



## MODUL MATEMATIKA

### DETERMINAN, INVERS DAN TRANSPOSE

Determinan dan invers matriks dapat digunakan pada kompetensi matematika lainnya atau pada mata pelajaran lain sebagai salah satu alat bantu untuk menyelesaikan suatu masalah. Misalnya, determinan digunakan untuk menyelesaikan system persamaan linear, menghitung tafsiran geometri pada dilatasi bangun datar, khususnya menghitung luas bangun datar dan sebagainya.

#### A. Determinan Matriks

Syarat suatu matriks dapat dicari determinannya adalah matriks tersebut harus merupakan matriks persegi.

##### 1. Determinan Matriks Ordo $2 \times 2$

Misalkan  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  adalah matriks yang berordo  $2 \times 2$  dengan elemen a dan d terletak pada diagonal utama pertama, sedangkan b dan c terletak pada diagonal kedua. Determinan matriks A dinotasikan "det A" atau  $|A|$  adalah suatu bilangan yang diperoleh dengan **mengurangi** hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen diagonal kedua.

Dengan demikian, dapat diperoleh rumus det A sebagai berikut :

$$\det A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

#### Contoh Soal 1 :

Tentukan determinan matriks-matriks berikut :

a.  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

b.  $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

a.  $\det A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = (5 \times 3) - (2 \times 4) = 7$

b.  $\det B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = ((-4) \times 2) - (3 \times (-1)) = -5$

## 2. Determinan Matriks berordo 3 x 3

Sama halnya dengan matriks berordo 2 x 2, matriks persegi berordo 3 x 3 juga mempunyai determinan. Bagaimanakah cara menentukan determinan matriks persegi berordo 3 x 3 ? simak uraian berikut ini :

Misalkan A matriks persegi berordo 3 x 3 dengan bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 x 3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan *metode Sarrus*.

Adapun langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 x 3 dengan *metode Sarrus* adalah sebagai berikut:

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks A di sebelah kanan tanda determinan.
2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan *Du*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$Du = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan *Ds*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$Ds = a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12}$$

4. Sesuai dengan definisi determinan matriks maka determinan dari matriks A adalah selisih antara *Du* dan *Ds* yaitu  $Du - Ds$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$$

**Contoh Soal 2 :**

1. Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  Tentukan nilai determinan matriks  $A$ .

**Jawab :**

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= [(-3 \times 1 \times (-1)) + (4 \times 3 \times 1) + (2 \times 2 \times 0)] - [(1 \times 1 \times 2) + (0 \times 3 \times (-3)) + (-1 \times 2 \times 4)] \\ &= (3 + 12 + 0) - (2 + 0 - 8) = 21 \end{aligned}$$

Jadi, nilai determinan matriks  $A$  adalah 21.

**B. INVERS**

**a. Definisi Invers Matriks**

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah dua matriks yang berordo  $2 \times 2$  dan memenuhi persamaan  $AB = BA = I_2$  maka matriks  $A$  adalah matriks invers dari matriks  $B$  atau matriks  $B$  adalah matriks invers dari matriks  $A$ .

Contoh :

Perhatikanlah perkalian matriks-matriks berikut!

Misalkan  $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

**b. Rumus invers matriks ordo  $2 \times 2$**

Rumus Invers Matriks Berordo  $2 \times 2$

Misalkan  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  invers dari  $A$  adalah  $A^{-1}$ , yaitu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } \det A \neq 0$$

Contoh :

Tentukan invers dari matriks  $D = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

Jawab :

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3(11) - (-7)(-6) = 33 - 42 = -9$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{6}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{3}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

### C. TRANSPOS

Transpos matriks biasanya ditulis  $A^T$  atau  $A^t$ . Transpose matriks adalah matriks yang diperoleh dari perubahan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris dari **matriks asal**.

Misalnya:  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  maka  $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Contoh Soal :

Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Tunjukkan bahwa :

a.  $(A^t)^t = A$

b.  $(A + B)^t$

Jawab:

a.  $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$(A^t)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi  $(A^t)^t = A$

$$\text{b. } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi, } (\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$$

$$\mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$





## LATIHAN EVALUASI KD

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat untuk setiap soal berikut!

