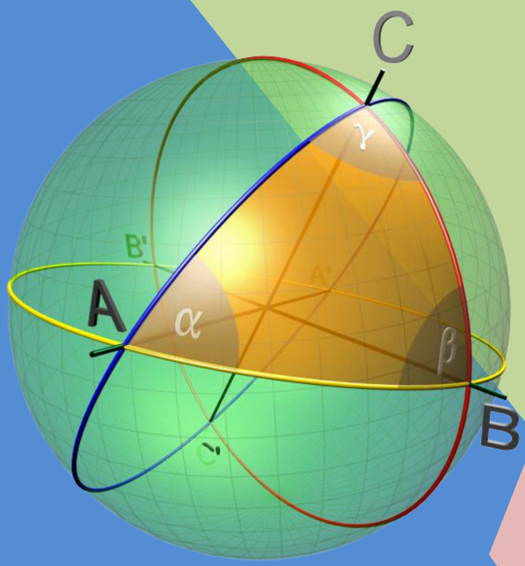
LKPD

Lembar Kegiatan Peserta Didik

Trigonometri

Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut



Oleh:

Anang Wibowo, S.Pd

Mahasiswa PPG Dalam Jabatan 2020 Angkatan 1

LPTK Universitas PGRI Madiun (UNIPMA)

Lembar Kegiatan Peserta Didik

Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Nama Siswa : ……………………………….
Kelas : ……………………………….
Semester/TP : ……………………………….

A. Kompetensi Inti (KI)

KI-3 : Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

Indikator:
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih dua sudut.

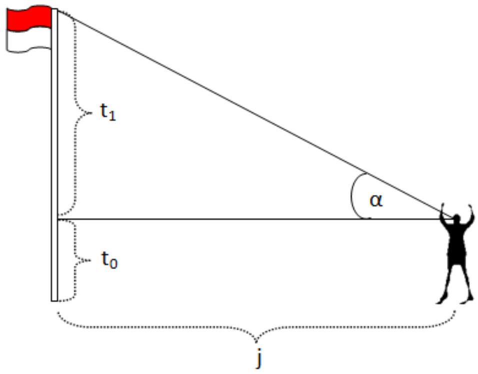
C. Tujuan Kegiatan

Setelah mengikuti pembelajaran daring dengan Google Classroom diharapkan peserta didik mampu menurunkan rumus jumlah dan selisih dua sudut kemudian menggunakannya dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus tersebut dengan teliti dan benar.

D. Petunjuk Kegiatan

1. Mulailah belajar dengan niat ikhlas menuntut ilmu dan berdoa.
2. Isilah data diri kalian dengan benar.
3. Baca dan cermati perintah dalam LKPD ini dengan seksama.
4. Isilah bagian-bagian yang kosong.
5. Jika ada kesulitan, diskusikan dengan teman kalian.

E. Kegiatan Peserta Didik



Dulu di kelas X kalian sudah mempelajari nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran I. Dengan rumus sudut berelasi ataupun bantuan grafik, juga sudah bisa menentukan nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV. Salah satu aplikasi dari trigonometri adalah untuk mengukur tinggi suatu benda, mengukur jarak kapal pada materi jurusan tiga angka, dan lain-lain.

Ada pertanyaan, apakah ada sudut-sudut lainnya selain sudut-sudut istimewa 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, dan 90^0 yang bisa kita cari nilai trigonomertinya tanpa menggunakan alat bantu semisal tabel trigonometri dan kalkulator? Bisakah kita menentukan nilai trigonometri untuk sudut 15^0, 75^0, dan yang lainnya?

Pada materi ini kita akan mempelajari bagaimana menemukan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut kemudian menggunakan rumus tersebut dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan jumlah dan selisih dua sudut.

Penguasaan materi perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku dan perbandingan trigonometri sudut berelasi akan sangat membantu dalam mempelajari materi ini.

