



# LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD) RUMUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT



Mata Pelajaran : Matematika Peminatan  
 Jenjang pendidikan : SMA  
 Kelas/Semester : XI MIPA 3/ganjil  
 Materi Pokok : Rumus-rumus Trigonometri  
 Alokasi Waktu : 2 x 45 Menit



NAMA KELOMPOK :



NAMA ANGGOTA KELOPOK :

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

KD 3.2 : Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus.

Tujuan Pembelajaran :

Dengan menggunakan pendekatan STEAM, model pembelajaran Problem Based Learning, media pembelajaran Microsoft Office 365, siswa disajikan Lembar Kerja Peserta Didik kemudian siswa dapat menganalisis rumus jumlah dan selisih sudut pada trigonometri dan menerapkannya dalam permasalahan kontekstual dengan teliti, disiplin dan tepat waktu melalui diskusi kelompok.

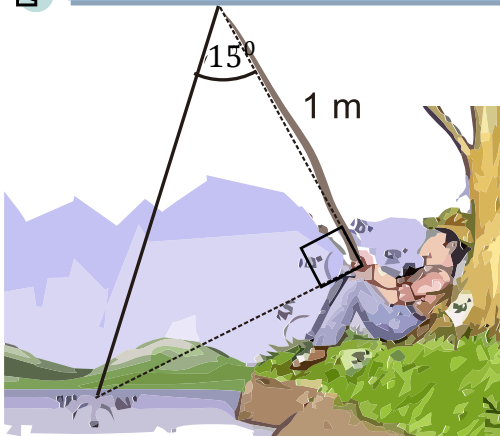
Petunjuk Umum :

Jawablah setiap pernyataan berikut dengan jalan berdiskusi dengan teman sekelompokmu !

## A. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut



**Ayo Belajar Pemecahan Masalah !**



### Permasalahan 1

Pada gambar 1.1 di atas, seorang memancing ikan dengan panjang galahnya 1 meter. berapakah panjang tali minimal yang dibutuhkan agar pemancing dapat memancing ikan dengan sudut antara galah dengan benang adalah  $15^\circ$ ? (minimal tali dapat menyentuh air)



**Ayo Kumpulkan Informasi !**

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari  $\cos 15^\circ$ . Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Untuk mencari nilai dari  $\sin 75^\circ$  tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\cos 15^\circ = \cos(\dots - \dots)$  (Ubah  $75^\circ$  dalam penjumlahan sudut istimewa)

Jika  $\alpha = 45^\circ$  dan  $\beta = 30^\circ$

Jadi, berapa nilai  $\cos(\alpha - \beta)$  ?

# 1. Menentukan rumus selisih dua sudut kosinus.



## Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\cos(\alpha - \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi perbandingan trigonometri dan luas segitiga.

**Ingat !**

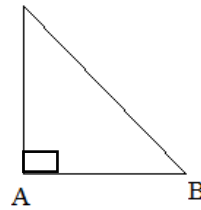
Perbandingan Trigonometri : C

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC}$$

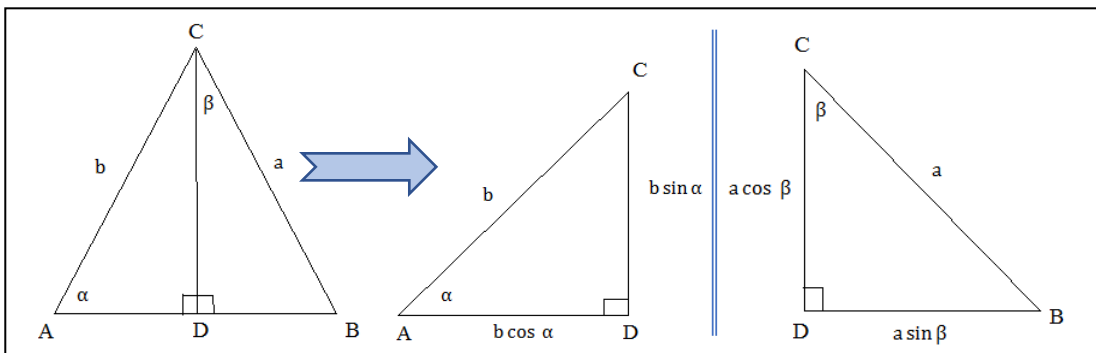
Luas Segitiga :

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$



## Amatilah !

Perhatikan Gambar 1.2 segitiga ABC.  $\Delta ABC$  di bawah ini adalah gabungan dari  $\Delta ADC$  dan  $\Delta DBC$ .



