Materi Ajar

Matriks

XI

Ateng Transani, S.Pd

SMK Negeri 1 Pante Ceureumen

DAFTAR ISI

Glosarium

Determinan adalah nilai yang diperoleh dengan rumus ad-bc untuk matriks berordo 2 x 2 atau aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi untuk matriks berordo 3 x 3

Elemen adalah anggota matriks yang diletakkan baris dan kolom

Elemen seletak adalah dua atau lebih elemen yang menempati baris dan kolom yang sama.

Invers matriks adalah matriks kebalikan dari matriks persegi.

Kesamaan matriks adalah matriks – matriks dengan ordo sama dan elemen-elemen yang seletak dari matriks-matriks tersebut sama.

Matriks adalah susunan bilangan yang terdiri dari baris dan kolom.

Matriks identitas adalah matriks persegi yang semua unsur diagonalnya sama dengan 1 dan semua unsur yang lain adalah nol.

Matriks persegi adalah matrik dengan banyak baris sama dengan banyak kolom.

Operasi matriks adalah operasi yang terdiri atas penjumlahan, pengurangan, perkalian, perpangkatan atau kombinasinya.

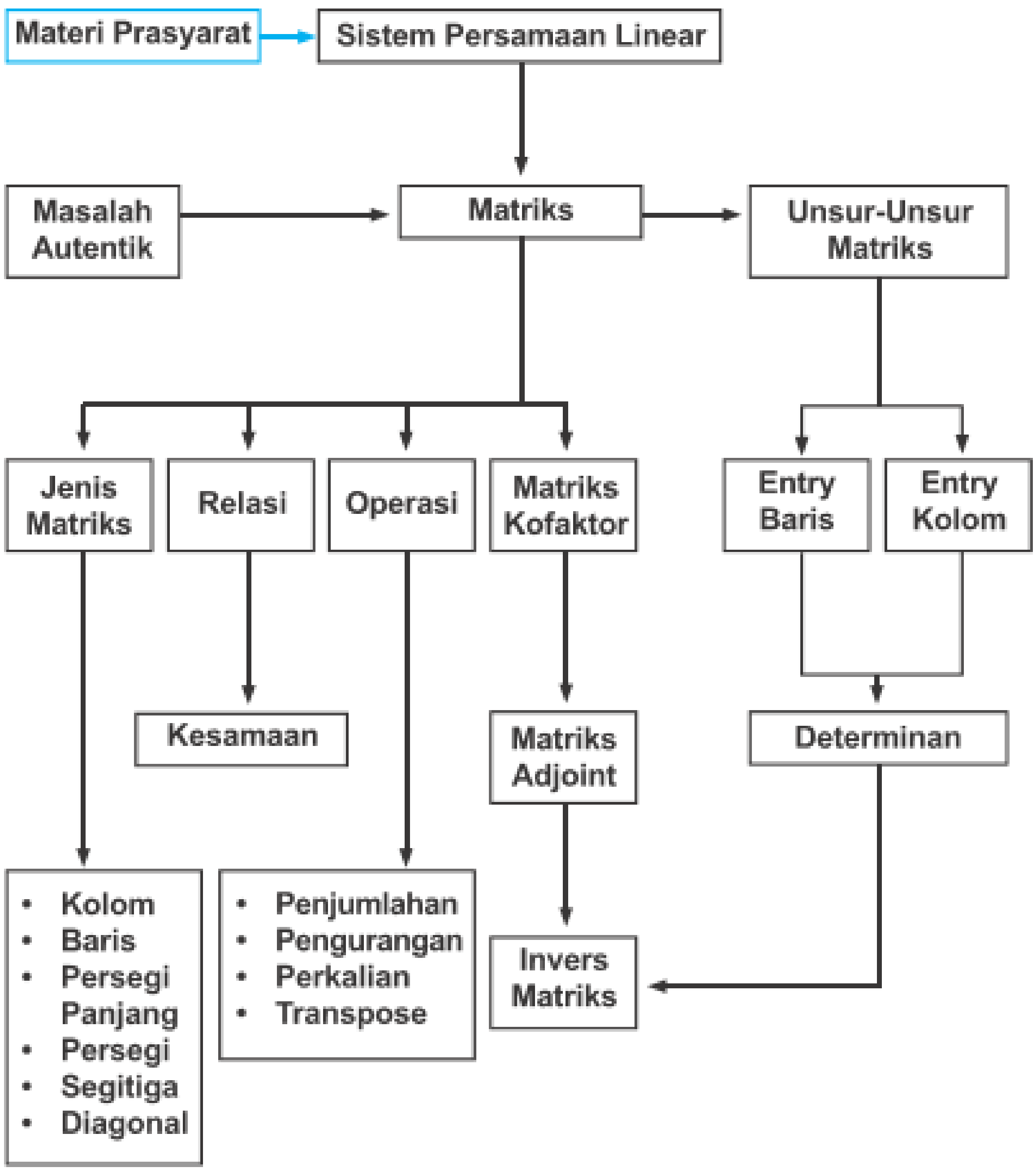
Ordo matriks adalah ukuran matriks yang dinyatakan dalam suatu baris x kolom.

