MODUL PEMBELAJARAN

MATRIKS DAN VEKTOR BIDANG DAN RUANG

DISUSUN OLEH :

IHYANI TOYIBAH S.Pd (PPG DALJAB 2021 ANGKATAN 1)

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

BANTEN

2021

KATA PENGANTAR

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Modul Matematika Kelas XI materi Matriks dan Vektor Pada Bidang dan ruang untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan untuk menyederhanakan pembelajaran matriks dan vektor pada bidang dan ruang. Modul ini disusun sebagai tugas pembuatan modul materi ajar pada mahasiswa PPG tahun 2021 angkatan 1 di kampus UNTIRTA.

Penyusun menyampaikan rasa terimakasih kepada dosen pembimbing dalam penyusunan modul ini yaitu Ibu Dr. Hepsi Nindiasari, M.Pd.

Penyusun menyadari bahwa modul ini sangat banyak kekurangan karena keterbatasan waktu dan kemampuan penyusun. Semoga jika ada kesempatan membuat modul bisa lebih baik lagi.

Tangerang, April 2021

Penyusun

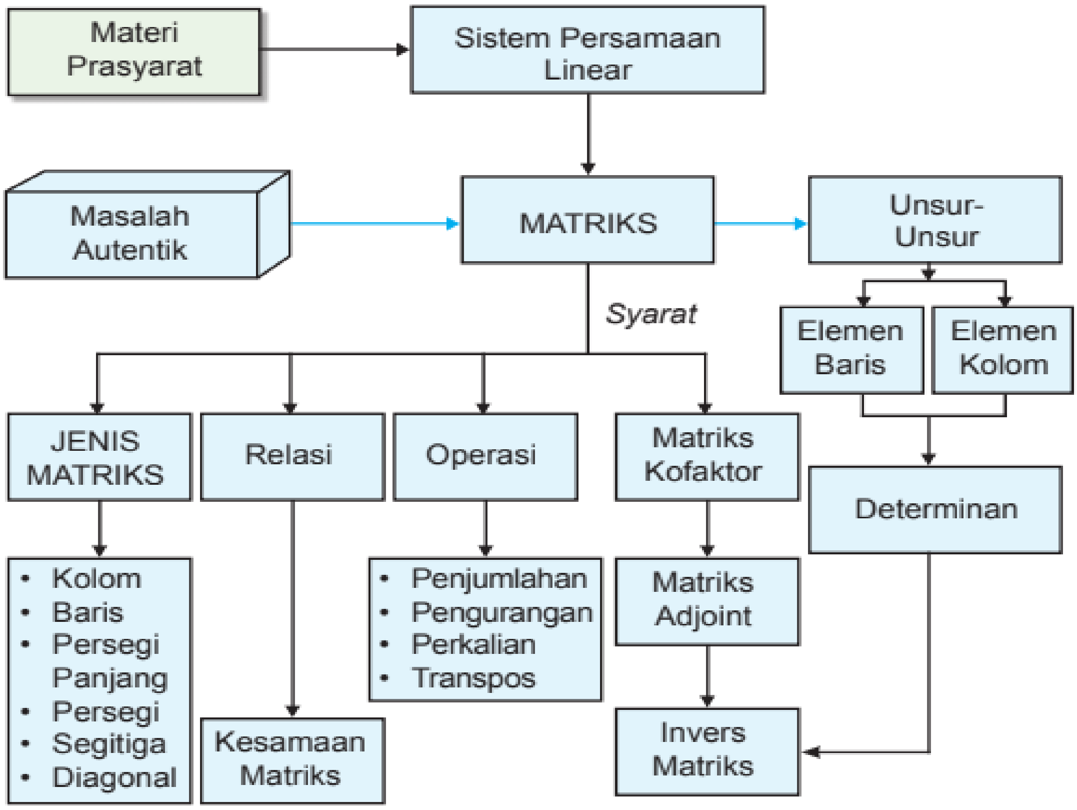
BAB I

PENDAHULUAN

A. Peta Konsep

Peta konsep matriks

Sebelum mempelajari materi matriks, silahkan di amati peta konsep berikut ini.



Sumber :*http://bsd.pendidikan.id/data/2013/kelas_11smk/Kelas_11_SMK_Matematika_Siswa_Semester_1.pdf*

Gambar 1.1

Peta konsep Vektor

Sumber : *https://mathlabs88.blogspot.com/2020/04/peta-konsep-vektor-matematika-peminatan.html*

Gambar 1.2

B. Deskripsi

Dalam modul ini akan di sampaikan materi matriks yang dipelajari di SMK kelas 11. Materi matriks yang akan dipelajari adalah definisi, ordo dan notasi matriks, jenis-jenis matriks, operasi Aljabar matriks, tranpos matriks, kesamaan matriks, determinan dan invers matriks. Materi prasyarat dari matriks adalah sistem persamaan linear.

Dalam modul ini juga akan disampaikan materi vektor yang dipelajari di SMK kelas 11. Vektor yang dipelari di modul ini adalah pengertian vektor, jenis-jenis vektor, Vektor R2 dan R3, Proyeksi orthogonal.

Dalam modul ini disajikan pada BAB I Pendahuluan terdiri dari peta konsep, deskripsi, capaian pembelajaran. Pada BAB II Uraian materi terdiri dari materi, forum diskusi, tugas formatif. Pada BAB III Penutup terdiri dari rangkuman, tes formatif. Pada BAB IV berisi daftar pustaka. Alasan pembuatan modul ini untuk memudahkan peserta didik dalam mempelajari materi matematika tentang matriks dan vektor serta guru juga bisa lebih menyederhanakan pembelajaran nya.

