Barisan dan Deret Bilangan

Kelas/Semester :X/Gasal

DISUSUN OLEH : SAYEKTI DWININGRUM

KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

3.5 Menganalisis barisan dan deret aritmetika

- 3.5.1 Mengamati dan mengidentifikasi fakta pada barisan berdasarkan keteraturan pola bilangan.
- 3.5.2 Menganalisis suku berikutnya dari suatu barisan liniear berderajat satu
- 3.5.3 Menganalisis suku berikutnya dari suatu barisan liniear berderajat dua
- 3.5.4 Mengidentifikasi perbedaan barisan dengan deret
- 3.5.5 Menentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika
- 3.5.6 Menganalisis dan mengidentifikasi rumus suku tengah barisan aritmetika ganjil
- 3.5.7 Menganalisis dan mengidentifikasi suku ke-n dari barisan aritmetika.
- 3.5.8 Menganalisis dan mengidentifikasi jumlah n suku pertama deret aritmetika

4.5 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmatika

- 4.5.1 Mengamati dan mengidentifikasi fakta sisipan antara dua suku berurutan pada barisan aritmetika.
- 4.5.2 Menentukan banyaknya suku pada barisan aritmetika setelah disisipkan
- 4.5.3 Menentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika setelah disisipkan.
- 4.5.4 Menganalisis dan menentukan rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertamanya setelah disisipkan.
- 4.5.5 Mengidentifikasi fakta masalah kontekstual yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmatika.
- 4.5.6 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmatika.

BARISAN DAN DERET BILANGAN

- Pola Bilangan
  - Barisan linier berderajat satu
  - Barisan linier berderajat satu
- Barisan Bilangan — Deret Bilangan
  - Barisan Aritmatika — Deret Aritmatika
  - Barisan Geometri — Deret Geometri

PERTEMUAN KE-1

Tujuan Pembelajaran :

1. Melalui kegiatan pengamatan dan menggali informasi peserta didik dapat mengidentifikasi fakta pada barisan berdasarkan keteraturan pola bilangan dengan cermat.
2. Melalui kegiatan diskusi,tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik mahir dalam menganalisis suku berikutnya dari suatu barisan liniear berderajat satu dengan tepat.
3. Melalui kegiatan diskusi,tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik mahir dalam menganalisis suku berikutnya dari suatu barisan liniear berderajat dua dengan tepat.

Pola Bilangan

1. Pola Bilangan

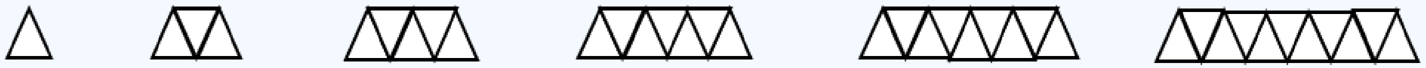
Pola bilangan adalah urutan bilangan-bilangan tertentu yang membentuk suatu barisan bilangan. Berikut ini adalah jenis-jenis pola bilangan :

a. Pola Bilangan Ganjil

Barisan 1, 3, 5, 7, 9, … disebut pola bilangan ganjil.

Rumus suku ke-n adalah $U_n = 2n - 1$; dengan n bilangan asli

Contoh gambar polanya :



