.
2. menentukan eksistensi limit fungsi aljabar di suatu titik.

### Petunjuk:

1. Awali dan akhiri kegiatan pengerjaan LKPD ini dengan doa.
2. Isilah titik-titik/jawablah pertanyaan bertahap untuk menemukan suatu hal baru.
3. Gunakan literatur dari buku maupun internet.
4. Kerjakan dalam diskusi kelompok.



### Mari ingat kembali tentang fungsi !

1. Diketahui fungsi  $f$  yang ditentukan dengan  $f(x) = \frac{4x-8}{4}$

a. Tentukan nilai fungsi  $f(x)$  dari setiap  $x$  yang diberikan

$x$	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	....	....	....	....	....	....	....

b. Tuliskan domain fungsi  $f$  (atau  $D_f$ ) dengan notasi pembentuk himpunan!

Jawab : .....

2. Diketahui fungsi rasional  $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ , jelaskan apakah semua  $x \in \mathbb{R}$  merupakan domain fungsi  $g$  dan sebutkan alasannya?

Jawab : .....



# SITUASI 1



Diketahui fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ditentukan oleh  $f(x) = 2x - 1$  dengan domain  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ . Selidikilah apakah  $f(x) = 2x - 1$  untuk  $x$  mendekati 3 mempunyai limit/tidak!

### Tahapan penyelidikan:

1. Tentukan nilai  $f(3)$   
 $f(3) = \dots$
2. Pilihlah sebarang nilai  $x$  disekitar 3 dan substitusikan ke  $f(x)$ . Kemudian tuliskan dalam tabel yang tersedia secara berurutan.

Tabel 1. Nilai pendekatan  $f(x)$  untuk setiap nilai  $x$  mendekati 3 dari kiri (yang lebih kecil dari 3 atau  $x < 3$ )

$x$	2	...	...	2,8	...	...	2,9999
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...

Tuliskan secara berurut dari nilai  $x$  yang terkecil

Tabel 2. Nilai pendekatan  $f(x)$  untuk setiap nilai  $x$  mendekati 3 dari kanan (yang lebih besar dari 3 atau  $x > 3$ )

$x$	3,0001	...	...	3,5	...	...	4
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...

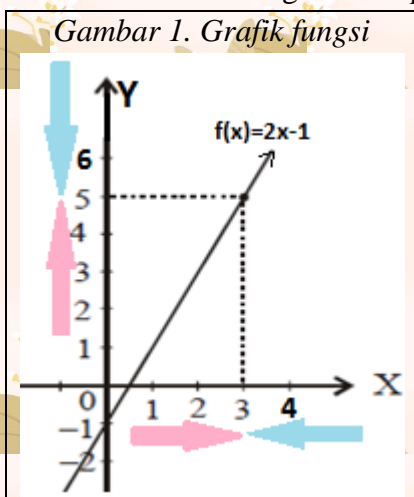
Tuliskan secara berurut dari nilai  $x$  yang terkecil

3. Buat tabel fungsi  $f(x)$  berdasarkan tahapan 1-2.

Tabel 3. Nilai pendekatan  $f(x)$  untuk setiap nilai  $x$  di 3 dan sekitar 3

$x$	2	...	...	2,8	...	...	2,9999	...	<b>3</b>	...	3,0001	...	3,5	...	...	4
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

4. Perhatikan hubungan nilai pendekatan pada tabel dengan grafik fungsi  $f(x)$



Pada tabel dan grafik di samping, terlihat jika memasukkan nilai mendekati 3 dari kiri (nilainya ..... dari 3) akan menghasilkan nilai  $f(x)$  mendekati... dan jika masukkan nilai  $x$  mendekati 3 dari kanan (nilainya.....dari 3) akan menghasilkan nilai  $f(x)$  mendekati..... Sehingga diperoleh bahwa jika  $x$  mendekati ... dari kiri maupun kanan, maka fungsi  $f(x)$  mendekati...

5. Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah

( $\rightarrow$ ) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:

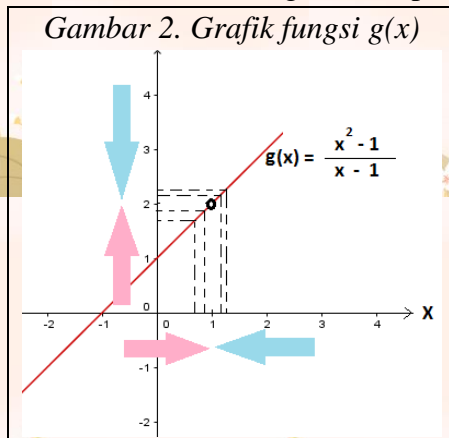
$x \rightarrow \dots$  dan  $(2x - 1) \rightarrow \dots$

6. Apabila  $x$  mendekati ... dari kiri maupun kanan maka mengasilkan bilangan.... Kita dapat mengubah pernyataan ini ke dalam bentuk:

$\lim(\dots) = \dots$



4. Perhatikan hubungan nilai pendekatan pada tabel dengan grafik fungsi  $g(x)$



Pada tabel dan grafik di atas, terlihat nilai mendekati 1 dari kiri (nilainya ..... dari 1) akan menghasilkan nilai  $g(x)$  mendekati... dan masukkan nilai  $x$  mendekati 1 dari kanan (nilainya.....dari 1) akan menghasilkan nilai  $g(x)$  mendekati.... Sehingga diperoleh bahwa jika  $x$  mendekati ... dari kiri maupun kanan, maka fungsi  $g(x)$  mendekati...

5. Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah ( $\rightarrow$ ) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:  
 $x \rightarrow \dots$  dan  $\frac{x^2-1}{x-1} \rightarrow \dots$

6. Apabila  $x$  mendekati ... dari kiri maupun kanan maka menghasilkan bilangan.... Kita dapat mengubah pernyataan ini ke dalam bentuk :

$$\lim_{x \rightarrow \dots} (\dots) = \dots$$

Kita baca: limit fungsi ..... untuk  $x$  mendekati ..... sama dengan ...

7. Analisa hasil limit kiri dan limit kanan dari tabel maupun grafik.

Limit kiri: dari kiri  $x$  mendekati 1, nilai limitnya mendekati ... atau  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\dots) = \dots$

Limit kanan: dari kanan  $x$  mendekati 1, nilai limitnya mendekati ... atau  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\dots) = \dots$

Karena nilai limit kiri ( $< / = / >$ ) nilai limit kanan, maka fungsi  $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  untuk  $x$  mendekati 1 (**mempunyai / tidak mempunyai**) limit.



### SITUASI 3



Dipunyai fungsi  $h$  yang ditentukan oleh  $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$  dengan domain  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ . Selidikilah apakah  $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$  untuk  $x$  mendekati 1 mempunyai limit atau tidak!

#### Tahap penyelidikan:

1. Tentukan nilai  $h(1)$

$$h(1) = \dots$$

2. Pilihlah sebarang nilai  $x$  di sekitar 1 kemudian substitusikan ke  $h(x)$ .

Tabel 1. Nilai pendekatan  $h(x)$  untuk setiap nilai  $x$  mendekati 1 dari kiri (yang lebih kecil dari 1 atau  $x < 1$ )

$x$	0	...	...	...	0,9	...	...
$h(x)$	...	...	...	...	...	...	...

Tuliskan secara berurut dari nilai  $x$  yang terkecil

Tabel 2. Nilai pendekatan  $h(x)$  untuk setiap nilai  $x$  mendekati 1 dari kanan

(yang lebih besar dari 1 atau  $x > 1$ )

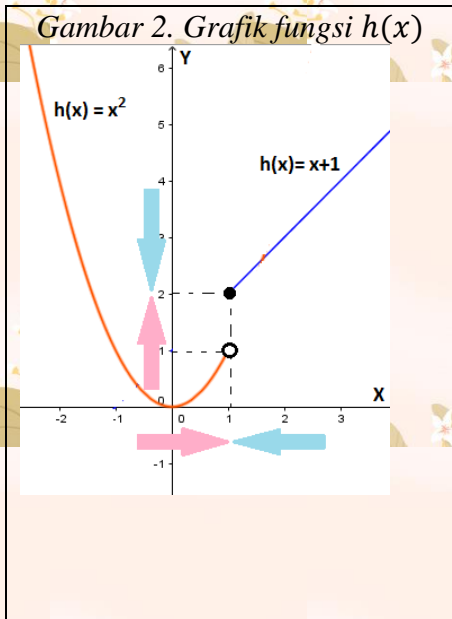
$x$	...	1,1	...	...	...	...	2
$h(x)$	...	...	...	...	...	...	...