Transpose matriks adalah matriks yang dihasilkan dengan mengubah baris-baris matriks menjadi kolom-kolom matriks.

Daftar Isi

Peta konsep

Peta Konsep



《 Glosarium
Daftar Isi
Pendahuluan 》

PENDAHULUAN

IDENTITAS MODUL

Nama Mata Pelajaran : Matematika

Kelas / Semester / Alokasi Waktu : XI /Ganjil / 12 JP

Judul eModul : Matriks

KOMPETENSI DASAR

Kompetensi dasar (KD) yang akan anda capai dalam pembelajaran ini adalah:

KOMPETENSI DASAR		INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI (IPK)	
3.3	Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpose	3.3.1	Menentukan jenis-jenis matriks
		3.3.2	Menentukan kesamaan matriks
		3.3.3	Menentukan hasil Transpose matriks
		3.3.4	Menentukan nilai variabel dari elemen suatu matriks menggunakan syarat kesamaan dua matriks
		3.3.5	Menentukan hasil operasi penjumlahan matriks
		3.3.6	Menentukan hasil operasi pengurangan matriks
		3.3.7	Menentukan hasil operasi perkalian skalar dengan matriks
		3.3.8	Menentukan operasi perkalian matriks dengan matriks dan sifat-sifatnya
4.3	Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya	4.3.1	Menentukan penyelesaian masalah kontekstual yang berkaitan dengan kesamaan dua matriks
		4.3.2	Menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan penjumlahan matriks
		4.3.3	Menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan pengurangan matriks.
		4.3.4	Menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan perkalian skalar dengan matriks.
		4.3.5	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perkalian matriks

DESKRIPSI

Selamat datang di dunia matematika, modul ini akan membuat kalian lebih mudah belajar tentang matrik, dan kenapa kalian sangat penting belajar matrik??? Karena matriks banyak di terapkan dalam kehidupan sehari-hari. Dikaitkan dengan penggunaan program linear, analisis input output baik dalam ekonomi, statistik, maupun dalam bidang pendidikan, manajemen, kimia, dan bidang – bidang teknologi yang lainnya. Modul materi matriks ini akan mejelaskan kepada kalian pengertian matriks, operasi hitung apa saja yang digunakan dalam matriks, dan masalah apa saja yang dapat diselesaikan dengan penggunaan matriks.

PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Agar modul ini dapat kalian pelajari dengan mudah, maka perhatikanlah petunjuk belajar berikut:

Bacalah modul ini dengan baik, untuk memahami lebih dalam kalian dapat mengulang membacanya. Kalian dapat memberikan note/catatan/tanda pada bagian yang penting.

Setelah kalian mempelajari modul ini jangan lupa untuk mengerjakan soal-soal evaluasi yang ada dan perlu kalian ingat dalam setiap pengerjaan kalian harus teliti dengan tanda positif/negatif.

Untuk melihat hasil belajar, kalian dapat mengoreksi hasil pengerjaan soal-soal evaluasi kalian dengan kunci jawaban dan penskoran yang ada dengan ketuntasan minimal 75.

MATERI PEMBELAJARAN

Materi dalam pembelajaran ini adalah Matriks yang membahas tentang:

- Pengertian Matriks
- Operasi Matriks
- Transpose Matriks
- Kesamaan Matriks
- Macam-macam Matriks
- Determinan dan Invers Matriks
- Aplikasi Matriks

TUJUAN PEMBELAJARAN

Melalui kegiatan pembelajaran menuntut peserta didik untuk mengamati (membaca) permasalahan, menuliskan penyelesaian, mengidentifikasi fakta dan mendiskripsikan pengertian matriks. Selain itu, peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks yaitu pengertian matriks, operasi matriks, transpose matriks, kesamaan matriks, macam-macam matriks, determinan dan invers matriks serta aplikasi matriks dalam kehidupan sehari-hari.