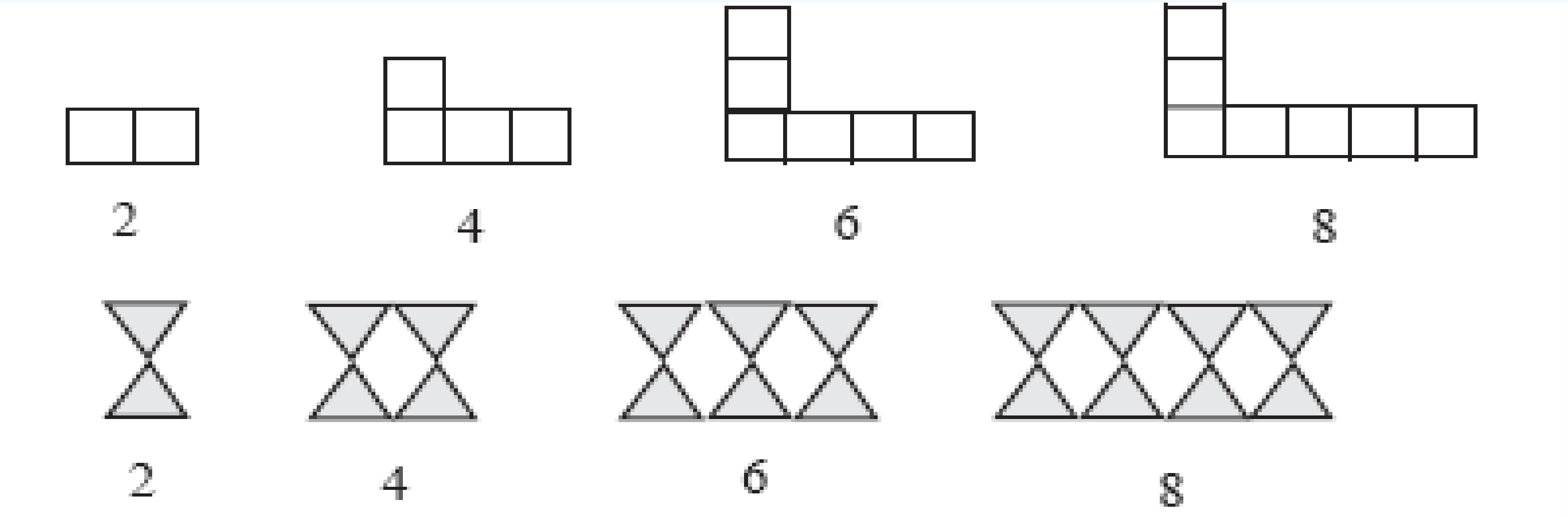
1 3 5 7 9 11

b. Pola Bilangan Genap

Barisan 2, 4, 6, 8, ... disebut pola bilangan genap.

Rumus suku ke-n adalah $U_n = 2n$; dengan n bilangan asli

Gambar pola:

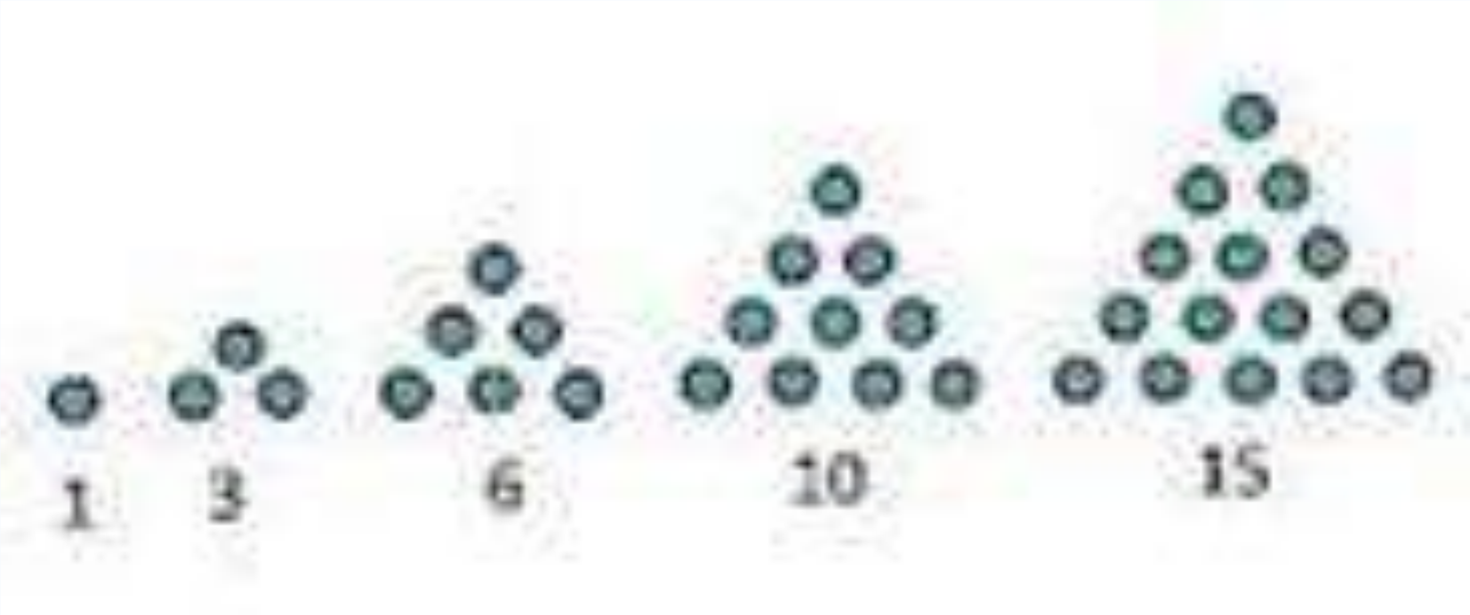


c. Pola Bilangan Segitiga

Barisan 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut pola bilangan segitiga.

