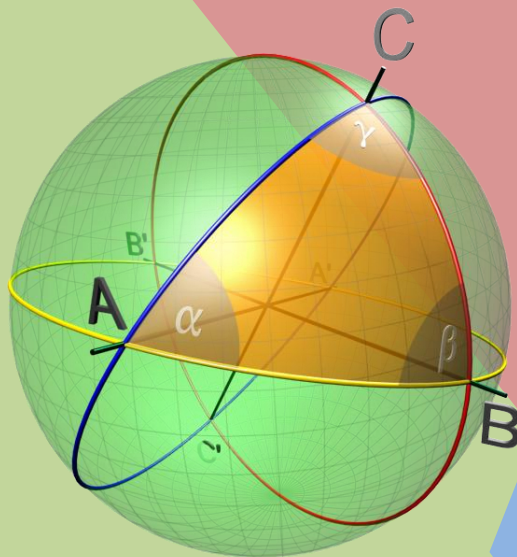


# LKPD

## Lembar Kegiatan Peserta Didik

### Trigonometri

Rumus Sudut Ganda dan Tengahan

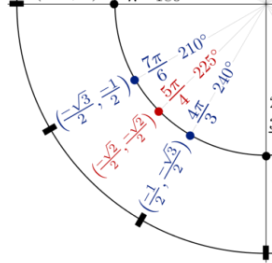
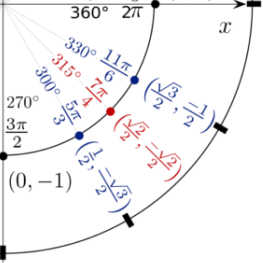


Oleh:

**Anang Wibowo, S.Pd**

Mahasiswa PPG Dalam Jabatan 2020 Angkatan 1

LPTK Universitas PGRI Madiun (UNIPMA)



# Lembar Kegiatan Peserta Didik

## Rumus Sudut Ganda dan Tengahan

Nama Siswa : .....  
 Kelas : .....  
 Semester/TP : .....

### A. Kompetensi Inti (KI)

- KI-3 : Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
- KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

### B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

**Indikator:**

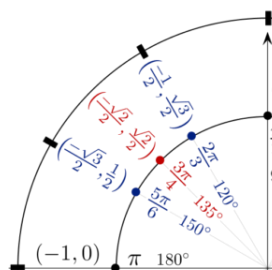
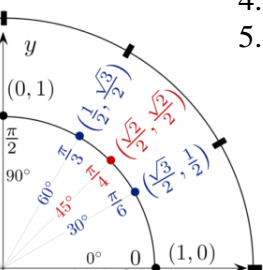
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus sudut ganda dan tengahan.

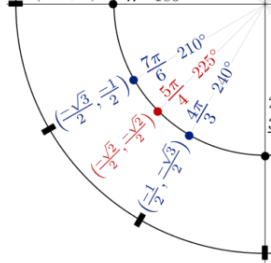
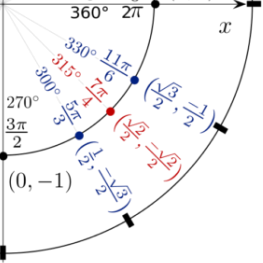
### C. Tujuan Kegiatan

Setelah mengikuti pembelajaran daring dengan Google Classroom diharapkan peserta didik mampu menurunkan rumus sudut ganda dan tengahan kemudian menggunakannya dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus tersebut dengan teliti dan benar.

### D. Petunjuk Kegiatan

1. Mulailah belajar dengan niat ikhlas menuntut ilmu dan berdoa.
2. Isilah data diri kalian dengan benar.
3. Baca dan cermati perintah dalam LKPD ini dengan seksama.
4. Isilah bagian-bagian yang kosong.
5. Jika ada kesulitan, diskusikan dengan teman kalian.