Tuliskan secara berurut dari nilai  $x$  yang terkecil

3. Buat tabel dan grafik fungsi  $h(x)$  berdasarkan tahapan 1-2.

Tabel 3. Nilai pendekatan  $h(x)$  untuk setiap nilai  $x$  di 1 dan sekitar 1

$x$	...	...	...	...	...	...	...	<b>1</b>	...	...	...	...	...	...
$h(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



Pada tabel dan grafik di samping, terlihat nilai mendekati 1 dari kiri (nilainya ..... dari 1) akan menghasilkan nilai  $g(x)$  mendekati... dan masukkan nilai  $x$  mendekati 1 dari kanan (nilainya.....dari 1) akan menghasilkan nilai  $h(x)$  mendekati..... Sehingga diperoleh bahwa jika  $x$  mendekati ... dari kiri maupun kanan, maka fungsi  $h(x)$  mendekati...

4. Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah ( $\rightarrow$ ) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:  $x \rightarrow \dots$  dan  $h(x) \rightarrow \dots$
5. Apabila  $x$  mendekati ... dari kiri maupun kanan maka mengasilkan bilangan.... Kita dapat mengubah pernyataan ini ke dalam bentuk:

$$\lim_{x \rightarrow \dots} (\dots) = \dots$$

Kita baca: limit fungsi ..... untuk  $x$  mendekati ..... sama dengan ...

6. Analisa hasil limit kiri dan limit kanan dari tabel maupun grafik.

Limit kiri: dari kiri  $x$  mendekati 1, nilai limitnya mendekati ... atau  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\dots) = \dots$

Limit kanan: dari kanan  $x$  mendekati 1, nilai limitnya mendekati ... atau  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\dots) = \dots$

Karena nilai limit kiri ( $< / = / >$ ) nilai limit kanan, maka fungsi  $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$  untuk  $x$  mendekati 1 (**mempunyai / tidak mempunyai**) limit.

## AYO MENYIMPULKAN

### 1. Definisi/Pengertian dari limit fungsi aljabar:

Misalkan  $f$  adalah sebuah fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $L$  dan  $a \in \mathbb{R}$ . Maka:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  jika dan hanya jika .....

### 2. Suatu fungsi $f(x)$ untuk $x$ mendekati $a$ dikatakan mempunyai limit jika ..... dan .....

## LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD 2)

Waktu:  
20 menit

### SIFAT-SIFAT LIMIT FUNGSI DI SUATU TITIK

Satuan Pendidikan : SMA  
Mata Pelajaran : Matematika  
Wajib  
Kelas/Semester : XI/Genap

#### Anggota Kelompok:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

#### Tujuan:

Melalui pengerjaan LKPD 2 ini, siswa diharapkan dapat menemukan sifat-sifat limit fungsi aljabar di suatu titik secara intuitif.

#### Petunjuk:

1. Awali dan akhiri kegiatan pengerjaan LKPD ini dengan doa.
2. Isilah titik-titik/jawablah pertanyaan bertahap untuk menemukan suatu hal baru.
3. Gunakan literatur dari buku maupun internet.
4. Kerjakan dalam diskusi kelompok.



**Mari ingat kembali tentang definisi dan eksistensi limit fungsi aljabar di suatu titik**

1. Definisi limit fungsi aljabar di suatu titik

2. Suatu fungsi dikatakan memiliki nilai limit di titik  $x$  jika:





Nilai limit untuk  $f(x)$  untuk sebaran nilai  $x$  di sekitar 2

$x$	1,3	1,5	...	...	...	...	...	2	...	...	...	...	...	2,8	3
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Nilai limit untuk  $f(x)$  untuk sebaran nilai  $x$  di sekitar -6

$x$	-6,8	-6,5	-6,1	...	...	...	-6	...	...	...	-5,99	-5,5	-5
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2. Amatilah nilai  $f(x)$  untuk setiap nilai mendekati  $x$  atau  $x \rightarrow c$ , apakah ada nilai  $f(x)$  mendekati suatu bilangan selain  $c$  itu sendiri? .... mengapa?