Rumus suku ke-n adalah $U_n = \frac{1}{2}n(n+1)$; dengan n bilangan asli

Gambar pola:

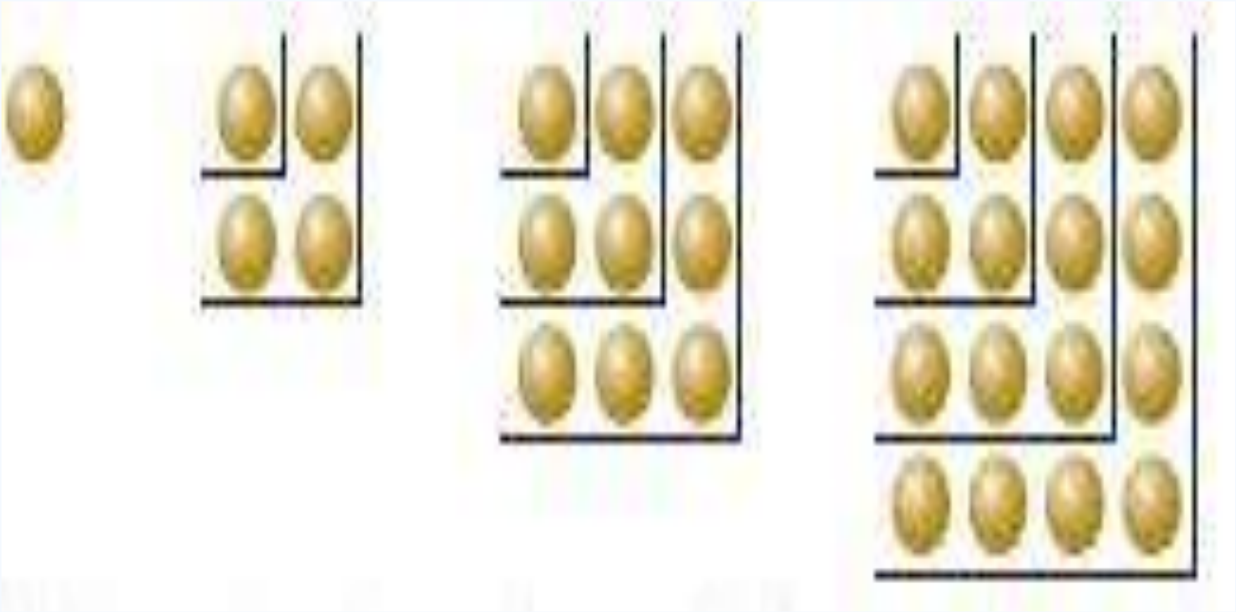


d. Pola Bilangan Persegi

Barisan 1, 4, 9, 16, ... disebut pola bilangan persegi.

Rumus suku ke-n adalah $U_n = n^2$; dengan n bilangan asli

Gambar pola:

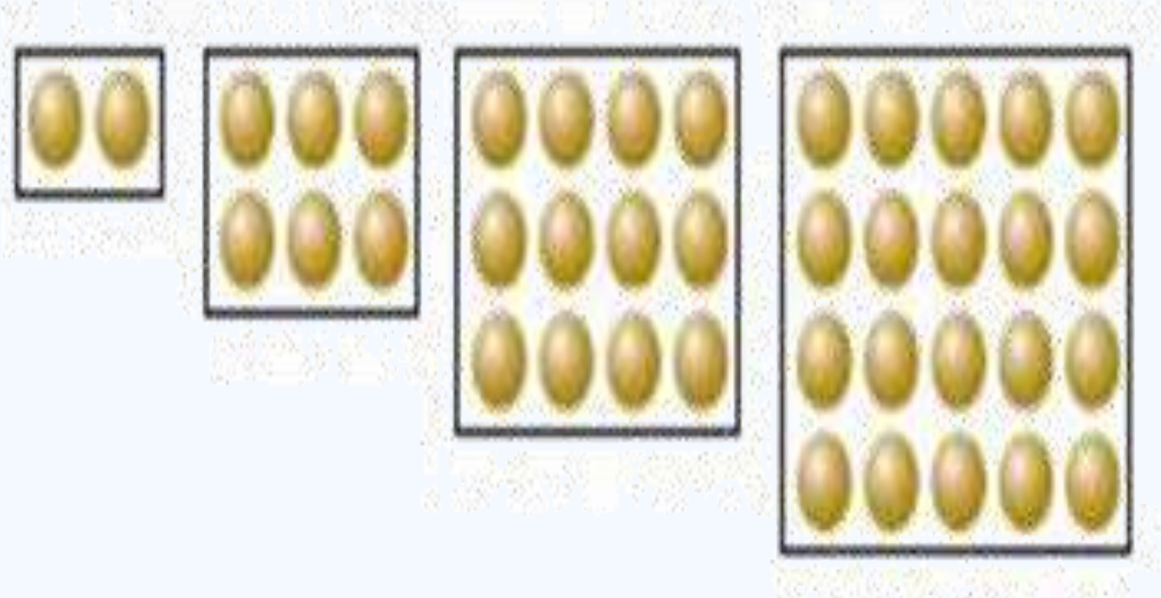


e. Pola Bilangan Persegi Panjang

Barisan 2, 6, 12, 20, ... disebut pola bilangan persegi panjang.

