



# MATRIKS DALAM TRANSFORMASI GEOMETRI

Disusun oleh : Fifi Afiati, S.Pd

Mahasiswa PPG MATEMATIKA

tahap 1 tahun 2020

UNIVERSITAS WIDYA DHARMA KLATEN

## Tujuan Pembelajaran

Melalui pembelajaran kooperatif (*cooperative learning*) berbasis TPACK, diharapkan siswa mampu menerapkan matriks ordo  $2 \times 2$  dalam komposisi transformasi.

Perhatikan gambar berikut ini...



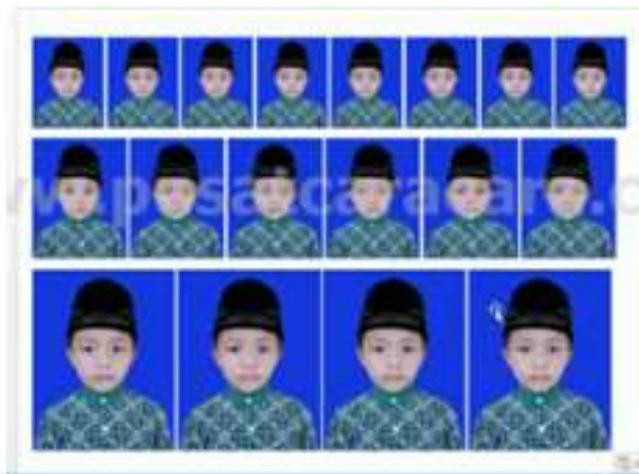
1. Orang naik eskalator



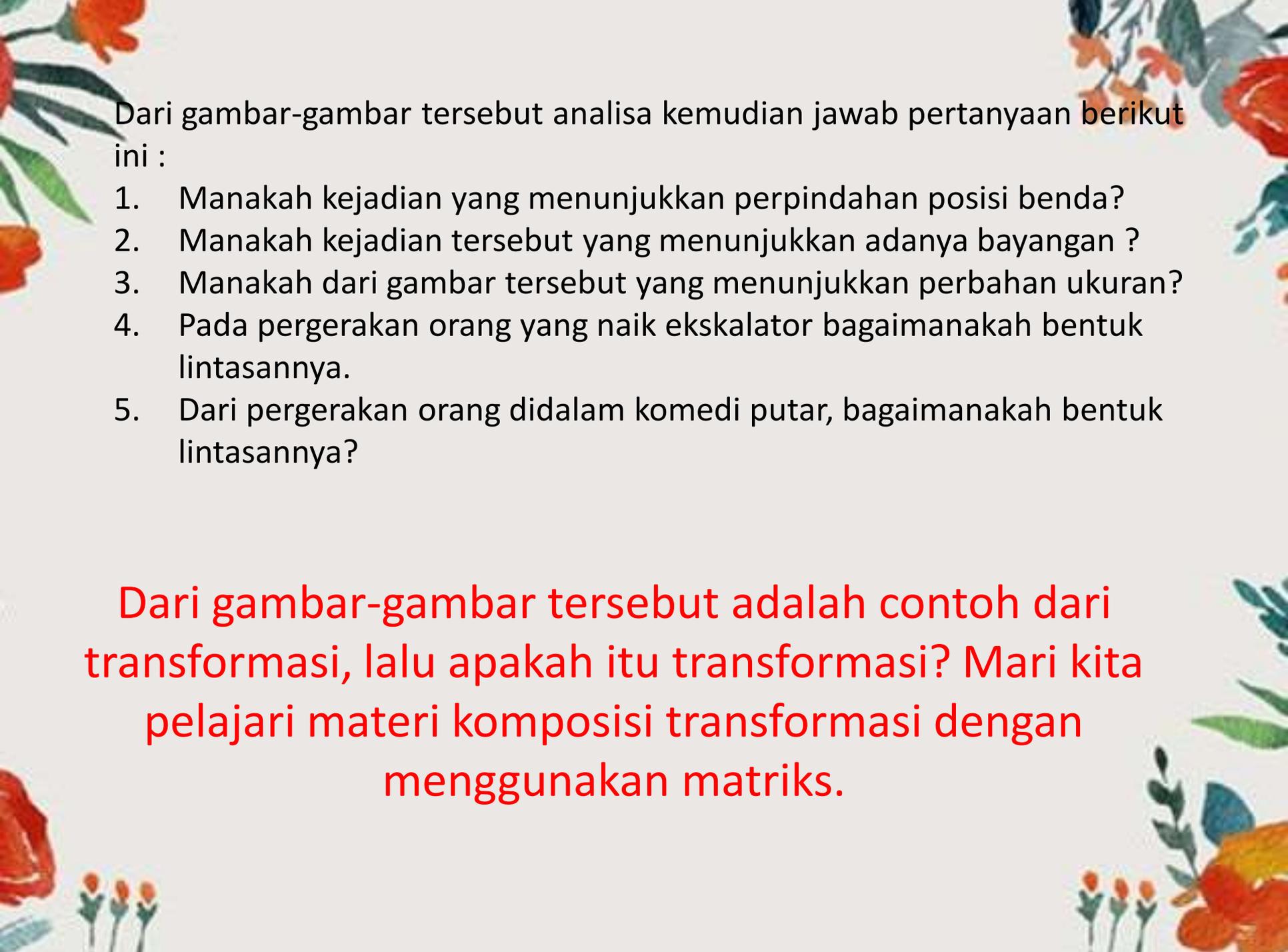
2. orang yang bercermin



