RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN
MATEMATIKA

NAMA SEKOLAH
SMK NEGERI 1 Purwodadi

BIDANG KEAHLIAN
Semua Kompetensi Keahlian

MATERI
Integral Tak Tentu

KELAS / SEMESTER
XII / GANJIL

ALOKASI WAKTU
1x Pertemuan (2x30')

TUJUAN PEMBELAJARAN :
Peserta didik diharapkan mampu menentukan nilai integral tak tentu secara baik dan benar.

ALAT DAN MEDIA PEMBELAJARAN

- Alat Pembelajaran: Laptop atau HP Android

- Media Pembelajaran : Whatsapp, Google Classroom, Google Meet, Email dan Youtube

KEGIATAN PEMBELAJARAN

A. PENDAHULUAN

Melaksanakan vicon menggunakan google meet dengan siswa untuk:

1. Mengkondisikan kelas virtual (*whatsapp* group dan forum di *google classroom*), memberi salam, menanyakan kabar dan mengingatkan pentingnya menaati protocol covid-19
2. Menyampaikan tujuan pembelajaran pertemuan hari ini
3. Membuat apersepsi tentang integral tak tentu
4. Memastikan siswa bergabung dengan google classroom dan sudah melakukan presensi kehadiran

B. INTI (PERTEMUAN 1 : Integral Tak Tentu)

1. Peserta didik mempelajari dan mengidentifikasi konsep integral tak tentu melalui PDF, PPT atau video pembelajaran pada link https://www.youtube.com/watch?v=SUZXxGIPpPA yang telah diunggah pada google classroom.
2. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk mengidentifikasi hal yang belum dipahami berupa pertanyaan yang berkaitan konsep integral tak tentu melaui forum pada google classroom atau whatsapp.
3. Peserta didik menerapkan konsep yang dipelajari untuk menentukan nilai integral tak tentu pada LKPD yang diberikan oleh Guru pada google classroom
4. Peserta didik mengerjakan tugas yang telah diberikan di google classroom

C. REFLEKSI DAN KONFIRMASI

1. Merefleksi kegiatan pembelajaran yang telah dilaksanakan.
2. Menginformasikan kegiatan pembelajaran yang akan dilakukan pada pertemuan berikutnya.
3. Guru memberikan tugas dan memberikan informasi tentang waktu pengumpulannya melalui classroom
4. Guru memberikan review serta mengembalikan tugas yang telah diberikan melalui classroom
5. Kegiatan diakhiri dengan salam lewat forum chat *Whatsapp Group* dan Forum *Google Calssroom*

D. PENILAIAN :

1. Penilaian Sikap
   Melalui pengamatan perilaku sikap spiritual dan sikap sosial pada saat pembelajaran berlangsung
2. Penilaian Pengetahuan
   Melalui soal pilihan ganda dan esai sesuai dengan instrumen

dan norma penilaian yang sudah di upload pada google classroom

3. Penilaian Keterampilan
   Melalui unjuk kerja berdasarkan tugas yang diberikan pada saat pembelajaran

Mengetahui,	Purwodadi, Juli 2020
Kepala Sekolah	Guru Mata Pelajaran
Sukamto, S.Pd, M.M.	Sugiharto
NIP. 19720302 199512 1 001	NIP.

MODUL
INTEGRAL TAK TENTU

Kelas XII Semester Ganjil
Pertemuan 1

integral
Research & Development

Oleh :
Sugiharto
20031518010152

SMK Negeri 1 Purwodadi
Tahun Pelajaran 2020/2021

PRAKATA

Konsep Integral banyak digunakan dalam kehidupan, misalnya dalam bidang Ekonomi dan Bisnis. Integral misalnya, bisa digunakan untuk mencari fungsi biaya total, fungsi penerimaan total, surplus konsumen, dan surplus produsen. Pada penyampaian materi yang abstrak seperti Integral diperlukan sumber materi dan sebuah perangkat yang bisa membantu siswa dalam memahami konsep. Kemajuan teknologi informasi memberikan kemudahan kepada para pengajar untuk memanfaatkan teknologi dalam pembelajaran.

Modul ini terintegrasi dengan penggunaan *software Maple* sehingga diharapkan dapat membantu siswa dalam memahami konsep Integral serta aplikasinya, termasuk dalan bidang kewirausahaan. *Software Maple* bisa memberikan visualisasi atau gambaran dari fungsi-fungsi yang dipelajari pada

Integral sehingga lebih memudahkan siswa dalam memahami konsep. Dengan software *Maple*, siswa bisa aktif menggali hubungan antara konsep-konsep integral dan representasi grafisnya.

Modul ini memuat pengantar konsep integral dan penjabaran teorema-teoremanya. Selain itu, modul ini juga menyajikan contoh soal untuk memberikan gambaran yang lebih jelas tentang teorema-teorema integral. Pada akhir kegiatan, terdapat beberapa Soal Evaluasi untuk mengetahui sejauh mana siswa memahami materi yang telah dipelajari.

Purwodadi, September 2020

Penulis

DESKRIPSI DAN PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Deskripsi

Modul ini terdiri atas lima sub bab. Sub Bab yang pertama membahas tentang Pengertian integral tak tentu atau anti turunan. Pada sub bab kedua, topik yang dibahas adalah Sifat - sifat integral tak tentu. Sub Bab ketiga membahas Integral tak tentu fungsi aljabar. Sub Bab ke empat tentang Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri dan sub bab yang kelima yaitu Penerapan Integral Tak Tentu.