C. Capaian pembelajaran

Dalam pembelajaran matrik dengan menggunakan modul ini diharapkan peserta didik dapat mendefinisikan, menunjukkan, memahami, menyatakan, membuat, menyajikan.

1. Mendefinisikan matriks
2. Menentukan jenis-jenis matriks
3. Menunjukkan konsep kesamaan matriks
4. Memahami operasi-operasi pada matriks
5. Menyatakan determinan matriks
6. Menyatakan Invers matriks
7. Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan matriks dan menyatakan konsep kesamaan matriks
8. Menyatakan operasi-operasi matriks
9. Membuat model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan determinan matriks
10. Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan invers matriks

Dalam pembelajaran vektor dengan menggunakan modul ini diharapkan peserta didik dapat menjelaskan, menentukan

1. Menjelaskan vektor
2. Menentukan jenis-jenis vektor
3. Menjelaskan vektor di bidang (R2) dan ruang (R3)
4. Menentukan hasil proyeksi orthogonal

BAB II

URAIAN MATERI

A. MATRIKS

Dalam kehidupan sehari-hari kalian pasti sering dihadapkan pada informasi yang disajikan dalam bentuk tabel. Coba kalian sebutkan tabel apa yang kalian sering lihat? Coba jelaskan apa saja yang ada dalam tabel yang kalian sebutkan?

Baiklah sebelum menjelaskan tentang materi matriks, terlebih dahulu kita lihat gambar yang sudah disajikan. Gambar apakah ini? Amatilah gambar berikut ini? Apa yang kalian dapat jelaskan?

Sumber: *https://radarsukabumi.com/ekonomi/jual-produk-lokal-sukabumi-wujud-kemitraan-alfamart-dan-usaha-kecil-mikro/*

Gambar 2.1

Dari gambar terlihat bahwa harga makanan dan jenis makanan, jadi tampilan tersebut bisa dibuatkan daftar tabel nya. Tabel yang terbentuk misalkan seperti berikut ini :

Tabel 2.1

Daftar Harga Makanan di swalayan

NAMA MAKANAN	**HARGA**
Garuda rosta	Rp. 10.000,-
G-opak	Rp. 15.000,-
……………………..	………………

Dalam kehidupan sehari-hari yang kita lihat, terutama yang ingin naik kereta api,kita bisa melihat jadwal kereta api dr PT KAI terlebih dahulu, dari tabel yang kita lihat banyak menunjukkan informasi seperti gambar berikut ini :

Jadwal KRL Tanah Abang Menuju Serpong

Rute	DARI TANAH ABANG (THB)	KEDATANGAN SERPONG
1920	06:30 WIB	07:05 WIB
1930	08:30 WIB	09:08 WIB
1936	09:20 WIB	09:55 WIB
1942	10:17 WIB	10:53 WIB
1944	10:30 WIB	11:05 WIB
1952	11:25 WIB	12:01 WIB
1960	12:20 WIB	12:57 WIB
1964	12:45 WIB	13:19 WIB
1968	13:17 WIB	13:51 WIB
1974	14:10 WIB	14:44 WIB
1978	14:45 WIB	15:19 WIB

Sumber : https://dolanyok.com/jadwal-krl-tanah-abang/

Gambar 2.2

Dari gambar tersebut informasi apa yang kalian peroleh? Apa tujuan pembuatan jadwal dalam tabel tersebut?

1. Definisi, Ordo dan Notasi matriks

Perhatikan ilustrasi berikut ini !

Tabel 2.2

Jumlah Absensi siswa kelas 10 TL 1 SMKN 8 Kabupaten Tangerang di Rapot semester 1 tahun ajaran 2020/2021

NAMA	SAKIT	IJIN	ALPA
MUCHLISIN	1	1	2
BAGOES SETIAWAN	0	1	1
ULPA DWIYANTI	1	1	0

Informasi apa yang kalian peroleh? Bagaimanakah bentuk nya jika garisnya dihilangkan?

Nah, lihat hasilnya jika garisnya kita hilangkan maka bentuknya menjadi sebagai berikut :

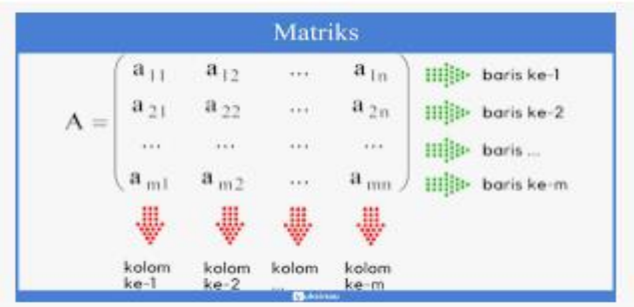
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Penulisan tabel tersebut adalah matriks. Dalam bentuk matriks terlihat barisan pertama ada 1,1,2. barisan kedua ada 0,1,1 dan barisan ketiga ada 1,1,0. Untuk kolom pertama diisi 1,0,1. Kolom kedua 1,1,1 dan kolom ketiga 2,1,0.

Menurut Howard Anton (1997: 22) matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dari matriks. Matriks dilambangkan dengan huruf besar, sedangkan entri (elemen matriks) dilambangkan dengan huruf kecil. Dalam matriks dikenal ukuran matriks yang disebut ordo, yaitu banyaknya baris × banyaknya kolom.

Notasi matriks adalah lambang atau simbol dari penulisan matrik dengan menggunakan huruf Kapital. Dan Notasi di dalamnya menggunakan huruf kecil. Notasi matriks dapat menentukan ordo pada matriks tersebut.