Peta Konsep | Daftar Isi | Keg. Belajar 1

Kegiatan Pembelajaran 1

1. URAIAN MATERI

A. Definisi Matriks

Perhatikan Permasalahan Berikut ini

Kemarin Juanida, riska dan fera diminta oleh guru bidang study untuk mengukur rata-rata ketinggian tanaman jagung dan kangkung di dua lokasi praktik lapangan yang berbeda, kemudian hasilnya di serahkan kepada guru untuk mengetahui tingkat pertumbuhan tanaman tersebut. Setalah dilakukan pengukuran di dapat data sebagai berikut :

- Data Junaida

	Jagung	**Kangkung**
Lokasi A	25 cm	10 cm
Lokasi B	23 cm	12 cm

- Data Riska

	Jagung	**Kangkung**
Lokasi A	24 cm	10 cm
Lokasi B	23 cm	12 cm

- Data Fera

	Jagung	**Kangkung**
Lokasi A	25 cm	10 cm
Lokasi B	23 cm	12 cm

Dari hasil catatan tersebut

a. Tulislah informasi tersebut dalam bentuk matriks
b. Berdasarkan bentuk ketiga matriks, selidiki amanakah menurutmu bentuk yang sama? Dan berikan alasannya.

Petunjuk penyelesaian :

Lengkapi matrik di bawah ini

Menyajikan ke bentuk matriks

Catatan junaida dimisalkan sebagai $Matrik\ A = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

Catatan Riska dimisalkan sebagai $Matrik\ B = \begin{bmatrix} 24 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

Catatan Fera dimisalkan sebagai $Matrik\ C = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

Susunan Tersebut terdiri atas :

$$\text{Matriks } A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Baris ke 1} \\ \rightarrow \text{Baris ke 2} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{Kolom 1} & \text{Kolom 2} \end{array} \end{array}$$

a_{12} artinya elemen matriks yang terletak pada baris ke-1 kolom ke-2 atau $a_{12} = 10$

a_{21} artinya elemen matriks yang terletak pada baris ke-2 kolom ke-1 atau $a_{21} = 23$

a_{22} artinya elemen matriks yang terletak pada baris ke-2 kolom ke-2 atau $a_{22} = 12$

Definisi 3.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

B. Jenis- Jenis Matriks

Perhatikan kembali matriks diatas

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini adalah 1 × n, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

$T_{1\times 2} = [46 \quad 43]$,

$T_{1\times 4} = [22 \quad 19 \quad 14 \quad 12]$,

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Matriks kolom berordo m × 1, dengan m banyak baris pada matriks tersebut. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$$T_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 43 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix},$$

$$T_{5\times 1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix},$$

c. Matriks Persegi Panjang

Matriks persegi panjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo m × n.

$$T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix},$$

$$T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix},$$

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo n × n.

$$T_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix},$$

Tinjaulah matriks persegi berordo 4 × 4 di bawah ini.

$$H_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

→ **Diagonal Samping matriks *H***

→ **Diagonal Utama matriks *H***

Diagonal utama suatu matrik adalah semua entry matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks adalah semua entry matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F berordo 4 × 4. Terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks persegi yang berpola seperti matriks F atau G disebut matriks segitiga.

Jadi, matriks segitiga merupakan suatu matriks persegi berordo n × n dengan entry-entry matriks di bawah atau di atas diagonal utama semuanya bernilai nol.

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep pada matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks pesegi, seperti matriks berikut ini:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

- $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- $C = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka matriks persegi dengan pola “semua entrynya bernilai nol, kecuali entry diagonal utama tidak semua nol” disebut matriks diagonal.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

- $I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika pola tersebut terdapat suatu matriks persegi, yaitu semua entry diagonal utama semua bernilai positif 1, disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo n × n.

h. Matriks Nol

Jika entry suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

- $O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{1\times 3} = [0 \;\; 0 \;\; 0]$,

maka disebut matriks nol

3.3 Kesamaan Dua Matriks

Perhatikan untuk matriks berikut ini

a. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 4+1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 5 \\ 7 & 3^2 \end{bmatrix}$

Kedua matriks pada contoh a dan b adalah sama. Entry masing-masing matriks juga sama, bukan? Bagaimana dengan ordo kedua matriks? Dari kedua contoh di atas tampak bahwa entry-entry seletak dari kedua matriks yang berordo sama mempunyai nilai yang sama.