Gambar 1.2. Segitiga ABC



## Ayo selesaikan !

Perhatikan gambar 1.2 di atas !

Pada  $\Delta ABC$ ,  $\angle BCA = 90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ - (\alpha - \beta)$

Luas  $\Delta ABC = \Delta ACD + \Delta CDB$

$$= \left( \frac{1}{2} \times AD \times CD \right) + \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right) + \left( \frac{1}{2} \times a \sin \beta \times a \cos \beta \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right) + \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} a b \cos \alpha \cos \beta \right) + \left( \frac{1}{2} a b \sin \alpha \sin \beta \right) \dots \dots \dots (1)$$

Disisi lain,

$$\begin{aligned} \text{Luas } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin \angle BCA \\ &= \frac{1}{2} ab \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\text{Luas } \triangle ABC = \triangle ACD + \triangle CDB$$

$$\frac{1}{2} ab \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \left(\frac{1}{2} a b \cos \alpha \cos \beta\right) + \left(\frac{1}{2} a b \sin \alpha \sin \beta\right) \leftrightarrow \text{coret } \frac{1}{2} ab$$

$$\sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$



### Coba Periksa !

Dari penemuan rumus  $\cos(\alpha - \beta)$  di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa untuk mengetahui apakah rumus yang kita peroleh tersebut benar atau tidak. Kita tahu nilai dari  $\cos 30^\circ$  adalah  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Gunakan rumus  $\cos(\alpha - \beta)$  di atas untuk mencari nilai sudut istimewa  $30^\circ$ . Jika  $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$ . Lakukan perhitungan di bawah ini.

$$\cos(90^\circ - 60^\circ) = \dots\dots\dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa  $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  ?)



### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\cos(\alpha - \beta)$  adalah

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

## 2. Menentukan rumus jumlah dua sudut kosinus.



### Ayo Pikirkan !

Satu rumus sudah kalian temukan sendiri yaitu  $\cos(\alpha - \beta)$ . Selanjutnya, kamu harus pikirkan bagaimana kalau menghitung nilai dari  $\cos 75^\circ$ . Apabila nilai  $75^\circ$  dikolaborasikan dengan nilai sudut istimewa diperoleh seperti ini  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ . Artinya kalian harus menemukan rumus jumlah dua sudut dari cosinus yaitu  $\cos(\alpha + \beta)$ .



### Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\cos(\alpha + \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu  $\cos -\beta = \cos \beta$  dan  $\sin -\beta = -\sin \beta$



### Ayo Selesaikan !

Bentuk  $\cos(\alpha + \beta)$  dapat diubah menjadi  $\cos(\alpha - (-\beta))$

Dapat dijabarkan menggunakan rumus  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Perhatikan,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\dots))$

= .....

= .....



### Simpulan

Jadi dapat, disimpulkan rumus  $\cos(\alpha + \beta)$  adalah

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots + \dots$$

Sehingga soal pada **permasalahan 1** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

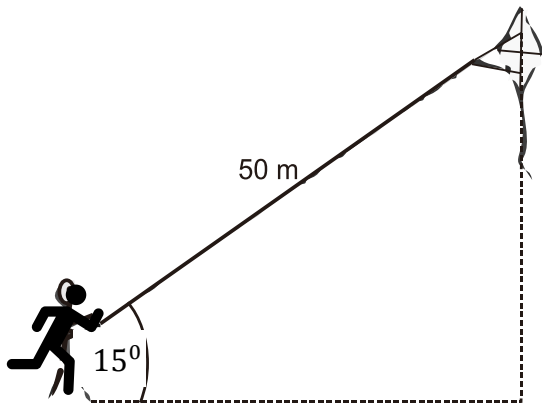
.....