3. Nyatakan pendekatan nilai  $f(x) = x$  untuk setiap sebaran  $x$  menggunakan notasi limit.

i)  $\lim_{x \rightarrow 3} x = \dots$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 5} \dots = \dots$

iii) .....

4. Secara induktif, untuk setiap nilai  $x$  mendekati bilangan  $c$ , maka nilai  $f(x)$  mendekati  $f(c) = c$ , ditulis .....

(Sifat 2)

Gambarkan grafik fungsi  $f$  di sini

### Sifat 3

1. Lengkapilah perhitungan numerik  $2f(x)$ ,  $3f(x)$ ,  $-f(x)$  untuk nilai  $x$  disekitar 3

$x$	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	...	3	...	3,001	3,01	3,1	3,5	3,8
$f(x) = x$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$2f(x) = 2x$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$3f(x) = 3x$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$-f(x) = -x$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2. Amatilah baris satu s.d empat yang menunjukkan nilai pendekatan  $f(x)$  untuk  $x \rightarrow 3$ .

3. Nampak nilai pendekatan  $2f(x)$  adalah ... kali lipat nilai pendekatan  $f(x)$ ,  
 Nampak nilai pendekatan  $3f(x)$  adalah ... kali lipat nilai pendekatan  $f(x)$ ,  
 Nampak nilai pendekatan  $-f(x)$  adalah ... kali lipat nilai pendekatan  $f(x)$ ,

4. Tuliskan menggunakan notasi limit

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2f(x) = 2 \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} -f(x) = \dots$$

Sehingga, secara induktif dapat dikatakan  $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = \dots \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  (Sifat 3)

**Sifat 4**

1. Diketahui fungsi  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2x$ , lengkapilah nilai fungsiberdasarkan sebaran nilai  $x$  di sekitar 1 di tabel berikut.

$x$	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8
$f(x) = x^2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$g(x) = 2x$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$f(x) + g(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Amatilah nilai limit dari masing-masing fungsi  $f(x)$ ,  $g(x)$ , dan  $f(x)+g(x)$
- Apakah limit  $f(x)+g(x)$  menyatakan penjumlahan dari limit  $f(x)$  dan limit  $g(x)$ ? ....
- Nampak bahwa (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = \dots$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots \dots \dots = \dots$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = \dots$

5. Berdasarkan fakta tersebut, ditulis  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x)$

= ..... + .....

= ..... + .....

6. Secara induktif dapat dituliskan  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \dots \dots \dots$  (Sifat 4).

**Sifat 5**

1. Bagaimana sifat limit penjumlahan dengan  $g(x)$  negatif atau  $-g(x)$ ?

2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + (-g(x))] = \dots \dots \dots$  (sifat 4)

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \dots \dots \dots$  (sifat 3)

= .....

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \dots \dots \dots$  (Sifat 5)



2. Amatilah pendekatan setiap nilai fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $\frac{f}{g}$  untuk  $x \rightarrow 1$
3. Operasi apa yang menyatakan hubungan limit  $f(x)$  dan  $g(x)$  terhadap limit fungsi  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ?
4. Nampak bahwa (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \dots = \dots$   
 (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \dots = \dots$   
 (iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\dots}{\dots} \right) = \dots$
5. Sehingga dari fakta tersebut, ditulis  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\dots}{\dots} \right)$   
 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \dots}{\lim_{x \rightarrow 1} \dots}$   
 $= \frac{\dots}{\dots}$
6. Secara induktif dapat dituliskan  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \dots$  (Sifat 7).