Berikut beberapa sudut relasi yang digunakan :

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(180° - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\sin(180° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$

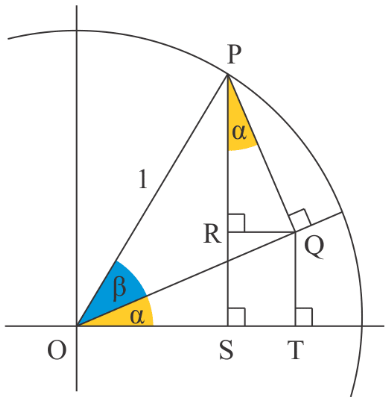
sin (α + β) dan sin (α - β)

Perhatikan gambar di bawah, kemudian lengkapilah bagian-bagian penurunan rumus dibawahnya yang masih kosong!

Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Titik P terletak pada lingkaran sehingga OP = 1.

$\angle POS = \alpha + \beta$

$\angle QOT = \angle OQR = \angle QPR = \alpha$



Dari segitiga OPS diperoleh

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = PS$$

PS = …… + PR dan RS = QT, dapat kita tulis

PS = QT + PR, akibatnya

sin (α + β) = QT + PR ....(1)

Dari segitiga OPQ diperoleh
….. = sin β
OQ = cos β

Dari segitiga OQT dipeoleh

$$\sin\alpha = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

QT = sin α × …..
QT = sin α × cos β ....(2)

Dari segitiga PQR diperoleh

$$\cos\alpha = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

PR = cos α × PQ
PR = cos α × …… ....(3)

Dari (1), (2) dan (3) kita dapatkan
sin (α + β) = QT + PR
= sin α × …… + …… × sin β

Jika β diganti dengan -β, maka
sin (α + (-β)) = sin α cos (-β) + cos α sin (-β)
= sin α …… + cos α ……
= sin α cos β - cos α sin β

Silakan simak video dibawah dengan men-scan atau klik QR Code

Penjabaran Sinus

Penjabaran Cosinus

Penjabaran Tangen

Soal-soal

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi sinus sebagai berikut :

$$\sin(\alpha + \beta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

cos (α + β) dan cos (α - β)

Rumus cos (α + β) dan cos (α - β) dapat kita tentukan dengan cara yang hampir sama seperti rumus sinus diatas. Namun, karena rumus sinus sudah kita peroleh, akan lebih mudah jika kita gunakan konsep sudut relasi kuadran I.

cos (α + β) = sin (90° - (α + β))
= sin ((90° - α) - β)
= sin (90° - α) cos β - cos (90° - α) sin β
= …… cos β - …… sin β

Jika β diganti dengan -β, maka
cos (α + (-β)) = cos α cos (-β) - sin α sin (-β)
= cos α …… - sin α ……
= cos α cos β + sin α ……

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi cosinus sebagai berikut

$$\cos(\alpha+\beta) = \dots\dots\dots\dots\dots - \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

tan (α + β) dan tan (α - β)

Berdasarkan identitas rasio $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, kita bisa menurunkan rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk tangen, yaitu

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \dots\dots\dots\dots\dots} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\dots\dots\dots\dots\dots}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\dots\dots\dots\dots\dots} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \dots\dots\dots\dots\dots}
\end{aligned}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan $\cos\alpha\cos\beta$

Jika β diganti dengan -β, maka

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha + (-\beta)) &= \frac{\tan\alpha + \tan(\dots\dots)}{1 - \tan\alpha\tan(\dots\dots)} \\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \times \dots\dots}
\end{aligned}$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi tangen sebagai berikut.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dots\dots\dots + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \dots\dots\dots}{1 + \tan\alpha \times \dots\dots}$$

Rangkuman

Dari kegiatan yang sudah kalian kerjakan di atas, silakan tuliskan atau rangkum kembali rumus-rumus yang telah kalian dapatkan.