Nah bagaimana untuk matriks berikut ini?

$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

serta

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Perhatikan kembali matriks A diatas, maka dari matriks A memiliki ordo 2 x 2

Jika kita perhatikan kembali matriks A diatas, ternyata matriks tersebut merupakan jenis matriks Persegi

C. Transpose Matriks

Kemudian mari kita transpose matriks A diatas, di peroleh sebagai berikut :

Matriks A= $\begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$ A^T = $\begin{bmatrix} 25 & 23 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

Untuk matriks B

Matriks B= $\begin{bmatrix} 24 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$ B^T= $\begin{bmatrix} 24 & 23 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

Perhatikan kembali matriks pada masalah awal diatas.

Berdasarkan bentuk matrik A, B, dan C diatas, maka diperoleh :

$Matrik\ A = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$ (tidaksama) $Matrik\ B = \begin{bmatrix} 24 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

$Matrik\ A = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$ (sama) $Matrik\ C = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

$Matrik\ B = \begin{bmatrix} 24 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$ (tidaksama) $Matrik\ C = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

Jadi matriks A Sama dengan matriks C

Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa dua buah matriks dikatakan sama apabila :

1. Matriks A dan C mempunyai ordo sama
2. Unsur-unsur yang seletak pada matriks A dan matriks C sama

Setelah memahami konsep tentang Matriks dan Kesamaan Matriks, Silahkan pelajari contoh berikut ini

1. Diketahui tiga buah matriks sebagai berikut.
   $K = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, dan $L = \begin{pmatrix} 2a & c-1 \\ 3b & -d+2 \end{pmatrix}$

   Jika $L - P = K$, tentukan nilai dari $a + b + c + d$?

   Alternatif Penyelasian :

   $L = K$

   $\begin{pmatrix} 2a & c+2 \\ 3b & -d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$, dari kesamaan matriks

   Kita cari nilai a

   $2a = 4$

   $2a = 4$

   $a = \frac{4}{2}$

   $a = 2$

   Jadi nilai a adalah 2

   Untuk mencari nilai b

   $3b = 9$

   $3b = 9$

   $b = \frac{9}{3}$

   $b = 3$

   Jadi nilai b adalah 3

   Untuk mencari nilai c

   $c + 2 = -6$

   $c = -6 - 2$

   $c = -8$

   Jadi nilai c adalah -8

   Untuk mencari nilai d

   $-d - 1 = -4$

   $-d = -4 + 1$

   $d = 3$

   Jadi nilai d adalah 3

   Maka nilai $a + b + c + d = 2 + 3 + (-8) + (3) = 0$

2. Tentukan nilai a, b, c, dan d yang memenuhi matriks P^t=Q, dengan
   $P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$
   Alternatif penyelesaian
   Karena P merupakan matriks berordo 2 × 3, maka Pt merupakan matriks berordo 2 × 3. Matriks Q merupakan matriks berordo 2 × 3. Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks P^t = Q
   $P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ maka $P^t = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya kesamaan P^t=Q dapat di tulis :

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan diatas kita temukan nilai a, b, c, dan d sebagai berikut

- $3b = 3$
  $b = \frac{3}{3}$
  $b = 1$
- $2c = 6$
  $c = \frac{6}{2}$
  $c = 3$
- $2a - 4 = -4$
  $a = -4 + 4$
  $a = 0$
- $d + 2a = 3a - c$
  $d + 2(0) = 3(0) - 3$
  $d = -3.$

Jadi, a = 0, b = 1, c = 3, dan d = –3

Definisi 3.2

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$) jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap entry yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Pendahuluan Daftar Isi Keg. Belajar 2

Kegiatan Belajar 2

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Untuk memahami konsep penjumlahan dan pengurangan matriks, pahamilah masalah berikut ini

Untuk mendapatkan jumlah produksi yang maksimal. Ahmad dan hendra diminta untuk memupuk tanaman. Tanaman terdapat pada 2 lokasi yang berbeda dengan jenis pupuk Urea, SP36 dan Kcl dengan berat yang berbeda pula. Karena tanaman semakin besar pada pemupukan ke 2 lebih banyak dari pada pemupukan ke 1, seperti pada tabel berikut.