Rumus suku ke-n adalah $\boxed{U_n = n\,(n + 1)}$; dengan n bilangan asli

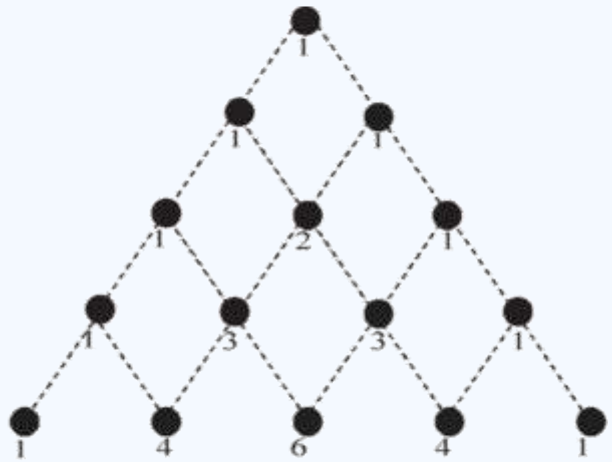
Gambar pola:



f. Pola Bilangan Segitiga Pascal

1. Mengenal Segitiga Pascal

Untuk mengetahui bagaimana susunan bilangan-bilangan pada segitiga pascal, maka perlu terlebih dahulu kita memperhatikan papan permainan berikut.



Susunan bilangan-bilangan seperti pada gambar disebut segitiga pascal. Kata segitiga diberikan mengingat susunan bilangan-bilangan itu membentuk sebuah segitiga. Sedangkan kata pascal diberikan untuk mengenang Blaise Pascal (1623 - 1662), seorang ahli matematika bangsa Perancis yang menemukan susunan bilangan-bilangan tersebut. Jika di perhatikan, ternyata terdapat hubungan antara suatu bilangan dengan jumlah bilangan berdekatan yang terdapat pada baris yang ada tepat di atasnya.

2. Jumlah Bilangan pada Setiap Baris pada Segitga Pascal

Penjumlahan bilangan-bilangan pada setiap baris dalam segitiga pascal, akan diperoleh hasil yang menunjukkan barisan bilangan. Perhatikan penjumlahan bilangan-bilangan pada setiap baris pada segitiga pascal berikut.

Bilangan Segitiga Pascal											jumlah	
					1						$\Rightarrow 1$	$\Leftrightarrow 1 = 2^0$
				1		1					$\Rightarrow 1+1=2$	$\Leftrightarrow 2 = 2^1$
			1		2		1				$\Rightarrow 1+2+1=4$	$\Leftrightarrow 4 = 2^2$
		1		3		3		1			$\Rightarrow 1+3+3+1=8$	$\Leftrightarrow 8 = 2^3$
	1		4		6		4		1		$\Rightarrow 1+4+6+4+1=16$	$\Leftrightarrow 16 = 2^4$
1		5		10		10		5		1	$\Rightarrow 1+5+10+10+5+1=32$	$\Leftrightarrow 32 = 2^5$

Dari jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris dari bilangan segitiga pascal di atas, maka dapat dinyatakan bahwa:

Dalam pola bilangan segitiga pascal, jumlah bilangan pada baris ke-*n* adalah 2^{n-1}

Contoh :

Berapakah jumlah bilangan pada segitiga pascal pada baris ke-10.

Penyelesaian :

Diketahui n = 10

Jumlah bilangan pada baris ke-10 $= 2^{n-1}$

$= 2^{10-1}$

$= 2^{9}$

$= 512$

Jadi, jumlah bilangan segitiga pascal pada baris ke-10 adalah 512.

3. Penerapan Bilangan Segitiga Pascal pada Binomial Newton

Segitiga Pascal dapat digunakan untuk menentukan koefisien pada suku banyak $(x + y)^n$ dengan n bilangan asli.

Misalnya,

- $(x + y)^1 \quad = 1x + 1y = x + y$
- $(x + y)^2 \quad = 1x^2 + 2xy + 1y^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 \quad = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

  $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 \quad = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

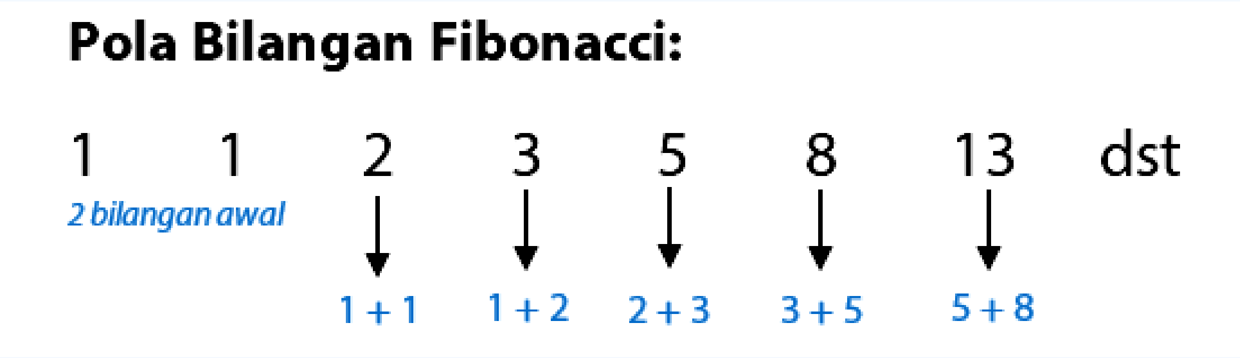
  $= x^4 + 4x^3y^2 + 4xy^3 + y^4$

Bilangan Segitiga Pascal

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

g. Pola Bilangan Fibonacci

Angka Fibonacci merupakan urutan angka yang disusun oleh Leonardo da Pisa pada tahun 1175 – 1245 M. Bilangan Fibonacci adalah urutan angka yang diperoleh dari penjumlahan dua angka didepannya.