## E. Kegiatan Peserta Didik

Sudut ganda atau sudut rangkap dua biasa dinyatakan dalam sudut  $2\alpha$ . Perbandingan trigonometri untuk sudut ganda, yaitu  **$\sin 2\alpha$** ,  **$\cos 2\alpha$**  dan  **$\tan 2\alpha$**  dapat kita nyatakan dalam perbandingan trigonometri sudut tunggalnya, yaitu sudut  $\alpha$ . Ekspresi trigonometri yang melibatkan sudut  $2\alpha$  dan sudut  $\alpha$  inilah yang nantinya kita sebut dengan rumus trigonometri sudut ganda.

Rumus sudut ganda dapat dengan mudah kita turunkan dari [rumus jumlah dan selisih dua sudut](#), dalam hal ini  $\sin(\alpha + \beta)$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$  dan  $\tan(\alpha + \beta)$ .

### Penurunan Rumus Sinus Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus  $\sin(\alpha + \beta)$ .

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Jika  $\alpha = \beta$ , maka rumus diatas menjadi  $\sin(\alpha + \dots) = \sin \alpha \cos \dots + \cos \alpha \sin \dots$

Karena  $\alpha + \alpha = 2\alpha$  dan  $\sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha \sin \alpha$ , maka persamaan diatas menjadi

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \dots\dots\dots$$

### Penurunan Rumus Cosinus Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus  $\cos(\alpha + \beta)$ .

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Jika  $\alpha = \beta$ , maka rumus diatas menjadi  $\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \dots - \sin \alpha \sin \dots$ , atau dapat kita tulis

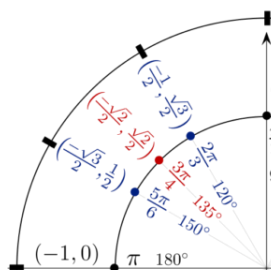
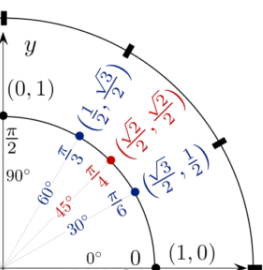
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

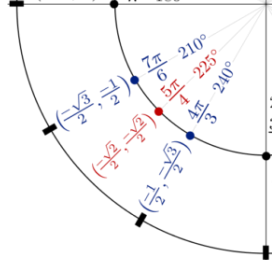
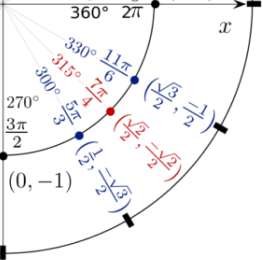
Jika kita substitusikan  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \dots\dots\dots)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \dots\dots\dots$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - \dots$$





Jika kita substitusikan  $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$  pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = (1 - \dots\dots\dots) - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

### Penurunan Rumus Tangen Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

Jika  $\alpha = \beta$ , maka rumus diatas menjadi

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \dots\dots}{1 - \tan \alpha \tan \dots\dots}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \dots\dots}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Rumus trigonometri sudut ganda akan sangat berguna dalam menyederhanakan ekspresi-ekspresi trigonometri nantinya, khususnya pada pokok bahasan yang melibatkan fungsi trigonometri seperti limit, turunan, integral dan persamaan trigonometri.

Untuk sudut setengah atau tengahan dinyatakan dalam bentuk  $\sin \frac{1}{2} \alpha$ ,  $\cos \frac{1}{2} \alpha$ , dan  $\tan \frac{1}{2} \alpha$ . Kita bisa menurunkannya dari rumus sudut ganda cosinus, yaitu sebagai berikut:

### Penurunan Rumus Sinus Sudut Setengah

Coba perhatikan kembali rumus  $\cos 2\alpha$ .

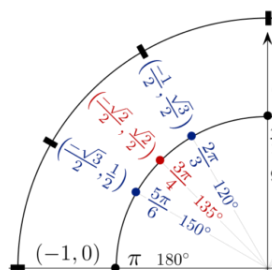
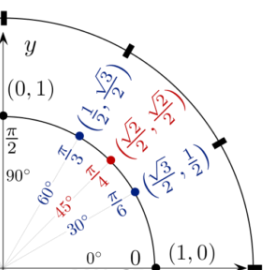
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