.....



## Ayo Belajar Pemecahan Masalah !

### Permasalahan 2



Pada gambar disamping, seorang anak bermain layang-layang dengan panjang benang yang digunakan 50 meter dan membentuk sudut  $15^\circ$  dengan tanah. Berapakah tinggi layangan tersebut?



## Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari  $\sin 75^\circ$ . Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Untuk mencari nilai dari  $\sin 75^\circ$  tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\sin 75^\circ = \sin(\dots + \dots)$  (Ubah  $75^\circ$  dalam penjumlahan sudut istimewa)  
Jika  $\alpha = 30^\circ$  dan  $\beta = 45^\circ$   
Jadi, berapa nilai  $\sin(\alpha + \beta)$  ?

### 3. Menentukan rumus jumlah dua sudut sinus.



## Ayo Selesaikan !

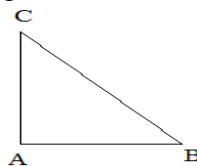
Bagian berikutnya akan diberikan sebuah cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\sin(\alpha + \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi perbandingan trigonometri dan luas segitiga.

**Ingat !**

Perbandingan Trigonometri :

$$\sin B = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC}$$

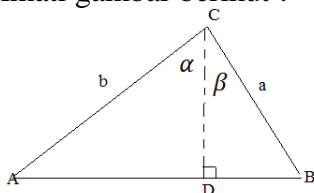


Luas Segitiga :

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

Tugas kalian sekarang adalah mengisi titik-titik pada isian di bawah ini dengan benar. Apabila kalian mengalami kesusahan bisa diskusi dengan teman atau guru.

Amati gambar berikut !



Perhatikan  $\triangle BDC$ ,  
 $\cos \beta = \frac{CD}{BC}$  sehingga  $CD = \dots$   
 $\sin \beta = \frac{BD}{BC}$  sehingga  $BD = \dots$   
 Luas segitiga  $\triangle BDC$   
 $L \triangle BDC = \frac{1}{2} \times BD \times CD$   
 $L \triangle BDC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$   
 $L \triangle BDC = \dots$

Perhatikan  $\triangle ADC$ ,  
 $\cos \alpha = \frac{CD}{AC}$  sehingga  $CD = \dots$   
 $\sin \alpha = \frac{AD}{AC}$  sehingga  $AD = \dots$   
 Luas segitiga  $\triangle ADC$   
 $L \triangle ADC = \frac{1}{2} \times AD \times CD$   
 $L \triangle ADC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$   
 $L \triangle ADC = \dots$

Jadi  $L \triangle ADC + L \triangle BDC = \dots + \dots$   
 $L \triangle ADC + L \triangle BDC = \dots (\dots + \dots)$  .....(1)

Rumus umum luas segitiga  
 $L \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin(\dots + \dots)$  .....(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :  
 $L \triangle ABC = L \triangle ADC + L \triangle BDC$

$\frac{1}{2} \dots (\dots + \dots) = \dots (\dots + \dots)$   
 $\sin(\alpha + \beta) = \dots + \dots$



**Coba Periksa !**

Dari penemuan rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa untuk mengetahui apakah rumus yang kita peroleh tersebut benar atau tidak. Bahwa kita tahu nilai dari  $\sin 60^\circ$  adalah  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  di atas untuk mencari nilai sudut istimewa  $60^\circ$ . Jika  $60^\circ = 30^\circ + 30^\circ$ . Lakukan perhitungan di bawah ini.

$\sin(30^\circ + 30^\circ) = \dots$   
 $\dots$   
 (Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa  $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  ?)