Pemupukan ke 1 (dalam gram)

	Lokasi A	Lokasi B
Urea	1200	1500
SP36	600	800
KCl	300	400

Pemupukan ke 2 (dalam gram)

	Lokasi A	Lokasi B
Urea	1600	2000
SP36	800	1000
KCl	400	500

Dapatkah kamu membantu Ahmad dan hendra untuk mengetahui berapa jumlah pupuk yang terpakai dalam matriks, dan selisih pemupukan antara pemupukan ke 1 dengan pemupukan ke dua dalam matriks?

Alternative Penyelesaian :

1. Kita memisalkan tabel pemupukan ke 1 sebagai matriks A dan tabel pemupukan ke 2 sebagai matriks B, maka matriks pemupukan ke 1 dan 2 disajikan sebagai berikut (dalam gram).
$$A = \begin{bmatrix} 1200 & 1500 \\ 600 & 800 \\ 300 & 400 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1600 & 2000 \\ 800 & 1000 \\ 400 & 500 \end{bmatrix}$$
2. Maka total pupuk yang diperlukan pada pemupukan 1 dan 2 dengan menggunakan operasi penjumlahan, misal hasilnya adalah matriks C
$$A + B = \begin{bmatrix} 1200 & 1500 \\ 600 & 800 \\ 300 & 400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1600 & 2000 \\ 800 & 1000 \\ 400 & 500 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1200 + 1600 & 1500 + 2000 \\ 600 + 800 & 800 + 1000 \\ 300 + 400 & 400 + 500 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 2800 & 3500 \\ 1400 & 1800 \\ 700 & 900 \end{bmatrix}$$

3. Untuk mengetahui selisih pupuk yang terpakai antara pemupukan 1 dan pemupukan ke 2, dapat dengan mengurangkan matriks B dengan Matriks A, misal hasilnya adalah matriks D

$$B - A = \begin{bmatrix} 1600 & 2000 \\ 800 & 1000 \\ 400 & 500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1200 & 1500 \\ 600 & 800 \\ 300 & 400 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1600 - 1200 & 2000 - 1500 \\ 800 - 600 & 1000 - 800 \\ 400 - 300 & 500 - 400 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 200 \\ 100 & 100 \end{bmatrix}$$

Dari kegiatan diatas dapat kita simpulkan sebagai berikut, misal

Diketahui : $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ dan $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}$, maka :

Untuk penjumlahan :

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{bmatrix}$$

Dan untuk pengurangan

$$A - B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-g & b-h \\ c-i & d-j \\ e-k & f-l \end{bmatrix}$$

Syarat dua matriks bisa dijumlahkan atau dikurangkan jika: memiliki ordo yang sama.

Sifat-sifat penjumlahan matriks adalah

a. A + B = B + A (sifat komutatif)
b. A + (B + C) = (A + B) + C (sifat asosiatif)
c. Terdapat matriks identitas penjumlahan, yaitu matrik nol sehingga berlaku A + 0 = 0 + A = A untuk setiap matriks A.
d. Terdapat invers penjumlahan sehingga berlaku A + (- A) = – A + A = 0, yang dimaksud dengan matriks – A atau matriks lawan dari matriks A adalah matriks yang elemen – elemennya merupakan negatif dari elemen – elemen dari matriks A yang seletak.

sifat – sifat pada operasi pengurangan pada matrik sama dengan operasi pengurangan pada matriks

Definisi 3.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan entry-entry a_{ij} dan b_{ij}. Matriks C adalah jumlah matriks A dan matriks B, ditulis $C = A + B$, apabila matriks C juga berordo $m \times n$ dengan entry-entry ditentukan oleh:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Contoh Soal

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, maka A+B adalah …

   Penyelesaian:

   $$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 0 + (-1) & 1 + 5 \\ 2 + 0 & 3 + (-2) \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, maka A-B adalah …

   Penyelesaian:

   $$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 0 - (-1) & 1 - 5 \\ 2 - 0 & 3 - (-2) \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a + 2 & 1 - 3b \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2a & b - 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,dan $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

   Jika $A + B = C$, tentukan nilai $a + b$.