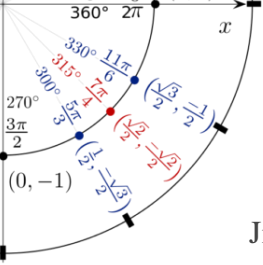
Jika kita mengubah bentuk menjadi  $\sin \alpha$ , kita dapatkan

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \dots\dots\dots}{\dots\dots}$$

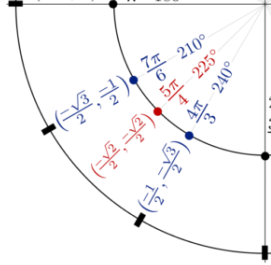
$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \dots\dots\dots}{2}}$$





Jika  $\alpha = \frac{1}{2}\theta$  maka

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \dots}{2}}$$



### Penurunan Rumus Cosinus Sudut Setengah

Coba perhatikan kembali rumus  $\cos 2\alpha$ .

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Jika kita mengubah bentuk menjadi  $\cos \alpha$ , kita dapatkan

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \dots$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \dots}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \dots}{2}}$$

Jika  $\alpha = \frac{1}{2}\theta$  maka

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \dots}{2}}$$

Silakan simak video dibawah dengan men-scan atau klik QR Code



Sudut Ganda



Soal-soal



Sudut Tengahan



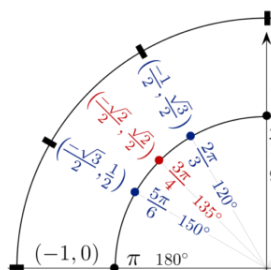
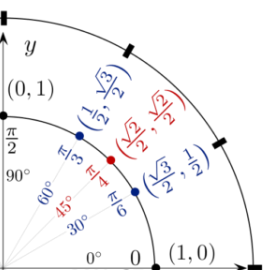
Soal-soal

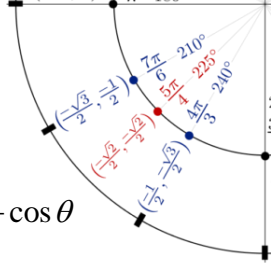
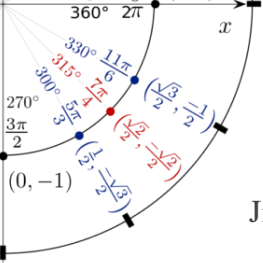
### Penurunan Rumus Tangen Sudut Setengah

Karena  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  maka

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}\theta &= \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} \Rightarrow \tan \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \end{aligned}$$

$$\text{atau } \tan \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$





Jika masing-masing pembilang dan penyebut dalam akar kita kalikan dengan  $1 - \cos \theta$

$$\begin{aligned}
 \text{akan kita dapatkan } \tan \frac{1}{2} \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(\dots\dots\dots)}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta) \dots\dots\dots}{1 - \dots\dots\dots}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta) \dots\dots\dots}{1 - \dots\dots\dots}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta) \dots\dots\dots}{\sin^2 \theta}} \\
 &= \frac{1 - \cos \theta}{\dots\dots\dots}
 \end{aligned}$$

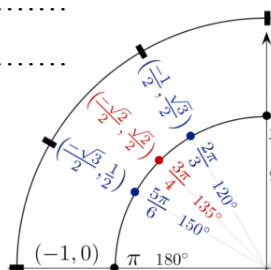
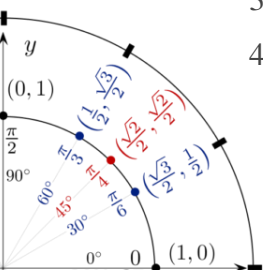
Jika masing-masing pembilang dan penyebut dalam akar kita kalikan dengan  $1 + \cos \theta$