3. orang yang naik komedi



4. foto cetak diperbesar atau diperkecil



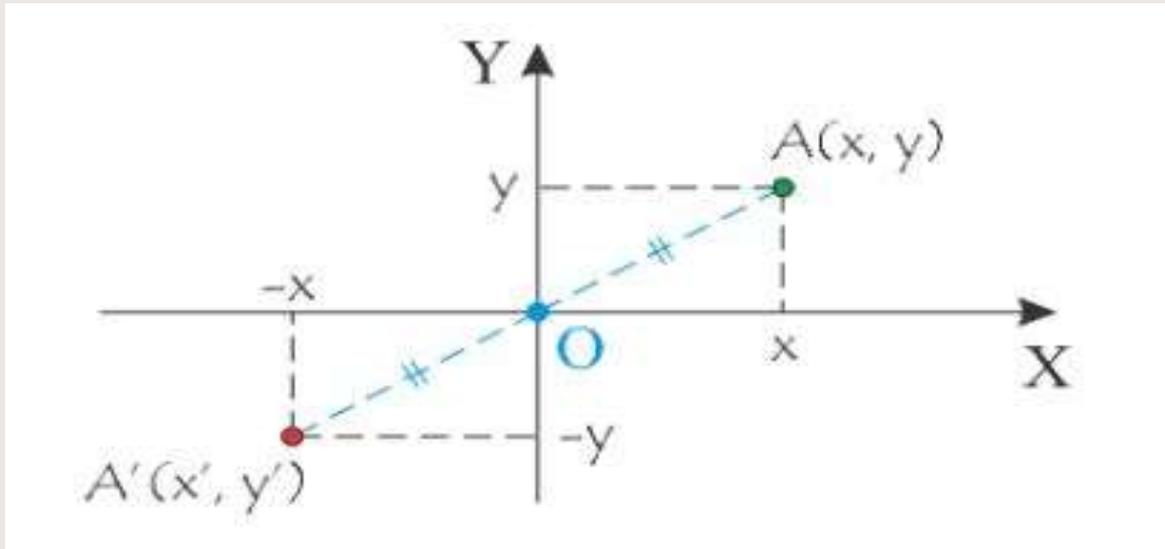
Dari gambar-gambar tersebut analisa kemudian jawab pertanyaan berikut ini :

1. Manakah kejadian yang menunjukkan perpindahan posisi benda?
2. Manakah kejadian tersebut yang menunjukkan adanya bayangan ?
3. Manakah dari gambar tersebut yang menunjukkan perubahan ukuran?
4. Pada pergerakan orang yang naik eskalator bagaimanakah bentuk lintasannya.
5. Dari pergerakan orang didalam komedi putar, bagaimanakah bentuk lintasannya?