$U_1 = 1 \quad = 1$

$U_2 = 1 \quad = 1$

$U_3 = 2 \quad = 1 + 1 \quad = U_1 + U_2$

$U_4 = 3 \quad = 1 + 2 \quad = U_2 + U_3$

$U_5 = 5 \quad = 2 + 3 \quad = U_3 + U_4$ dst

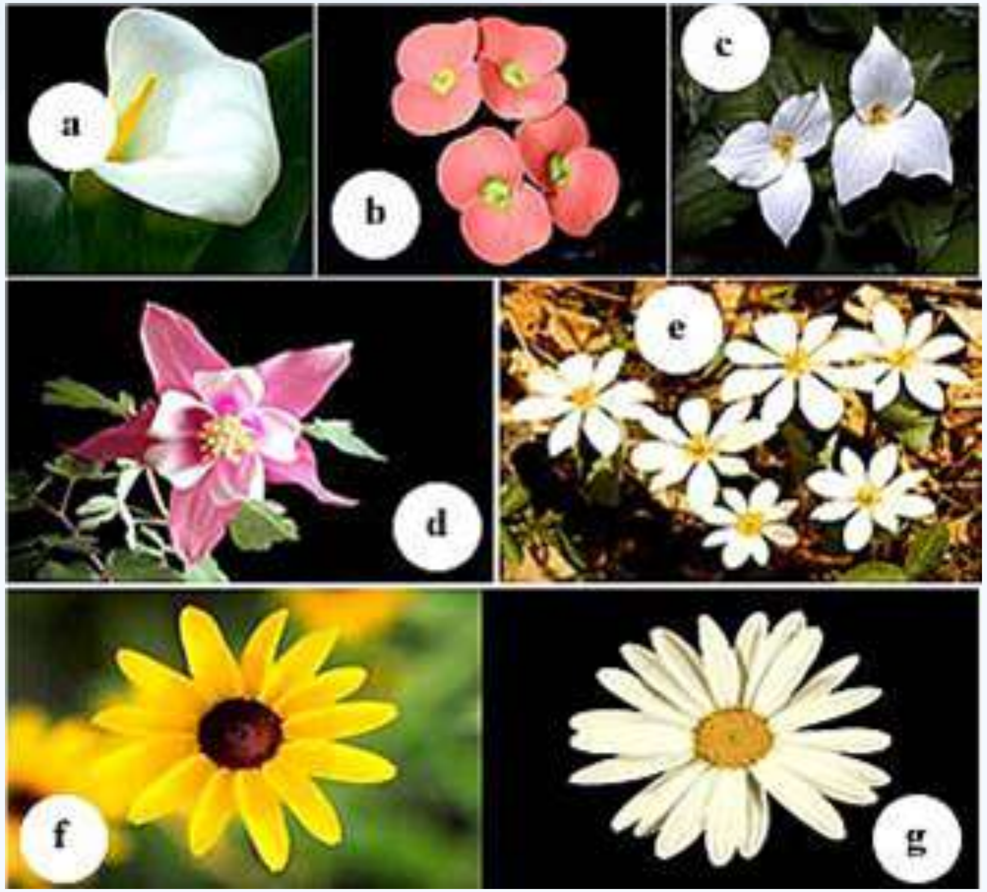
Beberapa fenomena yang menggunakan prinsip Fibonacci antara lain :

1. Barisan bilangan Fibonacci pada Mahkota Bunga (*petals*)

   Mahkota bunga (petals) atau yang sering dikenal sebagai daun bunga membuat suatu bunga terlihat cantik dan menarik. Banyaknya mahkota bunga dari bunga yang berbeda juga berbeda-beda. Banyak mahkota bunga merupakan bilangan yang ada dalam barisan bilangan Fibonacci.

   Contoh : jumlah mahkota bunga aster memiliki 34, 55, atau 89 helai mahkota. Ini adalah angka Fibonacci ke 8, 9, dan 10. Dalam contoh lain, mengapa daun semanggi berjumlah 4 sangat langka? Karena angka 4 bukan merupakan angka Fibonacci.