Bentuk umum matriks ;



$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\ldots a_{mn,}$: disebut elemen – elemen pada matriks A

a_{11}: adalah elemen matriks A yang terletak pada baris 1 kolom 1

$a_{23,}$: adalah elemen matriks A yang terletak pada baris 2 kolom 3

a_{mn} : adalah elemen matriks A yang terletak pada baris *m* kolom *n*

Banyak baris pada bentuk umum matriks A adalah *m* baris.

Banyak kolom pada bentuk umum matriks A adalah n kolom.

Suatu matriks dengan *m baris* dan *n kolom* disebut matriks yang berorodo m x n

Contoh :

Diketahui matriks:

$$A\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 7\\ 9 & -4\end{bmatrix}$$

Tentukan banyak baris, banyak kolom dan ordo matriks?

Jawab :

$$\text{Matriks A }\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow\ baris\ ke\ 1\\ \rightarrow\ baris\ ke\ 2\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\downarrow & \downarrow\\ Kolom\ ke\ 1 & Kolom\ ke\ 2\end{array}$$

Banyak baris = 2

Banyak kolom = 2

Ordo matriks m x n = 2 x 2

$$\text{Matriks }B\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 7\\ 9 & -4\end{bmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow\ baris\ ke\ 1\\ \rightarrow\ baris\ ke\ 2\\ \rightarrow\ baris\ ke\ 3\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\downarrow & \downarrow\\ \text{Kolom ke 1} & \text{Kolom ke 2}\end{array}$$

Banyak baris = 3

Banyak kolom = 2

Ordo matriks m x n = 3 x 2

2. Jenis - jenis Matriks

Dalam matriks ada jenis-jenisnya yaitu matriks nol, matriks baris, matriks kolom, matriks bujur sangkar/persegi, matriks diagonal, matriks identitas, matriks skalar, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah. Berikut penjelasan dari jenis-jenis matriks :

a. Matriks Nol

Matriks yang setiap elemennya adalah nol.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Matriks Baris

Matriks yang hanya mempunyai satu baris.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c. Matriks Kolom

Matriks yang hanya mempunyai satu kolom.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d. Matriks Bujur Sangkar/ matriks persegi

Matriks $A = (a_{mn})$ yang banyak baris dan kolomnya sama.

$$D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

e. Matriks Diagonal

Matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

f. Matriks Identitas

Matriks diagonal yang semua elemennya adalah 1

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g. Matriks skalar

Matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu.

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

h. Matriks Segitiga Atas

Matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal utama elemennya = 0

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

i. Matriks Segitiga Bawah

Matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal elemennya = 0

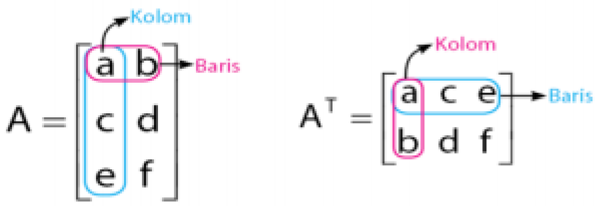
$$E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Transpos matriks

Transpos matriks adalah matriks yang diperoleh dengan menukar elemen baris dengan elemen kolom pada matriks dan sebaliknya. Notasi transpose matriks A adalah A^T. Suatu transpose matriks mempunyai sifat-sifat transpose yaitu :

1. $((A)^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A - B)^T = A^T - B^T$
4. $(kA)^T = kA^T \; dengan \; kostanta$
5. $(AB)^T = B^T A^T$

Misalkan matriks A sebagai berikut maka Transpos matriks nya :



Contoh :

Diketahui Matriks $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, Tentukan Transpos matriks nya!

Jawab : $Matriks \; A^T = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & -4 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

4. Operasi Aljabar Matriks

a) Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Operasi hitung matriks pada penjumlahan/pengurangan matriks memiliki syarat yang harus dipenuhi agar dua buah matriks dapat dijumlahkan/dikurangkan. Syarat dari dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan/dikurangkan jika memiliki nilai **ordo yang sama.** Artinya, semua matriks yang dijumlahkan/dikurangkan harus memiliki **jumlah baris dan kolom yang sama**.

Dua buah matriks dijumlahkan/dikurangkan dengan cara menjumlahkan/mengurangkan unsur yang seletak antara matriks *A* dan *B* .

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

a. $A + C$

b. $B - D$

c. $A + B$

d. $D - A$

Jawab :

a. $A + C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + (-3) & 1 + 4 \\ (-2) + 8 & 7 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$

b. $B - D =$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 9 & (-5) - 2 & 1 - 0 \\ 2 - (-3) & 1 - 3 & (-3) - 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 5 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

c. Matriks A dan b tidak dapat dijumlahkan karena matriks A berordo 2 x 2 dan matriks B berordo 2 x 3.

d. Matriks D dan A tidak dapat dijumlahkan karena matriks A berordo 2 x 3 dan matriks B berordo 2 x 2.

b) Perkalian skalar matriks

Jika A adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka kA adalah matriks baru yang elemen-lemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks A. Perhatikan contoh berikut :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Tentukan : *2A* dan *3B*

Jawab : $2A = 2 . \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(6) & 2(3) \\ 2(-8) & 2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -16 & 14 \end{bmatrix}$