   Penyelesaian

   $A = \begin{bmatrix} a + 2 & 1 - 3b \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2a & b - 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

   Dengan demikian

   $$A + B = C$$

   $$\begin{bmatrix} a + 2 & 1 - 3b \\ -1 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a & b - 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} 3a + 2 & -2b - 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

   Untuk nilai a

   $3a + 2 = 5$

   $3a = 5 - 2$

   $3a = 3$

   $a = \frac{3}{3}$

   $a = 1$

   Untuk nilai b

   $-2b - 2 = 6$

   $-2b = 6 + 2$

   $-2b = 8$

   $b = \frac{8}{-2}$

   $b = -4$

Maka nilai a = 1 Maka nilai b = -4

Jadi $a + b = 1 + (-4) = -3$

Keg. Belajar 1 Daftar Isi Keg. Belajar 3

Kegiatan Belajar 3

Untuk memulai kegiatan ini silahkan anda perhatikan permasalahan berikut ini:

Bu Dewi seorang pengusaha kue yang menjual dagangannya ke tiga toko. Tabel banyaknya kue yang disetorkan setiap minggunya sebagai berikut:

	Kue Bolu	Kue Karah	Kue Bungong Kaye
Toko A	15	20	10
Toko B	18	22	10
Toko C	15	20	15

Harga sekardus kue bolu, sekardus Kue Karah dan sekardus Kue Bungong Kaye berturut-turut adalah Rp 25.000,00; Rp 20.000,00; dan Rp 30.000,00. Hitunglah pemasukan mingguan dan jumlah kue pada minggu ke 4 dengan penyajian bentuk matriks.

Petunjuk penyelesaian:

Buat pemisalan banyaknya kue yang disetorkan setiap harinya sebagai matriks A, maka:

Banyaknya kue yang disetorkan setiap harinya adalah

$$Matriks\ A = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 18 & 22 & 10 \\ 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}$$

Matriks harga makanan sebagai Matriks B, maka:

$$Matriks\ B = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 40.000 \\ 80.000 \end{bmatrix}$$

Pemasukan harian bu Ani = AB

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 18 & 22 & 10 \\ 15 & 20 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25.000 \\ 20.000 \\ 30.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (15 \times 25.000) + (20 \times 20.000) + (10 \times 30.000) \\ (18 \times 25.000) + (22 \times 20.000) + (10 \times 30.000) \\ (15 \times 25.000) + (20 \times 20.000) + (15 \times 30.000) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 375.000 + 400.000 + 300.000 \\ 450.000 + 440.000 + 300.000 \\ 375.000 + 400.000 + 450.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.075.000 \\ 1.190.000 \\ 1.250.000 \end{bmatrix}$$

Maka pemasukan bu Ani dari setiap Toko A, Toko B, dan Toko C berturut-turut adalah Rp 1.075.000; Rp 1.190.000; dan Rp 1.250.000

Jadi total pemasukan Bu Ani dari seluruh toko adalah

Rp 1.075.000+ Rp 1.190.000+ Rp 1.250.000 = Rp 3.515.000

Perhatikan kembali Matriks A diatas, jika dalam waktu satu bulan. Maka dapat kita kalikan dengan bentuk skalar 4, yaitu :

$Matriks\ A = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 18 & 22 & 10 \\ 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}$ dengan skalar k=4, maka

$$k \times A = \begin{bmatrix} 4 \times 15 & 4 \times 20 & 4 \times 10 \\ 4 \times 18 & 4 \times 22 & 4 \times 10 \\ 4 \times 15 & 4 \times 20 & 4 \times 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 80 & 40 \\ 72 & 88 & 40 \\ 60 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

1. Perkalian antar Matriks

Matriks A yang berordo m×p dangan suatu matriks B yang berordo p×n adalah matriks C yang berordo m× n. A_(m×p). B_(p×n). = C_(m×n).

Dalam perkalian matriks ini yang perlu diperhatikan adalah Banyaknya kolom pada matriks A harus sama dengan banyaknya baris pada matriks B.

Jika hal ini tidak dipenuhi, maka hasil kali matriks tidak didefinisikan.

Secara umum; jika A = ordo matriks 2× 3 dan B = ordo matriks 3 ×2 C, maka

A . B = C ordo matriks 2× 2

$$C=AXB= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \mathrm{X} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + ... + a_{1m} \times b_{m1}$

$c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + ... + a_{1m} \times b_{m2}$

.

.

.

$c_{1k} = a_{11} \times b_{1k} + a_{12} \times b_{2k} + ...+ a_{1m} \times b_{mk}$

$cij = a_{i1} \times {}_{b1j} + a_{i2} \times b_{2j} + ...+ a_{im} \times b_{mj}$

2. Perkalian antara Matriks dengan Skalar

Jika A suatu ordo m n dan k suatu bilangan real (disebut juga sutu skalar), maka kA adalah metriks ordo m n yang unsur-unsurnya diperoleh dengan memperkalikan setiap unsur matriks A dengan k. Perkalian seperti ini disebut perkalian skalar.