Dari gambar-gambar tersebut adalah contoh dari transformasi, lalu apakah itu transformasi? Mari kita pelajari materi komposisi transformasi dengan menggunakan matriks.

# Konsep transformasi dengan matriks

Perhatikan gambar berikut ini!



Misalkan peta titik  $A(x, y)$  oleh transformasi  $T$  adalah Matriks  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

kita sebut dengan matriks yang bersesuaian dengan transformasi  $T$  jika memenuhi persamaan matriks berikut :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Macam-macam transformasi

- Translasi (pergeseran)
- Refleksi (pencerminan)
- Rotasi (perputaran)
- Dilatasi (perkalian)



Klik salah satu kolom yang ingin kamu pelajari

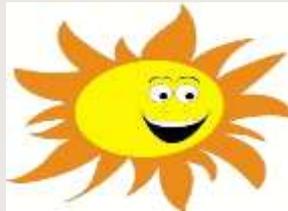
translasi

rotasi

refleksi

dilatasi

klik



To back this slide





# 1. Matriks translasi

Jika terdapat titik A  $(x,y)$  di translasi sejauh  $T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Maka titik pergeseran dari A adalah sebagai berikut :

$$A(x, y) \xrightarrow{T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} A' \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \rightarrow A' = (x + a, y + b)$$





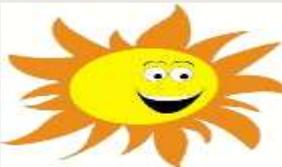
# Contoh translasi

Jika terdapat titik A (5,-6) di translasi sejauh  $T \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Maka titik pergeseran dari A adalah sebagai berikut :

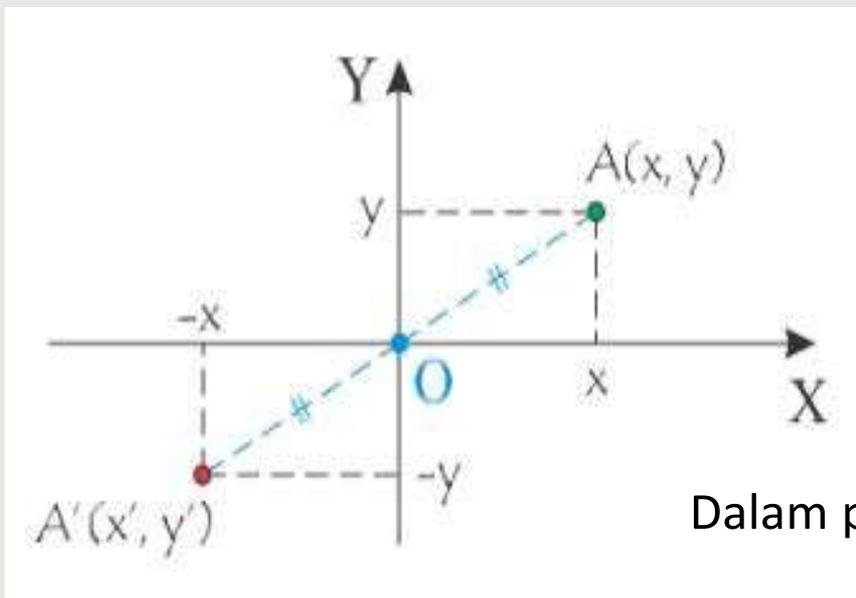
$$A(5,-6) \xrightarrow{T \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}} A' \left( \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow A' = (5 + -2, -6 + 1)$$

$$A' = (3, -5)$$



## 2. Matriks refleksi

- Misalkan peta titik  $A(x, y)$  oleh pencerminan terhadap pusat  $O$  adalah  $A'(x', y')$ . Perhatikan gambar berikut :