**Sifat 8**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \underbrace{\dots}_{n} \right] \text{ (gunakan konsep eksponen)} \\ &= \underbrace{\dots}_{n} \text{ (gunakan sifat 6)} \\ &= [\dots]^n \end{aligned}$$

Jadi,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \dots$



## AYO MENYIMPULKAN

Misalkan  $f(x)$ ,  $g(x)$  adalah fungsi yang mempunyai limit pada  $x$  mendekati  $c$ , dengan  $k$  dan  $c$  adalah bilangan real serta  $n$  adalah bilangan bulat positif, maka berlaku sifat-sifat limit :

1.  $\lim_{x \rightarrow c} k = \dots\dots\dots$

2.  $\lim_{x \rightarrow c} x = \dots\dots\dots$

3.  $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = \dots\dots\dots$

4.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \dots\dots\dots$

5.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \dots\dots\dots$

6.  $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \dots\dots\dots$  dengan  $\dots\dots\dots \neq 0$

7.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \dots\dots\dots$

8.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \dots\dots\dots$

# LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD 3)

Waktu:  
20 menit

## MENENTUKAN NILAI LIMIT FUNGSI DI SUATU TITIK

Satuan Pendidikan : SMA  
Mata Pelajaran : Matematika  
Wajib  
Kelas/Semester : XI/Genap

### Anggota Kelompok:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

### Tujuan:

Melalui pengerjaan LKPD 3 ini, siswa diharapkan dapat menentukan limit fungsi aljabar dengan strategi substitusi langsung, pemfaktoran, dan pendekatan sekawan.

### Petunjuk:

1. Awali dan akhiri kegiatan pengerjaan LKPD 3 ini dengan doa.
2. Isilah titik-titik/jawablah pertanyaan bertahap untuk menemukan suatu hal baru.
3. Gunakan literatur dari buku maupun internet.
4. Kerjakan dalam diskusi kelompok.



Mari ingat kembali tentang pemfaktoran dan bentuk akar!

### Prasyarat 1

Faktorkanlah bentuk-bentuk berikut!

1.  $x^2 - 1$
2.  $x^2 - 2x - 8$
3.  $x^2 - 8x + 15$
4.  $2x^2 + 3x + 1$
5.  $3x^2 + 5x + 2$

Jawab:

1. ...
2. ...
3. ...
4. ...
5. ...

### Prasyarat 2

Tentukanlah bentuk sekawan dari bentuk-bentuk berikut!

1.  $\sqrt{2}$
2.  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
3.  $\sqrt{2} - \sqrt{9}$
4.  $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}$
5.  $\sqrt{x^2 - x + 9} - \sqrt{x^2 + x + 7}$

Jawab:

1. ...
2. ...
3. ...
4. ...
5. ...

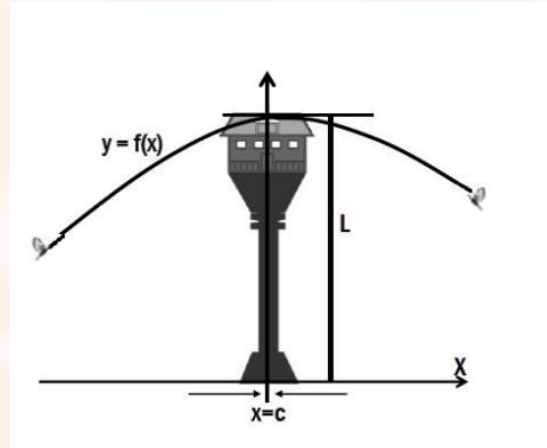


## KEGIATAN 1 ( Menentukan nilai limit fungsi aljabar dengan substitusi )



### Masalah 1

Amatilah arah terbang dua ekor burung menuju sangkar dari arah yang berbeda. Jika jejak kedua burung terbang tersebut identik dengan lintasan parabola  $f(x) = -x^2 + 4x$ . Jarak kedua ekor burung semakin dekat ke sangkar adalah 2 meter. Berapakah tinggi burung pada saat tiba dalam sangkar tersebut ?



### Penyelesaian:

Secara umum bentuk limit ditulis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika  $f(a) = k$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

Jika  $f(a) = \frac{0}{k}$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Jika  $f(a) = \frac{k}{0}$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Diketahui:

Lintasan terbang burung = ...

Jarak kedua ekor burung semakin dekat ke sangkar = ...

Ditanya: tinggi burung pada saat tiba dalam sangkar (...)?