Jadi, jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $k = 3$ maka: kA

$3A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 0 & 3 \times 1 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat perkalian matriks dengan bilangan real. Jika a dan b bilangan real, maka :

1) (a + b)A = aA + bA

2) a (A + B) = aA + aB

3) a(bA) = (ab)A

4) 1 × A = A

5) 0 × A = 0

6) (- 1) A = – A

Contoh Soal

1. Diketahui kesamaan matriks

$$2\begin{bmatrix} a & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ c & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & d \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan hasil dari $a + b + c + d$

Penyelesaian

$$2\begin{bmatrix} a & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ c & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & d \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} a & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3.2) + (2.1) & (3.d) + (2.3) \\ (2.c) + (4.1) & (c.d) + (4.3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3d + 6 \\ 2c + 4 & cd + 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 3 \\ -6 & 2 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3d + 6 \\ 2c + 4 & cd + 12 \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan terakhir diperoleh

$2a + 4 = 8 \;=>\; 2a = 8 - 4 \;=>\; 2a = 4 \;=>\; a = \frac{4}{2} \;=>\; a = 2$

$3d + 6 = 3 \;=>\; 3d = 3 - 6 \;=>\; 3d = -3 \;=>\; d = -\frac{3}{3} => d = -1$

$2c + 4 = -6 \;=>\; 2c = -6 - 4 \;=>\; 2c = -10 \;=>\; c = -\frac{10}{2} \;=>\; c = -5$

Terakhir :

$2 + b = cd + 12$

$2 + b = (-5).(-1) + 12$

$2 + b = 5 + 12$

$b = 17 - 2 \;=>\; b = 15$

Jadi nilai dari $a + b + c + d$ adalah $2 + (-1) + (-5) + 15 = 11$

FORUM DISKUSI

Untuk memperkuat pemahaman Anda silahkan diskusikan soal berikut.

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ y & 9 \end{pmatrix}$. Jika $A + B - C = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$, maka nilai $x + 2xy + y$ adalah $\cdots$

Keg. Belajar 3 | Daftar Isi | Rangkuman

Rangkuman

Selamat! Anda telah berhasil menyelesaikan kegiatan belajar tentang matriks dan vektor pada bidang dan ruang. Hal-hal penting yang telah Anda pelajari dalam kegiatan belajar ini dapat dibaca pada rangkuman berikut ini.

1. Matriks adalah kumpulan bilangan , simbol, atau ekspresi, berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom.
2. Dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ordonya sama.
3. Adapun beberapa sifat dasar yang dimiliki operasi penjumlahan pada matriks. Untuk A, B, C, dan 0 (matriks nol) yang merupakan matriks – matriks berordo yang sama, berlaku sifat – sifat berikut :
   a. A + B = B + A (sifat komutatif)
   b. A + (B + C) = (A + B) + C (sifat asosiatif)
   c. Terdapat matriks identitas penjumlahan, yaitu matrik nol sehingga berlaku A + 0 = 0 + A = A untuk setiap matriks A.
   d. Terdapat invers penjumlahan sehingga berlaku A + (- A) = – A +A = 0, yang dimaksud dengan matriks – A atau matriks lawan dari matriks A adalah matriks yang elemen – elemennya merupakan negative dari elemen – elemen dari matriks A yang seletak.

   Sehingga sifat – sifat pada operasi pengurangan pada matrik sama dengan operasi pengurangan pada metriks, yaitu :
   a. A – B = A + (- B)
   b. A – B = C
   c. A + B = C, maka berarti B = C – A dan A = C – B

   Sifat-sifat perkalian matriks dengan bilangan real.
   Jika a dan b bilangan real, maka :
   1) (a + b)A = aA + bA
   2) a (A + B) = aA + aB
   3) a(bA) = (ab)A
   4) 1 × A = A
   5) 0 × A = 0
   6) (- 1) A = – A

   Matriks A yang berordo m×p dangan suatu matriks B yang berordo p×n adalah matriks C yang berordo m× n.
   A_(m×p). B_(p×n). = C_(m×n).
   Sifat-sifat matriks transpose :
   1) $(A+B)^T = (A)^T + (B)^T$
   2) $(A^T)^T = A$
   3) $(AB)^T = (A)^T (B)^T$
   4) $(kA)^T = k.A^T$, dengan k = konstanta