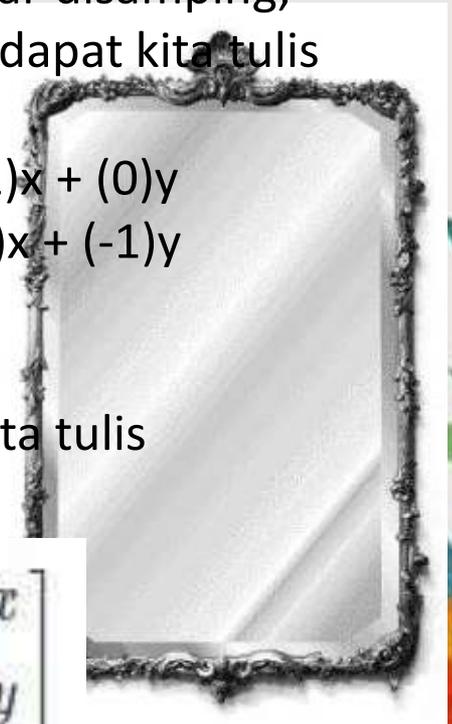
Berdasarkan gambar disamping, koordinat  $A'(x', y')$  dapat kita tulis dalam persamaan

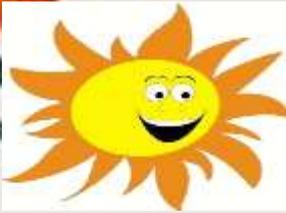
$$x' = -x \Leftrightarrow x' = (-1)x + (0)y$$

$$y' = -y \Leftrightarrow y' = (0)x + (-1)y$$

Dalam persamaan matriks kita tulis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$





# Matriks refleksi lainnya

1. Pencerminan terhadap titik  $(0,0) \Rightarrow$

$$M_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Pencerminan terhadap sumbu  $x \Rightarrow$

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Pencerminan terhadap sumbu  $y \Rightarrow$

$$M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Pencerminan terhadap garis  $y=x \Rightarrow$

$$M_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

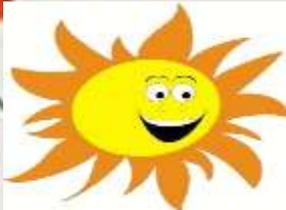
5. Pencerminan terhadap garis  $y=-x \Rightarrow$

$$M_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



# BAHAN DISKUSI

Dari hasil belajar kalian mengenai refleksi, temukan matriks yang sesuai untuk refleksi terhadap garis  $x = h$  dan garis  $y = k$ . Lakukan diskusi bersama kelompok kalian dan share hasil diskusi kedalam google classroom



## Contoh soal refleksi

Peta titik A(2, 3) oleh pencerminan terhadap garis  $y = x$  adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, peta titik A adalah A'(3, 2)



# Contoh soal refleksi

Bayangan garis  $2x + y - 3 = 0$  jika dicerminkan terhadap pusat O adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas kita peroleh

$$x' = -x \rightarrow x = -x'$$

$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

Substitusi  $x = -x'$  dan  $y = -y'$  ke garis

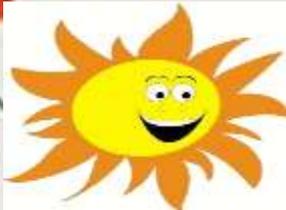
$$2x + y - 3 = 0$$

$$2(-x') + (-y') - 3 = 0$$

$$-2x' - y' - 3 = 0$$

$$2x' + y' + 3 = 0$$

Jadi, bayangannya adalah  $2x + y + 3 = 0$



# Matriks rotasi

Misalkan peta titik  $A(x, y)$  oleh rotasi dengan pusat  $O$  sejauh  $\theta$  adalah  $A'(x', y')$ . matriks yang bersesuaian dengan rotasi terhadap pusat  $O$  sebesar  $\theta$  adalah :

$$M_{|O, \theta|} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Sehingga bayangannya

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

• Contoh soal :

Titik  $A(-4, 3)$  dipetakan oleh rotasi dengan pusat  $O$  sejauh  $90^\circ$  searah jarum jam. Peta titik  $A$  adalah ...