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots(\dots)^2 + 4(\dots)$$

$$= \dots + \dots$$

$$= \dots$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$$

Jadi, tinggi burung pada saat tiba dalam sangkar adalah.





## KEGIATAN 2 ( Menentukan nilai limit fungsi aljabar dengan pemfaktoran)



### Masalah 2

Sebuah pesawat berpenumpang akan mendarat di landasan pacu dalam jarak sekitar 500 meter semakin dekat ke landasan. Berapakah besarnya kecepatan pesawat saat telah mendarat jika fungsi kecepatan saat pesawat akan mendarat



adalah  $h(x) = \lim_{x \rightarrow 500} \frac{x^2 - 497x - 1500}{x - 500}$  ?

### Penyelesaian:

Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , sehingga  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  harus difaktorkan atau diuraikan terlebih dahulu.

Diketahui:

Jarak pesawat semakin dekat ke landasann pacu = ...

Fungsi kecepatan pesawat = ...

Ditanya: Besar kecepatan saat pesawat telah mendarat (...)?

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow \dots} h(x) = \lim_{a \rightarrow \dots} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)}{(\dots\dots\dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \dots} \dots\dots\dots$$

$$= \dots$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \dots} h(x) = \dots$$

Jadi, besar kecepatan saat pesawat telah mendarat adalah...



### KEGIATAN 3 ( Menentukan nilai limit fungsi aljabar dengan perkalian sekawan)



Dalam suatu pertandingan bola antara tim A melawan tim B. Ketika jarak bola ke gawang diperkirakan sekitar 2 meter dari bibir gawang tim A, bola pun ditendang ke gawang tim A oleh salah satu anggota tim B dan terjadilah ketegangan antara kedua belah pihak yang bertanding, ternyata bola tersebut nyaris masuk ke gawang tim A. Jika fungsi kecepatan tendangan bola tersebut adalah  $h(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ . Berapakah kecepatan bola ketika mendekati gawang tim A?



#### Penyelesaian:

Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dengan  $f(x)$  dan  $g(x)$  fungsi akar sehingga  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

maka harus dikalikan dengan nilai salah satu sekawannya.  
 $(a + b) \rightarrow$ sekawannya:  $(a - b)$  atau sebaliknya.

Diketahui:

Jarak bola ke sekitar bibir gawang A = ...

Fungsi kecepatan tendangan bola = ...

Ditanya : Besar kecepatan bola ketika mendekati gawang tim A (...)?

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \dots} h(x) &= \lim_{a \rightarrow \dots} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{(\dots\dots)(\dots\dots)}{(\dots\dots)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{(\dots\dots)}{(\dots\dots)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{(\dots\dots)}{(\dots\dots)} \times \frac{(\dots\dots)}{(\dots\dots)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \dots} (\dots\dots) \\ &= \dots \\ L &= \lim_{x \rightarrow \dots} h(x) = \dots \end{aligned}$$

Jadi, besar kecepatan bola ketika mendekati gawang tim A adalah...

# LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK (LKPD 4)

Waktu:  
20 menit

## LIMIT FUNGSI DI TAK HINGGA

Satuan Pendidikan : SMA  
Mata Pelajaran : Matematika  
Wajib  
Kelas/Semester : XI/Genap

### Anggota Kelompok:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

### Tujuan:

Melalui pengerjaan LKPD 4 ini, siswa diharapkan dapat menentukan nilai limit fungsi aljabar di tak hingga

### Petunjuk:

1. Awali dan akhiri kegiatan pengerjaan LKPD 4 ini dengan doa.
2. Isilah titik-titik/jawablah pertanyaan bertahap untuk menemukan suatu hal baru.
3. Gunakan literatur dari buku maupun internet.
4. Kerjakan dalam diskusi kelompok.



**Mari ingat kembali tentang menentukan nilai limit fungsi aljabar !**

Lengkapilah titik-titik pada limit berikut :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5x - 7 = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x+3} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots$$

### Teorema

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \dots \text{ dan } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \dots, \text{ dengan } n \in \mathbb{N}$$

dengan  $\mathbb{N}$  adalah himpunan bilangan asli,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\dots\dots\}$



## 1 ( Limit fungsi aljabar di tak hingga)



1. Tentukan nilai limit berikut ini:

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \dots - \dots = \dots$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 7}{2x^2 + 3x - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (\dots)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\dots)} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

2. Perhatikan nilai dari kedua limit di atas ! apakah nilai kedua limit yang merupakan bentuk tak tentu  $\frac{\infty}{\infty}$  atau  $\infty - \infty$ ?