Contoh bunga lainnya :



(a) bunga Lili putih dengan banyak mahkota bunga 1

(b) bunga Euphorbia dengan banyak mahkota bunga 2

(c) bunga Trilium dengan banyak mahkota bunga 3

(d) bunga Columbine dengan banyak mahkota bunga 5

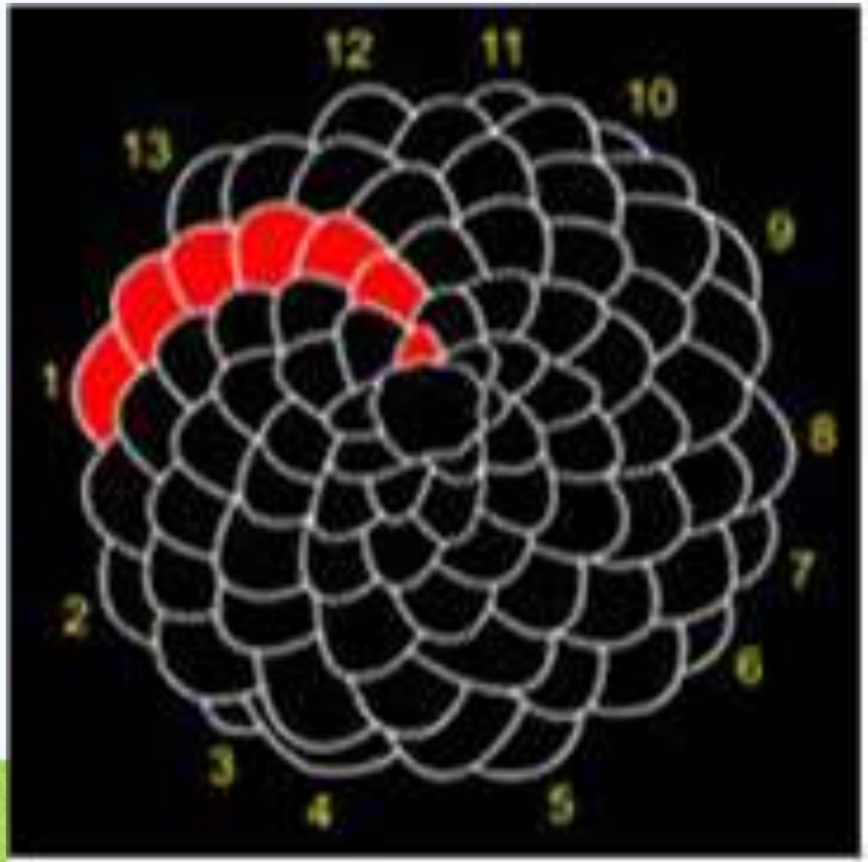
(e) bunga Bloodroot dengan banyak mahkota bunga 8

(f) bunga Blak-eye Susan dengan banyak mahkota bunga 13

(g) bunga Shasta daisy dengan banyak mahkota bunga 21.

2. Barisan Fibonacci pada pola bunga

- Bunga matahari memiliki biji yang tersusun secara spiral. Penghitungan searah jarum jam terdapat 34 spiral dan 21 spiral pada penghitungan yang berlawanan arah dengan jarum jam.
- Bilangan Fibonacci pada pola bunga pinus dapat dihitung pada spiralnya



2. Barisan Sebagai Fungsi

a. Barisan linier berderajat satu

Jika selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat maka barisan disebut berderajat satu (linier).

(i) $\boxed{a+b}$, $2a+b$, $3a+b$, $4a+b, \ldots$

(ii) $\boxed{a}$ $\quad a \quad a$

Bentuk umum suku ke – n nya adalah Un=an+b

Contoh :

4, 7, 10, 13

+3 +3 +3 ← Satu tingkat

b. Barisan berderajat dua

Jika selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat maka barisan disebut berderajat dua.

(i) $\boxed{a + b + c}$, $4a + 2b + c$, $9a + 3b + c$, $16a + 4b + c, \ldots$

(ii) $\boxed{3a + b}$ $5a + b$ $7a + b$

(iii) $\boxed{2a}$ $2a$

Bentuk umum suku ke – n nya adalah Un=an+b

Contoh : 8, 11, 16, 23, 32, ...

+3 +5 +7 +9

+2 +2 +2

dua tingkat

TERIMA KASIH

PERTEMUAN KE-2

Tujuan Pembelajaran :

1. Melalui kegiatan mengumpulkan informasi peserta didik dapat mengidentifikasi perbedaan barisan dan deret dengan tepat dan percaya diri.
2. Melalui kegiatan mengumpulkan informasi dan latihan mandiri peserta didik mahir dalam menentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika dengan tepat.
3. Melalui kegiatan mengamati, mengumpulkan informasi, dan latihan mandiri peserta didik dapat menganalisis dan mengidentifikasi rumus suku tengah barisan aritmetika ganjil dengan cermat dan tepat.
4. Melalui kegiatan diskusi, tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik dapat menganalisis dan mengidentifikasi suku ke-n dari barisan aritmetika dengan cermat dan tepat.
5. Melalui kegiatan diskusi, tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik mahir dalam menganalisis dan mengidentifikasi n jumlah n suku pertama deret aritmetika dengan cermat dan tepat.