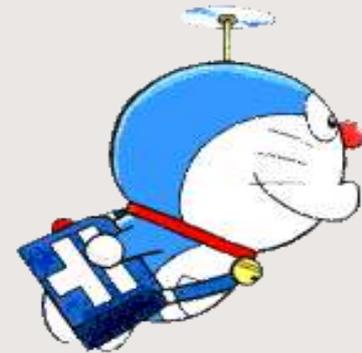
Penyelesaian :

Searah jarum jam berarti  $\theta = -90^\circ$

Ingat :

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$



NEXT



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi, peta titik A adalah A'(3, 4)



contoh soal rotasi

Bayangan garis  $y = 2x + 1$  oleh rotasi dengan pusat O sebesar  $180^\circ$  adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks disamping diperoleh

$$x' = -x \rightarrow x = -x'$$

$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

Substitusi  $x = -x'$  dan  $y = -y'$  ke garis  $y = 2x + 1$

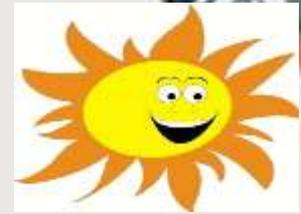
$$-y' = 2(-x') + 1$$

$$-y' = -2x' + 1$$

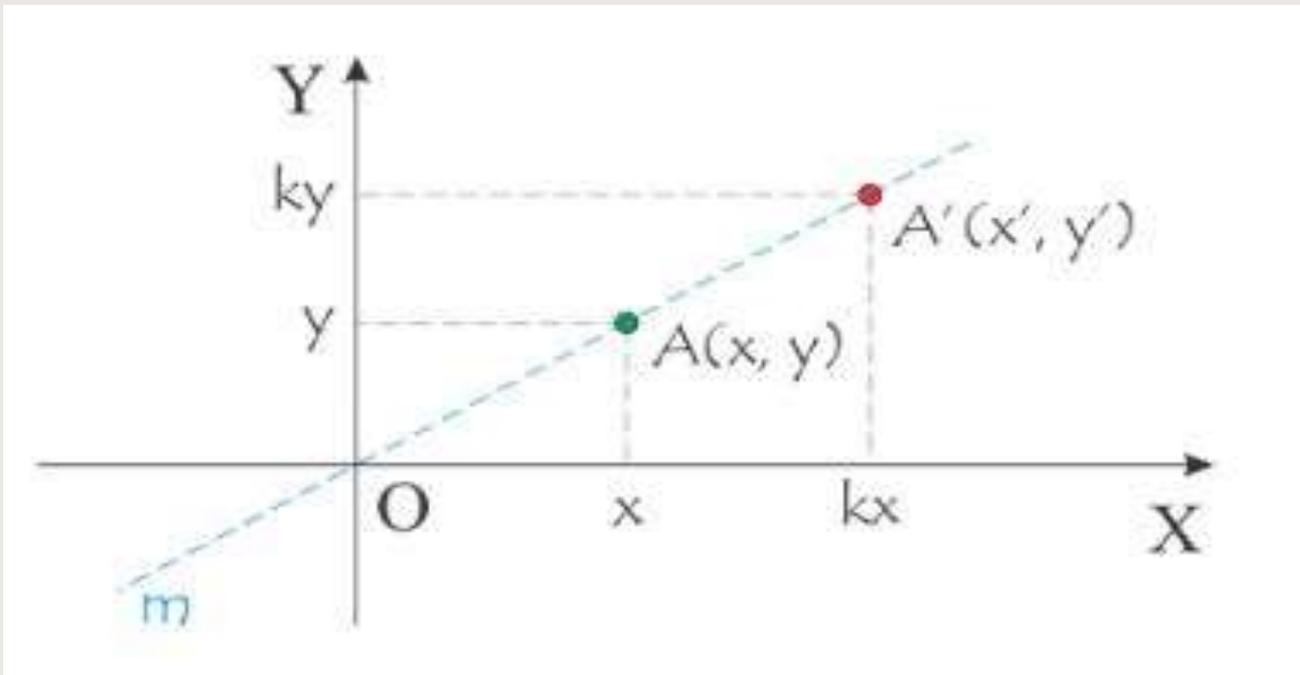
$$y' = 2x' - 1$$

Jadi, bayangannya adalah  $y = 2x - 1$

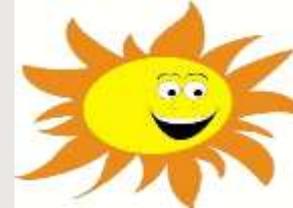
# Matriks Dilatasi



Misalkan peta titik  $A(x, y)$  oleh dilatasi dengan pusat  $O$  dan faktor skala  $k$  adalah  $A'(x', y')$ . Perhatikan gambar berikut :



NEXT



Sebagai catatan, titik  $A'(x', y')$  dapat berada disepanjang garis  $m$ , tergantung nilai  $k$ .

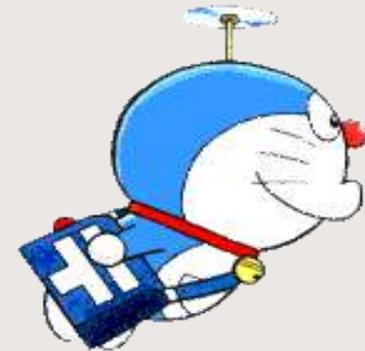
Berdasarkan gambar diatas, koordinat  $A'(x', y')$  dapat kita tulis dalam persamaan

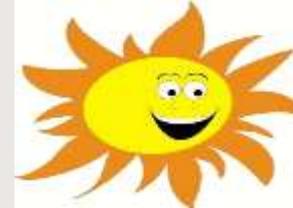
$$x' = kx \Leftrightarrow x' = kx + 0y$$

$$y' = ky \Leftrightarrow y' = 0x + ky$$

Dalam persamaan matrik kita tulis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



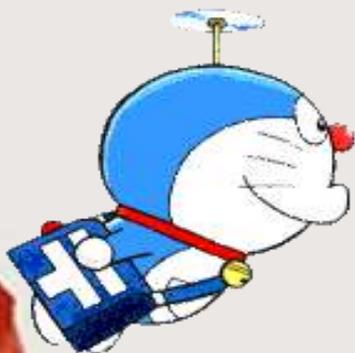


dengan matriks dilatasinya

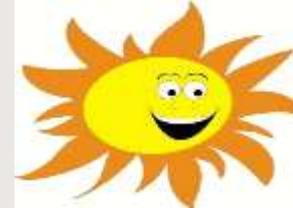