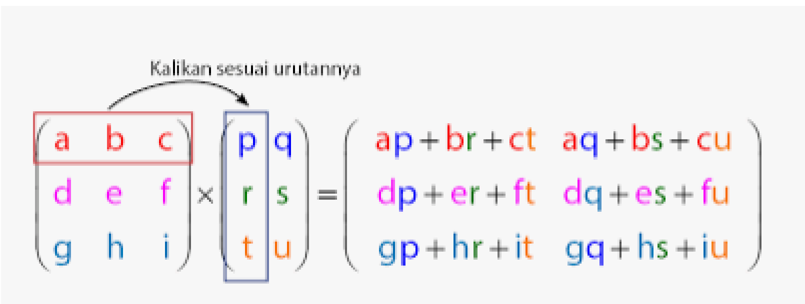
$$3B = 3 . \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 & 3.2 & 0.0 \\ 1.1 & 5.5 & 7.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 25 & 49 \end{bmatrix}$$

c) Perkalian Matriks dengan Matriks

Rumus perkalian matriks memiliki metode rumus yang sangat berbeda dengan penghitungan nilai penjumlahan maupun pengurangan matriks. Adapun metode yang diaplikasi di dalam rumus penghitungan perkalian bilangan matriks adalah dengan memasangkan baris yang ada pada matriks pertama dengan kolom yang ada pada matriks kedua.

Akan tetapi, kedua nilai matriks ini dapat dikalikan apabila banyak kolom pada matriks pertama memiliki nilai yang sama dengan banyak baris yang ada pada matriks kedua. Nantinya, hasil perkalian bilangan matriks akan memiliki baris yang sama banyak dengan baris matriks yang pertama. Misalkan perkalian matriks berikut ini:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$



Perkalian Matriks

$$A_{m \times n} \times B_{n \times m} = C_{m \times m}$$

Contoh :

Tentukan hasil perkalian matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ dengan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab :

$$A \; x \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 3.3 & 1.(-1) + 3.1 \\ (-2).2 + 7.3 & (-2).(-1) + 7.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+9 & (-1) + 3 \\ -4 + 21 & 2 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya, bisa lihat link youtobe berikut ini:

https://www.youtube.com/watch?v=7rYNoWR2PIs

https://www.youtube.com/watch?v=jVBBKHfY8vs

5. Kesamaan Matriks

Kesamaan dua buah matriks adalah dua buah matriks A dan B dikatakan sama, A = B, Jika dan hanya jika ordo kedua matriks A dan B sama.

Contoh : Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $dan \; B \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & b \end{bmatrix}$.

Tentukan nilai dari *a dan b* !

Jawab : $A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & b \end{bmatrix}$

Jadi *a* = *2* dan *b* = *1*

6. Determinan dan Invers matriks

a. Determinan Matriks

Untuk menyelesaikan system persamaan linear dengan dua variabel, misalkan mencari nilai *x* dan *y* maka cara yang bisa digunakan adalah dengan cara eliminasi natau substitusi *x atau y*.

Sisten persamaan linear ini bergantung pada nilai $ad - bc$. jika $ad - bc = 0$ maka sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian.

Berikut ini disajikan gambar mencari Determinan ordo *2 x 2* dan *3 x 3*

Determinan matriks 2×2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

det(A) = |A| = $a \times d - b \times c$

Determinan matriks 3×3 cara Sarrus

Untuk menentukan determinan matriks 3×3 dapat menggunakan **cara Sarrus** yaitu dua kolom pertama dipindahkan ke sebelah kanan matriksnya

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

determinan matriks A adalah :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Catatan : **Metode Sarrus** hanya bisa digunakan untuk matriks 3×3 saja. Untuk matriks dengan ukuran yang lebih besar, bisa mengggunakan **Metode Kofaktor** . Metode kofaktor ini bisa digunakan untuk menentukan determinan semua ukuran matriks persegi.

Sumber : https://www.google.com/search?q=Determinan+dan+invers+matriks&rlz=1C1UEAD_enID946ID946&oq=Determinan+dan+invers+matriks&aqs=chrome..69i57j0l6j69i60.7362j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Gambar 2. 3

Contoh : Tentukan determinan matriks $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\,.\,4 - 2\,.\,1 = 12 - 2 = 10$$

Untuk metode kofaktor matriksa ordo 3 x 3 silahkan buka link berikut ini :

https://www.youtube.com/watch?v=VsbtCrWTl7s

b. Invers Matriks

Invers matriks 2×2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

det(A) = |A| = $a \times d - b \times c$

invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Contoh :

Tentukan invers dari matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$!

Penyelesaian :

Determinan matriks A : $|A| = 3 \,.(-1)(-3) + 4 = 1$

Invers matriks A : $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Jadi Invers matriksnya adalah $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Untuk metode Kofaktor pada determinan dan invers matriks bisa dilihat di link berikut :

https://www.konsep-matematika.com/2015/09/determinan-dan-invers-matriks.html

7. Persamaan matriks

Perhatikan bahwa dengan menghitung perkalian matriks di ruas kiri akan menghasilkan sistem persamaan linear seperti yang di awal.

Setelah ditulis ke dalam persamaan matriks, system tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan matriks invers dan Langkah-langkah berikut ini. Jika A merepresentasikan matriks koefisien, X sebagai matriks variabel, B sebagai matriks konstanta, dan I sebagai matriks identitas, maka Langkah-langkah tersebut adalah sebagai berikut.