BARISAN DAN DERET ARITMATIKA

1. Barisan Bilangan

Barisan bilangan adalah bilangan-bilangan yang diurutkan dengan pola (aturan) tertentu.

Misalnya :

a. 40, 44, 48, 52, ...

b. 1, 3, 5, 7, 9, ...

c. 2, 4, 6, 8, 10, ...

Bilangan-bilangan yang membentuk suatu barisan bilangan disebut *suku* barisan tersebut. Misalnya, pada barisan bilangan ganjil 1, 3, 5, 7, ... suku ke-1 dari barisan tersebut adalah 1, suku ke-2 adalah 3, suku ke-3 adalah 5, dan seterusnya.

Jadi, suatu barisan bilangan dapat dikatakan sebagai suatu barisan yang dibentuk oleh suku-suku bilangan.

Suatu barisan bilangan dapat pula dibentuk dari bilangan-bilangan yang tidak mempunyai pola (aturan) tertentu, misalnya barisan bilangan 1, 2, 5, 7, 3, 4, ... Barisan bilangan seperti ini disebut *barisan bilangan sebarang*.

2. Deret Bilangan

Amati kembali barisan-barisan bilangan berikut.

a. 40, 44, 48, 52, ...

b. 1, 3, 5, 7, ...

c. 2, 4, 6, 8, ...

Berdasarkan pola ketiga barisan tersebut, dapat diperoleh penjumlahan berikut.

a. 40 + 44 + 48 + 52 + ...

b. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...

c. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ...

Penjumlahan suku-suku dari barisan-barisan tersebut dinamakan *deret*. Oleh karena itu, jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n adalah suatu barisan bilangan maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ dinamakan deret.

3. Barisan Aritmatika

Amati barisan bilangan berikut.

a. 1, 3, 5, 7, 9, ..., *Un*

Selisih dua suku berurutan pada barisan (a) selalu tetap, yaitu 2.

b. 99, 96, 93, 90, ..., *Un*

Selisih dua suku berurutan pada barisan (b) selalu tetap, yaitu 3.

Barisan bilangan yang demikian dinamakan *barisan aritmetika*

c. 1, 2, 5, 7, 12, ..., *Un*,

Selisih dua suku berurutan pada barisan (c) tidak tetap.

Barisan bilangan (c) bukan merupakan barisan aritmetika.

Pada barisan aritmetika, selisih dua suku berurutan dinamakan *beda* dan dilambangkan dengan b.

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, U_n + 1$ dinamakan barisan aritmetika jika untuk setiap n bilangan asli memenuhi

$$(U_n + 1) - U_n = U_n - (U_n - 1) = \ldots = U_2 - U_1 = b$$

Jika suku pertama barisan aritmetika adalah a dengan beda b maka barisan aritmetika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ menjadi

$$a,\ a + b,\ a + 2b,\ \ldots,\ a + (n - 1)\ b$$

$a = U_1$

$a + b = U_2$

$a + 2b = U_3$

$\vdots$

$a + (n - 1)b = U_n$

Dengan demikian, suku ke-n barisan aritmetika dirumuskan $\boxed{Un = a + (n - 1)\ b}$

Jika S_n diketahui maka $U_n = S_n - S_{n-1}$

4. Suku Tengah Barisan Aritmatika

jika Barisan Aritmatika mempunyai banyak suku (n) ganjil, dengan suku pertama a dan suku terakhir Un maka suku tengah U_t dari barisan tersebut adalah

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n), \text{ dengan } t = \frac{1}{2}(n+1)$$

Contoh :

Diketahui barisan aritmatika 3, 7, 11, ..., 99. Carilah

a. Suku tengah barisan itu

b. Suku ke berapakah suku tengah tersebut

Pembahasan :

a. Diketahui $a = 3$

$b = 7 - 3 = 4$

$U_n = 99$

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 99)$$

$$= \frac{1}{2}(102)$$

$$= 51$$

Jadi suku tengahnya adalah 51.

b. Selanjutnya akan dicari $U_t = 51$ itu terletak di suku ke berapa. Karena belum tahu banyaknya suku, maka harus dicari terlebih dahulu dengan menggunakan rumus suku ke – n. Diketahui bahwa suku terakhirnya 99, sehingga bisa dicari 99 itu berada di suku ke berapa.

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$99 = 3 + (n-1)4$$
$$99 = 3 + 4n - 4$$
$$99 = 4n - 1$$
$$n = 25$$

Jadi banyaknya suku ada 25 suku.

Sekarang akan dicari $U_t = 51$ itu terletak di suku ke berapa

$$t = \frac{1}{2}(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(25+1)$$

$$= 13$$

Kesimpulannya suku tengah adalah 51 dan terletak pada suku ke 13.

5. Deret Aritmatika

Perhatikan pola penjumlahan barisan berikut.