$$M_{|O, k|} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Untuk pusat  $(a, b)$ , persamaan matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} x' - a \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$



# Contoh dilatasi



Persamaan bayangan lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  oleh dilatasi dengan pusat 0 dan faktor skala 2 adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas kita peroleh

$$x' = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}x'$$

$$y' = 2y \rightarrow y = \frac{1}{2}y'$$

Substitusi x dan y ke persamaan  $x^2 + y^2 = 5$

$$\left(\frac{1}{2}x'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y'\right)^2 = 5$$

$$\frac{1}{4}(x')^2 + \frac{1}{4}(y')^2 = 5 \text{ (kali 4)}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 20$$

Jadi, bayangannya adalah  $x^2 + y^2 = 20$

# Contoh dilatasi



Peta titik R(1, 3) oleh dilatasi dengan pusat (-2, 4) dan faktor skala -2 adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} x' - a \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' + 2 \\ y' - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ 3 - 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' + 2 \\ y' - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

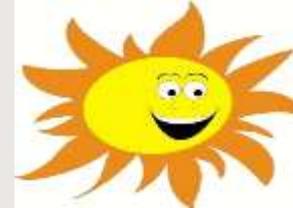
$$\begin{bmatrix} x' + 2 \\ y' - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks disamping kita peroleh

$$x' + 2 = -6 \rightarrow x' = -8$$

$$y' - 4 = 2 \rightarrow y' = 6$$

Jadi, peta titik R adalah R'(-8, 6)



**terimakasih**

Sumber : <https://smatika.blogspot.com/2017/11/matriks-transformasi-geometri.html>