$AX = B$	*Persamaan matriks*
$A^{-1}(AX) = A^{-1} B$	*kalikan dari kiri dengan invers dari A*
$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$	*sifat asosiatif*
$IX = A^{-1}B$	$A^{-1}A = I$
$X = A^{-1} B$	*IX=X*

Untuk lebih jelas, perhatikan contoh berikut ini:

Contoh : Tentukan x dan y jika matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{6-5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + 1.3 \\ 5.2 + 3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3 \\ 10 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Jadi nilai $x = 7$ dan $y = 19$

B. VEKTOR

Dalam kehidupan sehari-hari vektor banyak ditemui di sekitar kita. Sebelum memulai materi vektor, perhatikan gamabr berikut ini.

Sumber: https://www.tribunnewswiki.com/2020/03/01/layang-layang-layangan

Gambar 2.4

Kita sering melihat layang-layang terbang, bahakan pernah menerbangkan layang-layang. Ketika menerbangkannya terpikirkah kalian bahwa layang-layang tersebut terbang menyesuaikan arah angin. Apa yang dimaksud dengan arah? Apakah arah layang-layang dengan orang yang menerbangkannya lurus?

Nah kita tahu bahwa layang-layang terbang arahnya tidak lurus terhadap orang yang sedang memegang tali layangan sehingga pengaruh dari vektor dapat membantu orang tersebut untuk dapat melihat layangan dengan lebih jelas. Maka dari itu Vektor adalah arah.

1. **Definisi Vektor**

Dari hasil analisis gambar maka Vektor adalah besaran yang memiliki arah. Vektor digambarkan sebagai panah dengan yang menunjukan arah vektor dan panjang garisnya disebut besar vektor. Dalam penulisannya, jika vektor berawal dari titik A dan berakhir di titik B bisa ditulis dengan sebuah huruf kecil yang diatasnya ada tanda garis panah seperti $\overrightarrow{AB}$. Sedangkan nama vektor yang tidak memperhatikan titik pangkal dan titik ujungnya dilambangkan dengan huruf-huruf kecil yang di garis bawahi seperti misalnya $\underline{u}$, $\underline{v}$.

2. **Jenis – jenis Vektor**

Ada beberapa jenis vektor dalam pembelajaran ini yaitu :

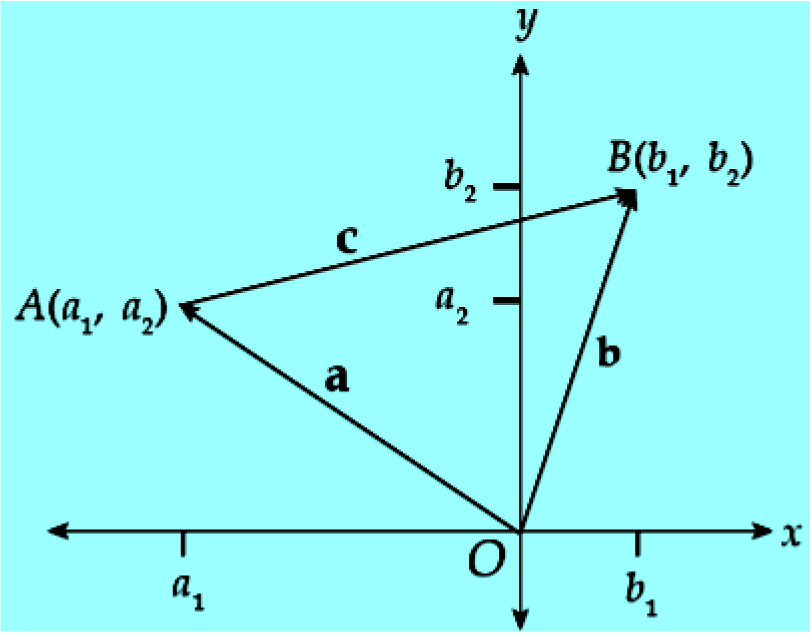
a. **Vektor Posisi**
Suatu vektor yang posisi titik awalnya di titik 0 (0,0) dan titik ujungnya di A (a_1, a_2)

b. **Vektor Nol**
Suatu vektor yang panjangnya nol dan dinotasikan $\bar{0}$. Vektor nol tidak memiliki arah vektor yang jelas.

c. **Vektor satuan**
Suatu vektor yang panjangnya satu satuan. Vektor satuan dari $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ adalah:

d. **Vektor basis**
Vektor basis merupakan vektor satuan yang saling tegak lurus. Dalam vektor ruang dua dimensi (R^2) memiliki dua vektor basis yaitu $\bar{i} = (1, 0)$ dan $\bar{j} = (0, 1)$. Sedangkan dalam tiga dimensi (R^3) memiliki tiga vektor basis yaitu $\bar{I} = (1, 0, 0)$, $\bar{J} = (0, 1, 0)$, dan $\bar{K} = (0, 0, 1)$.

Diperlihatkan suatu gambar berikut ini :



Sumber:https://soalfismat.com/contoh-soal-panjang-vektor-dan jawabannya/

Gambar 2.5 vektor dalam koordinat cartesius

Adapun cara untuk menghitung Panjang a, b dan c yaitu :

3. **Vektor di $\boldsymbol{R^2}$**

Vektor di R2 adalah vektor pada bidang datar. Untuk Panjang vektor bidang yaitu:

Panjang vektor $\binom{a}{b}$ $adalah$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\binom{a}{b}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$ dalam R^2

Untuk lebih memahami materi vektor bidang silahkan pahami contoh berikut :

Contoh :

Tentukan Panjang vektor AB = $6i - 2j$

Jawab :

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\binom{6}{2}\right| = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \ x \ 10} = 4\sqrt{10}$$

Untuk melihat contoh lainnya silahkan buka di link berikut ini :

https://www.youtube.com/watch?v=Nbm37Ci7tBw

4. **Vektor di R3**

Vektor R3 adalah vektor pada ruang. Untuk Panjang vektor ruang yaitu:

Panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $adalah$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dalam R^3

Dalam memahami materi vektor ruang, silahkan perhatikan contoh berikut :

Contoh :

Tentukan Panjang vektor AB = $8i - 2j - 5k$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 4 + 25}$$

$$= \sqrt{93}$$

Untuk melihat contoh yang lain, silahkan lihat di link berikut ini : **https://www.youtube.com/watch?v=8mOhd-wqrOU**

5. **Proyeksi Vektor Orthogonal**

Proyeksi orthogonal vektor $\underline{a}$ *pada vektor* $\underline{b}$ adalah ‘bayangan tegak lurus’ dari vektor $\underline{a}$ *pada vektor* $\underline{b}$

a. Proyeksi vektor

Proyeksi vektor ortogonal vektor $\underline{a}$ *pada vektor* $\underline{b}$ hasilnya adalah vektor bayangan nya, yaitu **vektor $\underline{c}$ dengan :**

$$\underline{c} = \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2}\right) \cdot \underline{b}$$

b. Proyeksi skalar orthogonal

Proyeksi scalar orthogonal $\underline{a}$ pada vektor $\underline{b}$ hasilnya adalah Panjang (modulus) dari vektor ‘bayangan; nya, yaitu $\underline{c}$

$$|\underline{c}| = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2}$$

C. TUGAS INDIVIDU

Untuk lebih memahami materi matriks dan vektor, silahkan Kerjakan soal berikut ini :

1. Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -1 & 10 & -3 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 11 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tentukan hasil dari operasi matriks berikut :

a. $2B + A$

b. $3C - B$

2. Diketahui matriks berikut, Hitunglah Perkalian matriks berikut:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} =$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

3. Jika diketahui matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3 & b + 2 \\ 4 & 9 \\ 7 & a + 5 \end{pmatrix} \; maka\ tentukan\ nilai\ a\ dan\ b?$$

4. Diketahui vektor $u = (2, 3,4)$, $v = (1, -1, 2)$

Tentukanlah :

a. $|u| + |v|$

b. $|u + v|$

c. $|u + v| - |u| - |v|$

D. FORUM DISKUSI

1. Lihatlah Tabel berikut ini

	Buku Tulis	Pulpen
Dewan	5	2
Ulpa	4	1

	Harga satuan dalam rupiah
Buku Tulis	Rp. 4.000,-
Pulpen	Rp. 3.000,-

1. Berapa rupiahkan Ulpa harus membayar ?
2. Berapa rupiahhkah Dewan harus membayar?
3. Konsep matriks apakah yang digunakan untuk menyelesaikan soal tersebut? Dsikusikan Bersama teman kalian!

2. Raya dan Dimas akan melaksanakan pembelajaran daring dan harus mempunyai paket internet. Mereka pergi ke konter pulsa untuk membeli paket internet berupa kartu perdana,teman-teman raya dan dimas ikut membeli tetapi hanya menitipkan uang ke raya dan dimas. Raya membeli 3 kartu perdana A dan 2 kartu perdana B seharga Rp. 169.000 dan Dimas membeli 2 kartu perdana A dan 1 kartu perdana B seharga Rp. 102.000. Diskusikanlah Bersama teman kalian.

   a. Buatlah model matematika

   b. Tentukan harga sebuah kartu perdana A dan sebuah kartu perdana B!

3. Diketahui vektor :

$$\underline{a} = 10\,i - 2\,j + 4\,k$$

$$\underline{b} = 4\,i + 8\,j + 6\,k$$

Diskusikan dengan teman kalian berapakah hasil dari :

a. Proyeksi vektor $\underline{a}$ pada vektor $\underline{b}$

b. Proyeksi skalar $\underline{a}$ pada vektor $\underline{b}$

BAB III

PENUTUP

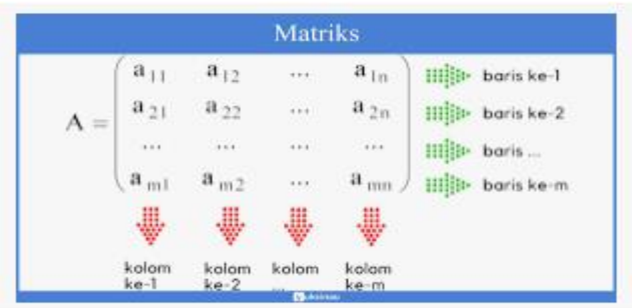
A. Rangkuman

Selamat ya ...... Kalian telah berhasil menyelesaikan kegiatan belajar tentang matriks dan vektor bidang dan ruang.

Materi yang dikaji dalam modul ini dapat dirangkum sebagai berikut:

Matriks

1. Bentuk umum matriks ;



$a_{11,}a_{12,}a_{13,}\ldots\ldots a_{mn,}$: disebut elemen – elemen pada matriks A

a_{11}: adalah elemen matriks A yang terletak pada baris 1 kolom 1

$a_{23,}$: adalah elemen matriks A yang terletak pada baris 2 kolom 3

a_{mn} : adalah elemen matriks A yang terletak pada baris *m* kolom *n*

Banyak baris pada bentuk umum matriks A adalah *m* baris.