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + U_n$

Deret ini dinamakan *deret aritmetika naik* karena nilai U_n semakin besar.

$99 + 96 + 93 + 90 + \ldots + U_n$

Deret ini dinamakan *deret aritmetika turun* karena nilai Un semakin kecil.

jumlah *n* suku pertama deret aritmatika dilambangkan dengan *Sn.*

$$S_n = \frac{1}{2} n(U_1 + U_n)$$

atau

$$S_n = \frac{1}{2} n(2a + (n-1)b)$$

Contoh soal :

Diketahui deret aritmatika dengan suku ke-3 adalah 24 dan suku ke-6 adalah 36. Jumlah 15 suku pertama deret tersebut adalah ...

Pembahasan :

Diketahui : $U_3 = 24$

$U_6 = 36$

Ditanya: S_{15}

Sebelum kita mencari nilai dari S_{15}, kita akan mencari nilai a dan b terlebih dahulu dengan cara eliminasi dan subtitusi dari persamaan U_3 dan U_6.

Ingat bahwa $Un = a + (n-1)b$ sehingga

$U_3 = 24 \rightarrow a + 2b = 24 \cdots (i)$

$U_6 = 36 \rightarrow a + 5b = 36 \cdots (ii)$

Eliminasi persamaan (i) dan (ii)

$$\begin{array}{ll} (ii) & a + 5b = 36 \\ (i) & a + 2b = 24 \\ \hline & 3b = 12 \end{array} \quad +$$

$$b = 4$$

Lalu, substitusikan nilai b = 4 ke salah satu persamaan, misalkan persamaan (i)

$$a + 2b = 24$$

$$a + 2.4 = 24$$

$$a + 8 = 24$$

$$a = 16$$

Setelah mendapatkan nilai a dan b, baru kita bisa mencari nilai dari S_{15}

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

$$S_{15} = \frac{1}{2}.15.(2.16 + (15-1).4)$$

$$= \frac{15}{2}(32 + 14.4)$$

$$= \frac{15}{2}(32 + 56)$$

$$= \frac{15}{2}(88)$$

$$= 660$$

TERIMA KASIH

PERTEMUAN KE-3

Tujuan Pembelajaran :

1. Melalui kegiatan pengamatan dan menggali informasi peserta didik dapat mengidentifikasi fakta sisipan antara dua suku berurutan pada barisan aritmetika dengan tepat.
2. Melalui kegiatan diskusi, tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik dapat menentukan banyaknya suku pada barisan aritmetika setelah disisipkan dengan benar.
3. Melalui kegiatan diskusi, tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik dapat menentukan suku pertama dan beda barisan aritmetika setelah disisipkan dengan tepat.
4. Melalui kegiatan diskusi, tanya jawab, dan latihan mandiri peserta didik dapat menganalisis dan menentukan rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertamanya setelah disisipkan dengan cermat, teliti dan tepat.

SISIPAN BARISAN ARITMATIKA

Jika antara dua suku Barisan Aritmatika disisipkan k buah suku sehingga membentuk barisan Aritmatika baru maka beda barisan Aritmatika setelah disisipkan k buah suku akan berubah.

$$U_1, \underbrace{\ldots, \ldots, \ldots, \ldots,}_{\text{k bilangan}} U_2$$

Beda dari Barisan Aritmatika setelah disisipkan k buah suku adalah

$$b' = \frac{b}{k+1}$$

Banyak suku dari Barisan Aritmatika yang disisipkan k buah suku juga akan berubah.

$$n' = n + (n-1)k$$

Contoh :

Diberikan barisan aritmatika 2, 18, 34, ... Diantara dua suku yang berurutan disisipkan 3 bilangan sehingga terbentuk barisan aritmatika baru. Tentukanlah

a. Suku ke – 21 barisan aritmatika baru

b. Jumlah 30 suku pertama dari barisan aritmatika baru

Pembahasan :

Diketahui : $a = a' = 2$, $b = 18 - 2 = 16$, $k = 3$

a. Untuk mencari suku ke – 21 barisan aritmatika baru, terlebih dahulu dicari beda barisan aritmatika baru yaitu

$$b' = \frac{b}{k+1}$$

$$= \frac{12}{3+1}$$

$$= 3$$

Selanjutnya,

$$U'_n = a + (n'-1)b'$$

$$U'_{21} = 2 + (21-1)4$$

$$= 2 + 80$$

$$= 82$$

Jadi, suku ke – 21 barisan aritmatika baru adalah 82.

b. Jumlah 30 suku pertama dari barisan aritmatika baru adalah

$$S'_n = \frac{1}{2}n'(2a + (n'-1)b')$$

$$S'_{30} = \frac{1}{2}30(2.2 + (30-1)4)$$

$$= 15(4 + 116)$$

$$= 1800$$

Jadi jumlah 30 suku pertama dari barisan aritmatika baru adalah 1800

TERIMA KASIH