3. Jika ya, maka nilai tersebut bukan merupakan nilai sesungguhnya dan perlu dilakukan manipulasi aljabar sebelum menggunakan teorema yaitu sebagai berikut:

- Cara biasa yaitu kalikan pembilang maupun penyebutnya dengan eksponen yang sama, dengan bentuk  $\frac{1}{x^m}$  dengan  $x^m$  adalah eksponen dari suku tertinggi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 7}{2x^2 + 3x - 4} \times \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\dots}{x^2} - \frac{\dots}{x^2} + \frac{\dots}{x^2}}{\frac{\dots}{x^2} + \frac{\dots}{x^2} - \frac{\dots}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

- Cara Singkat

**Langkah 1:** Sederhanakan fungsi dalam limit. Cukup dengan menulis suku tertinggi pembilang dan penyebutnya saja.

**Langkah 2:** Sederhanakan eksponen  $x$  pada pembilang dan penyebut.

**Langkah 3:** hitung nilai limit dengan menggunakan teorema

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ dan } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 7}{2x^2 + 3x - 4} \times \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{7}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{5 - 0 + 0}{2 + 0 - 0}$$

$$= \frac{5}{2}$$

a. Langkah-langkah penyelesaian bentuk  $\frac{\infty}{\infty}$  dengan cara singkat adalah sebagai berikut:

**Langkah 1:** Sederhanakan fungsi dalam limit. Cukup dengan menulis suku tertinggi pembilang dan penyebutnya saja.

**Langkah 2:** Sederhanakan eksponen  $x$  pada pembilang dan penyebut.

**Langkah 3:** hitung nilai limit dengan menggunakan teorema

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ dan } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{10} + 1.000x^4}{6x^{10} + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{10}}{6x^{10}} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



## KEGIATAN 2 (Limit fungsi aljabar di tak hingga)KEGIATAN



### Masalah

Seorang pedagang buku di Pasar Sriwedani akan menjual barang dagangannya berupa sebanyak  $x$  buah akan memperoleh keuntungan yang dinyatakan dengan fungsi

$$h(x) = \frac{15x^2 - 3x + 1}{\sqrt{4x^4 + 2x^3 + 5}}$$

juta rupiah. Berapa keuntungan yang didapat jika buku yang terjual jumlahnya sangat banyak?



(Sumber: <http://sayangyogya.blogspot.co.id/2010/05/pasar-buku-murah-baru-maupun-bekas.html>)

### Penyelesaian :

1. Membagi dengan Pangkat Tertinggi dari Penyebut

a. Jika derajat  $f(x) =$  derajat  $g(x)$  maka:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{koefisien pangkat tertinggi } f(x)}{\text{koefisien pangkat tertinggi } g(x)}$

b. Jika derajat  $f(x) >$  derajat  $g(x)$  dan koefisien pangkat tertinggi  $f(x)$  bernilai positif, maka:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

c. Jika derajat  $f(x) >$  derajat  $g(x)$  dan koefisien pangkat tertinggi  $f(x)$  bernilai negatif, maka:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

d. Jika derajat  $f(x) <$  derajat  $g(x)$  maka  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

2. Mengalikan dengan Faktor Lawan

Limit fungsi yang berbentuk  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)})$  dapat diselesaikan dengan cara mengalikan dengan faktor lawan, yaitu

$$\frac{\sqrt{f(x)} \mp \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} \mp \sqrt{g(x)}}$$

Diketahui : Fungsi keuntungan penjualan buku = ...

Jumlah buku yang terjual sangat banyak = ...

Ditanya: besar keuntungan yang didapat jika buku yang terjual jumlahnya sangat banyak  
(.....)?

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow \dots} h(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \dots$$

Jadi, besar keuntungan yang didapat jika buku yang terjual jumlahnya sangat banyak adalah...