Diskusi
Daftar Isi
Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Perhatikan matriks berikut:
   $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$
   1. Matrik tersebut memiliki ordo 2 x 3
   2. Angka 5 terletak pada element baris ke 2 kolom ke 2
   3. Matriks tersebut adalah matriks jenis persegi
   4. Transpose dari matriks A di atas adalah $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Dari pernyataan diatas, pernyataan yang benar adalah nomor = …
   A. 1 saja
   B. 1 dan 2
   C. 1, 2 dan 3
   D. 2 dan 4
   E. Hanya 4

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$. Nilai A+B adalah …
   A. $\begin{bmatrix} 6 & 18 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 6 & 18 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} -6 & 18 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

3. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -d \\ b & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & b \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 3c & -5c \\ 1-a & 3a-1 \end{bmatrix}$. Nilai $a + b + c + d$ yang memenuhi kesamaan $B - A = C^t$
   A. -8
   B. -3
   C. $\frac{11}{3}$
   D. 9
   E. $\frac{141}{9}$

4. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$, dan $A^t = B$. Nilai $x + 2y = \cdots$
   A. -11
   B. -2
   C. 0
   D. 1
   E. 2

5. Untuk memenuhi kebutuhan nutrisi tanaman hidroponik, maka dilakukan pemupukan secara rutin. Ahmad memiliki 2 tanaman hidroponik di halaman rumahnya. Maka ia memerlukan pupuk sebagai berikut :

	Lokasi A	Lokasi B
Mix A (liter)	6	10
Mix B (liter)	4	8

   Pemupukan dilakukan setiap 3 bulan sekali. Maka jumlah pupuk yang diperlukan selama 1 tahun adalah …
   A. $\begin{bmatrix} 24 & 40 \\ 16 & 32 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 18 & 30 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$
D. $\begin{bmatrix} 24 & 40 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$
E. $\begin{bmatrix} 24 & 40 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}$

6. Pak danu akan membuka 3 toko elektronik pada 3 lokasi berbeda. Ia memerlukan modal untuk biaya persediaan alat elektronik yang akan di jualnya. Berikut adalah tabel kebutuhannya

	Lokasi 1	Lokasi 2	Lokasi 3
Kulkas (unit)	5	6	5
AC (unit)	4	5	6
TV (unit)	6	5	4

Jika harga setiap barang (dalam jutaan) adalah

	Kulkas	AC	TV
Harga (Rupiah)	3	4	2

Maka banyak biaya yang diperlukan oleh pak danu untuk melengkapi tokonya tersebut dalam matriks adalah … (dalam jutaan)

A. $\begin{bmatrix} 49 \\ 44 \\ 46 \end{bmatrix}$
B. $\begin{bmatrix} 48 \\ 44 \\ 46 \end{bmatrix}$
C. $\begin{bmatrix} 49 \\ 46 \\ 46 \end{bmatrix}$
D. $\begin{bmatrix} 48 \\ 46 \\ 46 \end{bmatrix}$
E. $\begin{bmatrix} 49 \\ 44 \\ 48 \end{bmatrix}$

Rangkuman Daftar Isi Kriteri Nilai

Kriteria Penilaian Uji Kompetensi

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Sumatif yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi modul ini.

Tingkat Penguasaan (TP) $= \frac{Banyak\ jawaban\ benar}{banyak\ soal} \times 100\%$

Arti tingkat penguasaan:

- $90\% \leq TP \leq 100\%$: sangat baik
- $80\% \leq TP < 90\%$: baik
- $70\% \leq TP < 80\%$: cukup
- $TP < 70\%$: kurang

Apabila tingkat penguasaan Anda 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan ke modul berikutnya. Apabila tingkat pengusaan Anda kurang dari 75%, Anda harus mempelajari kembali modul ini.

Kunci Jawaban Uji Kompetensi

No Soal	Kunci
1.	D
2.	A
3.	D
4.	C
5.	A
6.	A

Uji Kompetensi Daftar Isi Daftar Pustaka

Daftar Pustaka

____, 2021. https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-matriks-determinan-dan-invers-matriks/

Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan. 2017. Matematika/ Kementrian Pendidikan Kebudayaan- Edisi Revisi untuk SMA Kelas XI. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan. (buku siswa)

Kriteria nilai | Daftar Isi | Daftar Isi