**Simpulan**

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  adalah

$\sin(\alpha + \beta) = \dots + \dots$

#### 4. Menentukan rumus selisih dua sudut sinus.



##### Ayo Pikirkan !

Satu rumus sudah kalian temukan sendiri yaitu  $\sin(\alpha + \beta)$ . Hal yang harus dipikirkan selanjutnya yaitu bagaimana kalau menghitung nilai dari  $\sin 15^\circ$ . Nilai  $15^\circ$  dikolaborasikan dengan nilai sudut istimewa diperoleh  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ . Artinya kalian harus menemukan pula rumus selisih dua sudut dari sinus yaitu  $\sin(\alpha - \beta)$ .  $\sin(\alpha - \beta)$  dapat diubah menjadi  $\sin(\alpha + (-\beta))$ .



##### Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\sin(\alpha - \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu  $\cos -\beta = \cos \beta$  dan  $\sin -\beta = -\sin \beta$



##### Ayo Selesaikan !

Dapat dijabarkan menggunakan rumus  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

Perhatikan,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\dots))$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



##### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\sin(\alpha - \beta)$  adalah

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

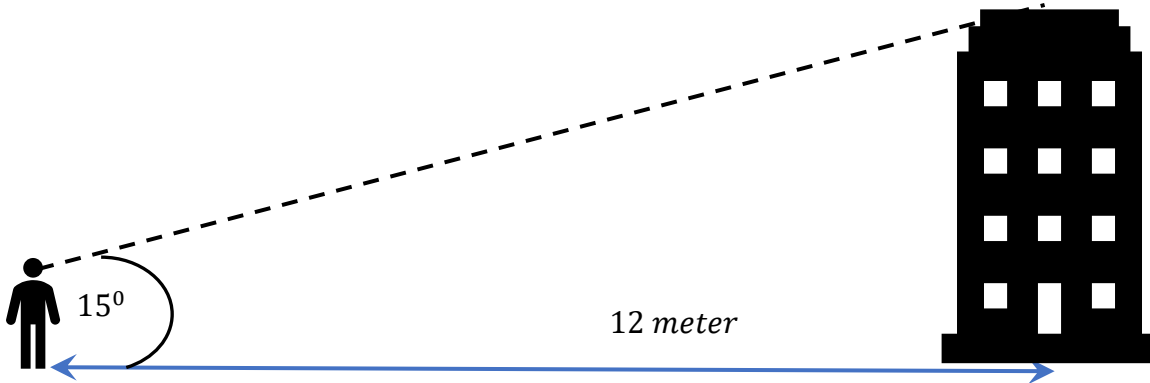
Sehingga soal pada **permasalahan 2** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



## Ayo Belajar Pemecahan Masalah !

### Permasalahan 3



Seseorang melihat sebuah bangunan dari jarak 12 meter dan membentuk sudut elevasi  $15^\circ$  dengan tanah. Berapakah tinggi gedung tersebut?



## Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari  $\tan 15^\circ$ . Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Untuk mencari nilai dari  $\tan 15^\circ$  tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\sin 75^\circ = \sin(\dots - \dots)$  (Ubah  $75^\circ$  dalam penjumlahan sudut istimewa)  
 Jika  $\alpha = 45^\circ$  dan  $\beta = 30^\circ$   
 Jadi, berapa nilai  $\tan(\alpha - \beta)$  ?

## 5. Menentukan rumus jumlah dua sudut tangen.



### Ayo Pikirkan !

Bagaimana kalau rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk tangen ? Bagaimana cara menemukan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  dan  $\tan(\alpha - \beta)$  ?



### Ayo Nyatakan !

Rumus-rumus penjumlahan dan pengurangan pada sinus dan kosinus yang telah dibahas dapat digunakan untuk menemukan rumus penjumlahan tangen sebagai berikut :

Karena  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , maka  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$





### Ayo Selesaikan !

Akibatnya,

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad \text{sama-sama dibagi dengan } \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{1 - \dots}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{1 - \dots}$$



### Coba Periksa !

Dari penemuan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa dari  $\tan 60^\circ$  adalah  $\sqrt{3}$ . Gunakan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  di atas untuk mencari nilai sudut istimewa  $60^\circ$ .

$$\tan(30^\circ + 30^\circ) = \dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  ?)



### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  adalah

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}$$

## 6. Menentukan rumus selisih dua sudut tangen.



### Ayo Pikirkan !

Bagaimana kalau rumus  $\tan(\alpha - \beta)$  ?



### Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\tan(\alpha - \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu  $\tan -\beta = -\tan \beta$



### Ayo Selesaikan !

$\tan(\alpha - \beta)$  dapat diubah menjadi  $\tan(\alpha + (-\dots))$

Dapat dijabarkan menggunakan rumus  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

Perhatikan,

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\dots))$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



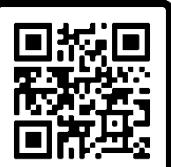
### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\tan(\alpha - \beta)$  adalah

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}$$

Untuk memperdalam materi anda dapat menscan QRcode disamping. Selain berisi materi, juga terdapat beberapa contoh dan latihan yang menarik

TPACK



SCAN ME

Sehingga soal pada **permasalahan 2** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



### Ayo Menyimpulkan !

Dari kegiatan di atas diperoleh pula rumus jumlah dan selisih dua sudut lainnya yaitu

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \dots\dots\dots \\ \sin(\alpha - \beta) &= \dots\dots\dots \\ \cos(\alpha + \beta) &= \dots\dots\dots \\ \cos(\alpha - \beta) &= \dots\dots\dots \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \end{aligned}$$

## 7. Rumus Sudut Rangkap $\sin 2\alpha$ , $\cos 2\alpha$ dan $\tan 2\alpha$



### Coba Nyatakan !

Apa yang kamu ketahui tentang sudut rangkap ?

Sudut rangkap merupakan sudut besarnya dua kali dari sudut asli. Dapat dibentuk menjadi  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  dan  $\tan 2\alpha$



### Coba Pikirkan !

Bagaimana cara menemukan rumus sudut rangkap  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  dan  $\tan 2\alpha$  ?

Adakah hubungan rumus sudut rangkap dengan rumus jumlah dan selisih dua sudut yang sudah ditemukan sebelumnya ? Apakah sudut rangkap dapat dibentuk menjadi sudut penjumlahan ?



### Coba Rumuskan !

Ubahlah sudut rangkap dalam bentuk penjumlahan

Ubah  $2\alpha = \dots + \dots$

Sehingga,

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) ; \cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) ; \tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha)$$



### Ayo Ingat !

Di awal kalian sudah mempelajari rumus sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$



### Ayo Selesaikan !

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\dots + \dots) && \text{Ubah } 2\alpha = \dots + \dots \\ &= \sin \dots \cos \dots + \cos \dots \sin \dots && \text{Gunakan rumus } \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2 \cdot \sin \dots \cos \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\dots + \dots) && \text{Ubah } 2\alpha = \dots + \dots \\ &= \cos \dots \cos \dots - \sin \dots \sin \dots && \text{Gunakan rumus } \cos(\alpha + \beta) \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\dots + \dots) && \text{Ubah } 2\alpha = \dots + \dots \\ &= \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots} && \text{Gunakan rumus } \tan(\alpha + \beta) \\ &= \frac{\dots}{\dots - (\dots)^2}\end{aligned}$$

### Contoh Soal

1. Tentukan nilai dari  $2 \cos^2 15^\circ - 1$  ! (tanpa menggunakan kalkulator)

Alternatif Jawaban :

Ingat rumus  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

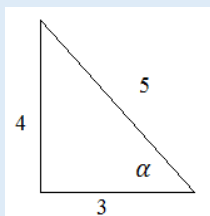
Maka  $2 \cos^2 15^\circ - 1 = \cos 2 \cdot 15^\circ$

$$2 \cos^2 15^\circ - 1 = \cos 30^\circ$$

$$2 \cos^2 15^\circ - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

2. Jika  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah sudut lancip dan  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Tentukan  $\sin 2\alpha$  dan  $\cos 2\alpha$  !