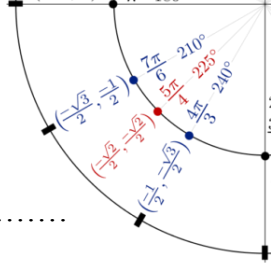
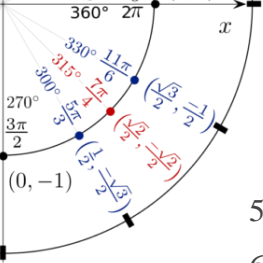
$$\begin{aligned}
 \text{akan kita dapatkan } \tan \frac{1}{2} \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(\dots\dots\dots)}{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{1 - \dots\dots\dots}{(1 + \cos \theta) \dots\dots\dots}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{1 - \dots\dots\dots}{(1 + \cos \theta) \dots\dots\dots}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta) \dots\dots\dots}} \\
 &= \frac{\dots\dots\dots}{1 + \cos \theta}
 \end{aligned}$$

### Rangkuman

Dari kegiatan yang sudah kalian kerjakan di atas, silakan tuliskan atau rangkum kembali rumus-rumus yang telah kalian dapatkan.

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....





5. ....
6. ....
7. ....
8. ....
9. ....
10. ....

**Contoh Soal**

1. Tentukan nilai dari  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  dan  $\tan 2\alpha$  jika diketahui  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , dengan  $\alpha$  lancip!

Jawab :

Diketahui  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku akan diperoleh  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  dan  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ .

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

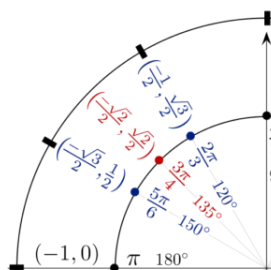
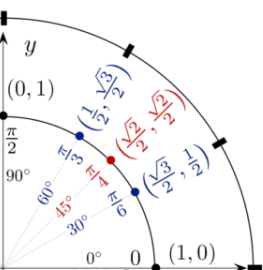
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

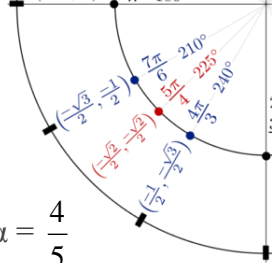
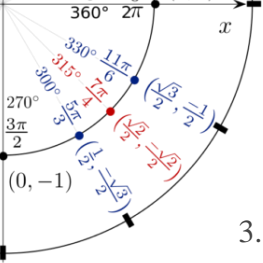
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

2. Diketahui  $\sin \alpha = p$  dan  $\cos \beta = q$ .  
Nyatakan  $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$  dalam p dan q.

Jawab :

$$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \frac{1}{2}((1 - 2 \sin^2 \alpha) + (2 \cos^2 \beta - 1)) = \frac{1}{2}(2 \cos^2 \beta - 2 \sin^2 \alpha) = q^2 - p^2$$





3. Diketahui segitiga sama kaki ABC dengan  $\angle A = \angle B = \alpha$  dan  $\angle C = \theta$ . Jika  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , maka  $\tan \theta = \dots$

Jawab :

Diketahui  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ . Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku akan diperoleh  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \alpha + \alpha + \theta &= 180^\circ \\ \Rightarrow \theta &= 180^\circ - 2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan (180^\circ - 2\alpha) \\ &= -\tan 2\alpha \\ &= -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= -\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\frac{16}{4}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}\end{aligned}$$

## F. Latihan Soal

Berikut soal-soal yang bisa kalian coba untuk melihat sejauh mana kalian menguasai materi ini. Sering-seringlah latihan soal, jika kurang silakan mengambil dari berbagai sumber lainnya baik yang cetak maupun digital dan online. Ingat, tidak ada ceritanya orang merugi karena banyak latihan... Untuk mencoba latihan soal online, kalian bisa scan atau klik QR Code di samping. Selamat mencoba...



Quis Sudut Rangkap

**Jawablah dengan benar.**

- Tentukan nilai  $\sin 22,5^\circ$ .
- Gunakan rumus sinus sudut ganda untuk menyederhakan bentuk-bentuk berikut!
  - $8 \sin 3x \cos 3x$
  - $\cos 5x \sin 5x$
  - $(\sin 4x - \cos 4x)^2 = 1 - \sin 8x$
- Tunjukkan bahwa:  $1 - \cos nx = 2 \sin^2 \left( \frac{nx}{2} \right)$ ,  $n$  konstan.
- Untuk  $0 < x < 2\pi$ , tentukan himpunan penyelesaian dari  $\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$