1. Jika  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  maka determinan A sama dengan ....
  - A. -3
  - B. -2
  - C. -1
  - D. 2
  - E. 22
2. Jika  $A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 21 & 7 \end{bmatrix}$  maka nilai  $|A| = \dots$ 
  - A. 0
  - B. 1
  - C. 3
  - D. 4
  - E. 11
3. Misal  $A = \begin{bmatrix} x & 9 \\ 4 & x \end{bmatrix}$  dan A adalah matriks singular, maka nilai  $x = \dots$ 
  - A. 6
  - B. -6
  - C. 3
  - D. 6 atau -6
  - E. 6 atau 3
4. Jika  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  maka nilai  $\det.A = \dots$ 
  - A. 0
  - B. 1
  - C. 2
  - D. 3
  - E. 4
5. Agar matriks  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & x & 14 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$  merupakan matriks singular maka  $x = \dots$

- A. 0
- B. 2
- C. 5
- D. 10
- E. 15

6. Jika  $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  maka  $A^{-1} = \dots$

- A.  $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
- B.  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
- C.  $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
- D.  $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$
- E.  $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$

7. Matriks dibawah ini yang tidak mempunyai invers adalah ....

- A.  $\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$
- B.  $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$
- C.  $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$
- D.  $\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$
- E.  $\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

8. Jika  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  maka  $X = \dots$

- A.  $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
- B.  $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
- C.  $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
- D.  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
- E.  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. Matriks X yang memenuhi persamaan :

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ adalah ....}$$

- A.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$
- B.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- C.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$
- D.  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- E.  $\begin{bmatrix} 1 \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$

10. Nilai x yang memenuhi system persamaan :

$$-2x + 3y = 4$$

$$x + 2y = 5$$

adalah ....

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

11. Diberikan matriks A, B, dan C sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika  $B - A = C^t$  dan  $C^t$  merupakan transpose dari C, maka nilai x.y sama dengan

- A. 10
- B. 15
- C. 20
- D. 25
- E. 30

12. Diketahui matriks A, B dan C sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$

Jika  $A^t$  adalah transpose dari matriks A dan  $A^t \cdot B = C$ , maka nilai  $2x + y = \dots$



- A. -4
- B. -1
- C. 1
- D. 5
- E. 7

13. Tabel berikut menyajikan data mengenai kebutuhan pakan ayam disebuah peternakan ayam.

	Banyak Ayam berdasarkan Usia	
	Usia 5 Minggu (Ekor)	Usia 6 Minggu (Ekor)
Kandang A	250	400
Kandang B	300	200
Kandang C	300	250

Jika kebutuhan pakan ayam usia 5 minggu adalah 111 gram/hari/ekor dan usia 6 minggu adalah 129 gram/hari/ekor, perkalian matriks yang menyatakan kebutuhan pakan ayam perhari adalah ....

- a.  $\begin{bmatrix} 250 & 400 \\ 300 & 200 \\ 250 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 129 \end{bmatrix}$
- b.  $\begin{bmatrix} 250 & 400 \\ 300 & 200 \\ 300 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 129 \end{bmatrix}$
- c.  $\begin{bmatrix} 250 & 300 & 300 \\ 400 & 200 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 129 \end{bmatrix}$
- d.  $\begin{bmatrix} 250 & 200 & 250 \\ 400 & 300 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 129 \end{bmatrix}$
- e.  $\begin{bmatrix} 400 & 200 & 250 \\ 250 & 300 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 111 \\ 129 \end{bmatrix}$

14. Tabel persediaan air mineral disebuah warung sebagai berikut :

Tahun	Kemasan 330 ml	Kemasan 600 ml	Kemasan 1.500 ml
Merek A	48	15	20
Merek B	36	18	25

Harga jual kedua merek air mineral sama. Jika air mineral kemasan 330 ml Rp.1500,00; harga air mineral kemasan 600 ml Rp. 2.000,00; dan harga air mineral kemasan 1.500 ml Rp. Rp. 4.000,00; perkalian matriks yang menyatakan harga jual seluruh air mineral adalah ....

A.  $\begin{bmatrix} 48 & 36 \\ 15 & 18 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.500 \\ 2.000 \\ 4.000 \end{bmatrix}$

B.  $\begin{bmatrix} 48 & 15 \\ 20 & 36 \\ 18 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.500 \\ 2.000 \\ 4.000 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 48 & 15 & 20 \\ 36 & 18 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.500 & 2.000 & 4.000 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 48 & 15 & 20 \\ 36 & 18 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.500 \\ 2.000 \\ 4.000 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 36 & 18 & 25 \\ 48 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.000 \\ 2.000 \\ 1.500 \end{bmatrix}$

15. Diketahui bilangan bulat a dan b. Bilangan b lebih dari bilangan a. Jumlah kedua bilangan adalah 6, sedangkan selisih 24. Model matematika yang menggambarkan permasalahan tersebut adalah .....

a.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \end{bmatrix}$

e.  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24 \end{bmatrix}$