2. Jenis - jenis Matriks

Dalam matriks ada jenis-jenisnya yaitu matriks nol, matriks baris, matriks kolom, matriks bujur sangkar/persegi, matriks diagonal, matriks identitas, matriks skalar, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah. Berikut penjelasan dari jenis-jenis matriks :

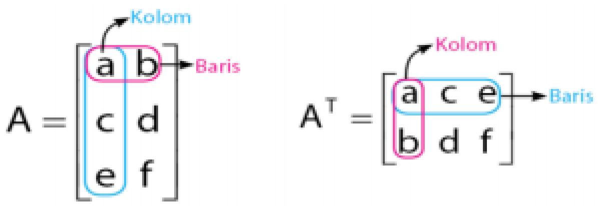
a. Matriks Nol

b. Matriks Baris

c. Matriks Kolom
d. Matriks Bujur Sangkar/ matriks persegi
e. Matriks Diagonal
f. Matriks Identitas
g. Matriks skalar
h. Matriks Segitiga Atas
i. Matriks Segitiga Bawah

3. Transpos matriks

Transpos matriks adalah matriks yang diperoleh dengan menukar elemen baris dengan elemen kolom pada matriks dan sebaliknya. Notasi transpose matriks A adalah A^T. 4.



4. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Operasi hitung matriks pada penjumlahan/pengurangan matriks memiliki syarat yang harus dipenuhi agar dua buah matriks dapat dijumlahkan/dikurangkan. Syarat dari dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan/dikurangkan jika memiliki nilai **ordo yang sama.** Artinya, semua matriks yang dijumlahkan/dikurangkan harus memiliki **jumlah baris dan kolom yang sama**.

Dua buah matriks dijumlahkan/dikurangkan dengan cara menjumlahkan/mengurangkan unsur yang seletak antara matriks A dan B .

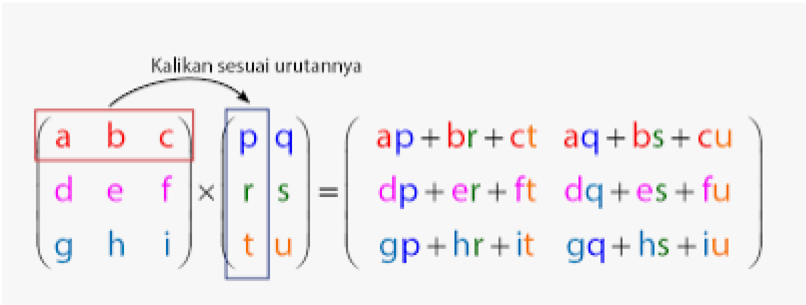
5. Perkalian skalar matriks

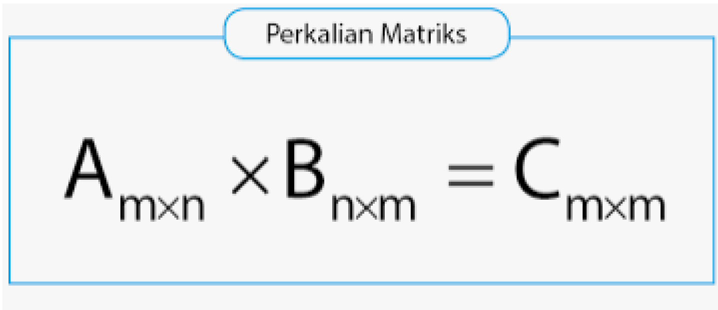
Jika A adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka kA adalah matriks baru yang elemen-lemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks A

6. Perkalian Matriks dengan Matriks

Rumus perkalian matriks memiliki metode rumus yang sangat berbeda dengan penghitungan nilai penjumlahan maupun pengurangan matriks. Adapun metode yang diaplikasi di dalam rumus penghitungan perkalian bilangan matriks adalah dengan memasangkan baris yang ada pada matriks pertama dengan kolom yang ada pada matriks kedua.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

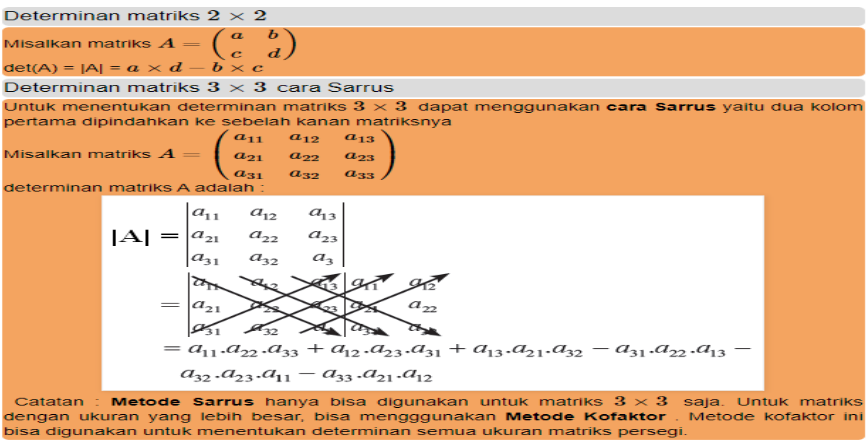




7. Kesamaan Matriks

Kesamaan dua buah matriks adalah dua buah matriks A dan B dikatakan sama, A = B, Jika dan hanya jika ordo kedua matriks A dan B sama.

8. Determinan dan Invers matriks



Determinan matriks 2×2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

det(A) = |A| = $a \times d - b \times c$

Determinan matriks 3×3 cara Sarrus

Untuk menentukan determinan matriks 3×3 dapat menggunakan **cara Sarrus** yaitu dua kolom pertama dipindahkan ke sebelah kanan matriksnya

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

determinan matriks A adalah :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Catatan : **Metode Sarrus** hanya bisa digunakan untuk matriks 3×3 saja. Untuk matriks dengan ukuran yang lebih besar, bisa mengggunakan **Metode Kofaktor** . Metode kofaktor ini bisa digunakan untuk menentukan determinan semua ukuran matriks persegi.