1. ……………………………………………………………………………………
2. ……………………………………………………………………………………
3. ……………………………………………………………………………………
4. ……………………………………………………………………………………
5. ……………………………………………………………………………………
6. ……………………………………………………………………………………
7. ……………………………………………………………………………………
8. ……………………………………………………………………………………
9. ……………………………………………………………………………………
10. ……………………………………………………………………………………

Contoh Soal

1. Tentukan nilai eksak dari sin 75°

   Jawab :

   $$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ)\\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}\\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

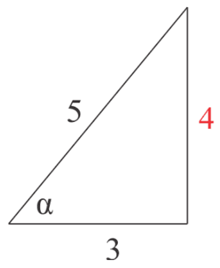
2. Diketahui **cos α** = $\frac{3}{5}$ dan **sin β** = $\frac{5}{13}$. Jika α adalah sudut lancip dan β sudut tumpul, tentukan nilai dari **sin (α - β)** !

   Jawab :

   α lancip berarti α berada di kuadran I dan β tumpul berarti β berada di kuadran II.

$\mathbf{\cos\alpha = \frac{3}{5}} \;\rightarrow\; \mathbf{\sin\alpha = \frac{4}{5}}$

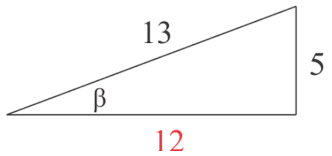
sin α bernilai positif karena α berada di kuadran I.



$\mathbf{\sin\beta = \frac{5}{13}} \;\rightarrow\; \mathbf{\cos\beta = -\frac{12}{13}}$

cos β bernilai negatif karena β berada di kuadran II.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
&= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} \\
&= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} \\
&= -\frac{63}{65}
\end{aligned}$$



3. Segitiga PQR siku-siku di P. Jika **cos (P + Q) =** $\frac{2}{3}$, tentukan nilai **sin Q + cos R** !

   Jawab :

   Karena sudut P siku-siku, maka P = 90°

$$\begin{aligned}
\cos(P + Q) = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \cos(90^\circ + Q) &= \frac{2}{3} \\
\cos 90^\circ \cos Q - \sin 90^\circ \sin Q &= \frac{2}{3} \\
0 \,.\, \cos Q - 1 \,.\, \sin Q &= \frac{2}{3} \\
0 - \sin Q &= \frac{2}{3} \\
\sin Q &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

   $P + Q + R = 180^\circ \;\rightarrow\; 90^\circ + Q + R = 180^\circ$

   $R = 90^\circ - Q$

   $\cos R = \cos(90^\circ - Q) = \sin Q$

   diperoleh $\cos R = \sin Q = -\frac{2}{3}$

   Jadi, $\sin Q + \cos R = -\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

F. Latihan Soal

Berikut soal-soal yang bisa kalian coba untuk melihat sejauh mana kalian menguasai materi ini. Sering-seringlah latihan soal, jika kurang silakan mengambil dari berbagai sumber lainnya baik yang cetak maupun digital dan online. Ingat, tidak ada ceritanya orang merugi karena banyak latihan… Untuk mencoba latihan soal online, kalian bisa scan atau klik QR Code di samping. Selamat mencoba…

Quis Jumlah Selisih 2 Sudut

Jawablah dengan benar.

1. Nilai tan 105^0 adalah…
2. Sederhanakan bentuk cos $(100^0 + x)$ cos $(10^0 - x)$ + sin $(100^0 + x)$ sin $(10^0 - x)$.
3. Diketahui $0^0 \le x \le 90^0$ dan $\tan x = \frac{4}{3}$, nilai $\sin\left(30^0 - x\right)$ adalah…
4. Bentuk sederhana dari $\sin\alpha - \sin\left(\alpha - 120^0\right) - \sin\left(\alpha - 240^0\right)$ adalah …
5. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, x sudut tumpul dan y sudut lancip. Nilai tan $(x + y)$ = …

Jawab:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....