Alternatif Jawaban :



Dari gambar di atas diperoleh :

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Akan dicari  $\sin 2\alpha$  dan  $\cos 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos 2\alpha = \frac{-7}{25}$$

TPACK

Untuk memperdalam materi sudut rangkap anda dapat menscan QRcode disamping yang berisi video materi





### Ayo Menyimpulkan !

Jadi, dapat disimpulkan rumus sudut rangkap adalah

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \dots\dots\dots \\ \cos 2\alpha &= \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \tan 2\alpha &= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \end{aligned}$$

## 8. Rumus transformasi perkalian sinus dan kosinus ke penjumlahan atau pengurangan sinus dan kosinus



### Ayo Pikirkan !

Bagaimana kalau kalian disuruh menghitung nilai dari  $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$  ? Apakah kalian harus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk mencari masing-masing nilai  $\sin 75^\circ$  dan  $\sin 15^\circ$ , kemudian hasilnya dikalikan.?

Hal tersebut tidak perlu. Pada tahap ini kalian akan menemukan rumus perkalian dari sinus dan kosinus.



### Ayo Ingat !

Di awal kalian sudah mempelajari rumus sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



### Ayo pikirkan !

Bagaimana hubungan rumus sinus dan cosinus dua sudut di atas dengan rumus perkalian sinus dan cosinus ? Bisakah kita mencari rumus perkalian sinus dan cosinus seperti  $\sin \alpha \cos \beta$ ,  $\sin \alpha \sin \beta$ ,  $\cos \alpha \sin \beta$ , dan  $\cos \alpha \cos \beta$  dengan menggunakan rumus di atas ?

Untuk melakukannya, kita dapat menjumlahkan dan mengurangkan kedua rumus jumlah dan selisih dua sudut tersebut.



**Ayo selesaikan !**

**Pengurangan antara  $\sin(\alpha + \beta)$  dan  $\sin(\alpha - \beta)$  diperoleh :**

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

..... -

Diperoleh,

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \dots\dots\dots$$

**Penjumlahan antara  $\sin(\alpha + \beta)$  dan  $\sin(\alpha - \beta)$  diperoleh :**

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

..... +

Diperoleh,

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \dots\dots\dots$$

**Pengurangan antara  $\cos(\alpha + \beta)$  dan  $\cos(\alpha - \beta)$  diperoleh :**

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

..... -

Diperoleh,

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \dots\dots\dots$$

**Penjumlahan antara  $\cos(\alpha + \beta)$  dan  $\cos(\alpha - \beta)$  diperoleh :**

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

..... +

Diperoleh,

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \dots\dots\dots$$

TPACK

Untuk memperdalam materi, anda bisa menscan QRcode





### Coba Periksa !

Kita akan memeriksa apakah penemuan rumus di atas sudah benar atau belum. Kita akan mencoba untuk menghitung nilai dari  $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$ . Perhitungan pertama menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan perhitungan kedua dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus yang baru saja ditemukan.

Perhitungan 1 : Rumus jumlah dan selisih dua sudut

$$\sin 75^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\sin 15^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\text{Hasil perkalian } \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \dots\dots\dots$$

Perhitungan 2 : Rumus perkalian sinus dan cosinus

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \dots\dots\dots$$

Apakah perhitungan 1 dan 2 hasilnya sama ? Lakukan untuk ketiga rumus yang lain untuk memeriksa kebenaran rumus yang ditemukan.

#### Contoh soal

Tentukan nilai dari  $\sin 70^\circ \cdot \sin 20^\circ$  !

Alternatif Jawaban :

Ingat menggunakan rumus  $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

$$\sin 70^\circ \cdot \sin 20^\circ = -\frac{1}{2}(\cos(70^\circ + 20^\circ) - \cos(70^\circ - 20^\circ))$$

$$\sin 70^\circ \cdot \sin 20^\circ = -\frac{1}{2}(0 - \cos(50^\circ))$$

$$\sin 70^\circ \cdot \sin 20^\circ = \frac{1}{2} \cos 50^\circ$$

TPACK

Untuk memperdalam latihan soal sudut rangkap anda dapat menscan QRcode disamping





### Ayo Menyimpulkan !

Jadi, rumus perkalian dari sinus dan cosinus adalah sebagai berikut :

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \dots\dots\dots$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \dots\dots\dots$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \dots\dots\dots$$

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \dots\dots\dots$$