Invers matriks 2×2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

det(A) = |A| = $a \times d - b \times c$

invers matriks A adalah $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

9. Persamaan Matriks

$AX = B$	*Persamaan matriks*
$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$	*kalikan dari kiri dengan invers dari A*
$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$	*sifat asosiatif*
$IX = A^{-1}B$	$A^{-1}A = I$
$X = A^{-1}B$	*IX=X*

Vektor

1. Jenis – jenis Vektor

   Ada beberapa jenis vektor dalam pembelajaran ini yaitu :

   a. Vektor Posisi
   b. Vektor Nol
   c. Vektor satuan
   d. Vektor basis

2. **Vektor di R^2**

   Panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *adalah* $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dalam R^2

3. **Vektor di R3**

   Panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *adalah* $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dalam R^3

4. **Proyeksi Vektor Orthogonal**

   a. Proyeksi vektor : $\underline{c} = \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2}\right) \cdot \underline{b}$

   b. Proyeksi skalar orthogonal = $|\underline{c}| = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2}$

B. Rubrik Penilaian

<table>
<tr><th>No. Soal</th><th>Tahapan</th><th>Soal</th><th>Jawaban</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>Diketahui :
$A = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -1 & 10 & -3 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 11 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.
Tentukan hasil dari operasi matriks berikut :
a. $2B + A$
b. $3C - B$</td><td>a. Diketahui Matriks
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
b. Diketahui Matriks
$B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 11 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>a. $2B = 2\begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
b. $3C = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 11 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>a. $2B = \begin{pmatrix} 2.16 & 2.3 & 2.7 \\ 2.2 & 2.4 & 2(-9) \\ 2(-5) & 2.5 & 2.8 \end{pmatrix}$
b. $3C = \begin{pmatrix} 3.0 & 3.0 & 3.(-2) \\ 3.11 & 3.4 & 3.0 \\ 3.3 & 3.(-6) & 3.1 \end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$a.\ 2B = \begin{pmatrix} 32 & 6 & 14 \\ 4 & 8 & (-18) \\ (-10) & 10 & 16 \end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
</table>

			b. $3C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-6) \\ 33 & 12 & 0 \\ 9 & (-18) & 3 \end{pmatrix}$		
			a. $2B + A = \begin{pmatrix} 32 & 6 & 14 \\ 4 & 8 & (-18) \\ (-10) & 10 & 16 \end{pmatrix} +$ $\begin{pmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -1 & 10 & -3 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ b. $3C - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-6) \\ 33 & 12 & 0 \\ 9 & (-18) & 3 \end{pmatrix} -$ $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$		
			$a. 2B + A$ $= \begin{pmatrix} 32 + (-4) & 6 + (-12) & 14 + 6 \\ 4(-1) & 8 + 10 & (-18) + (-3) \\ (-10) + 0 & 10 + 9 & 16 + 8 \end{pmatrix}$ $b. 3C - B$ $= \begin{pmatrix} 0 - 16 & 0 - 3 & (-6) - 7 \\ 33 - 2 & 12 - 4 & 0 - (-9) \\ 9 - (-5) & (-18) - 5 & 3 - 8 \end{pmatrix}$		
			a. $2B + A = \begin{pmatrix} 28 & -6 & 20 \\ 3 & 18 & (-21) \\ (-10) & 19 & 24 \end{pmatrix}$ b. $3C - B = \begin{pmatrix} -16 & -3 & (-13) \\ 31 & 8 & 9 \\ 14 & -23 & -5 \end{pmatrix}$		

DAFTAR PUSTAKA

Hidayat, Agus. 2013. *Modul Matematika Program Belajar Paket C Setara SMA*. Depok : Arya Duta

Kasmina, Toali. 2013 Matematika untuk SMK/ Kelas 11 kurikulum 2013. Jakarta : Erlangga

https://hasilun.puspendik.kemdikbud.go.id/#2019!smk!daya_serap!99&99&999!T&03&T&T&1&!1!& . (20 April 2021)

http://eprints.uny.ac.id/13264/1/SKRIPSI.pdf. (20 April 2021)

http://bsd.pendidikan.id/data/2013/kelas_11smk/Kelas_11_SMK_Matematika_Siswa_Semester_1.pdf . (20 April 2021)

https://bsd.pendidikan.id/data/2013/kelas_11sma/guru/Kelas_11_SMA_Matematika_Guru_2017.pdf. (20 April 2021)

https://radarsukabumi.com/ekonomi/jual-produk-lokal-sukabumi-wujud-kemitraan-alfamart-dan-usaha-kecil-mikro/. (20 April 2021)

http://eprints.uny.ac.id/8362/3/BAB%20II.pdf . (20 April 2021)

https://www.dosenmatematika.co.id/mengetahui-definisi-matriks-dan-ordo-matriks/. (20 April 2021)

https://www.google.com/search?q=notasi+matriks&rlz=1C1UEAD_enID946ID946&oq=notasi+matriks&aqs=chrome..69i57j0j0i22i30l8.4524j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8. (20 April 2021)

https://sc.syekhnurjati.ac.id/esscamp/files_dosen/modul/Pertemuan_5MAT2020341.pdf. (20 April 2021)

https://banten.suara.com/read/2021/03/25/072500/download-jadwal-imsakiyah-ramadhan-2021-banten-versi-muhammadiyah?page=all. (21 April 2021)

https://www.studiobelajar.com/vektor/. (21 April 2021)