Petunjuk Penggunaan Modul Bagi Siswa

1. Siswa diharapkan mempunyai kemampuan prasyarat sebelum mempelajari modul ini, yaitu materi Diferensial/Turunan
2. Perhatikan setiap kompetensi dasar dan tujuan pembelajaran pada setiap bab yang Anda pelajari.
3. Pahami isi materi modul ini dengan seksama.
4. Mintalah penjelasan pada guru apabila ada materi yang tidak dapat dipahami.
5. Kerjakan semua soal latihaan yang ada pada masing-masing bab.
6. Kerjakan semua soal evaluasi yang ada pada setiap bab untuk mengukur. pemahaman konsep Anda setelah mempelajari materi pada modul ini. Jika skor yang Anda dapatkan belum mencapai 71% dari skor total, maka pelajarilah kembali materi pada modul ini untuk meningkatkan pemahaman Anda.
7. Bacalah referensi lainnya yang berhubungan dengan materi modul agar Anda mendapatkan tambahan pengetahuan.
8. Tunjukkan Pendidikan Karakter Bangsa Anda dalam menggunakan dan mempelajari modul ini. Sifat-sifat Pendidikan Karakter Bangsa antara lain:
   a. *Percaya diri*

      Percaya dirilah pada kemampuan sendiri dalam mengerjakan soal-soal sehingga Anda bisa mengukur kemampuan Anda sendiri.
   b. *Bekerja keras dan tidak pantang menyerah*

      Setiap mendapati soal yang sulit, teruslah berusaha menyelesaikannya. Anda bisa meminta bantuan dari teman maupun guru.
   c. *Kerjasama*

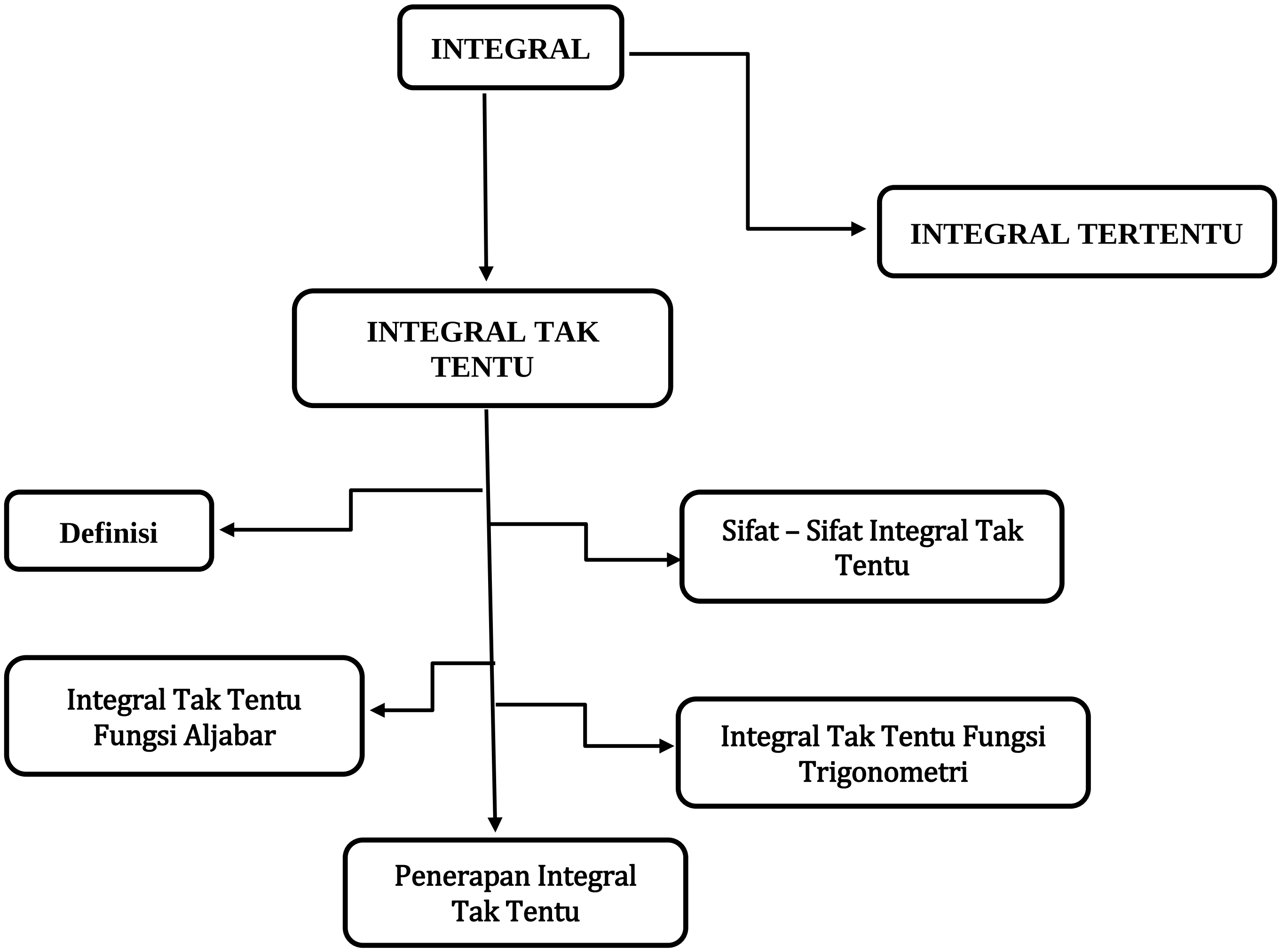
      Dalam mempelajari materi dan mengerjakan latihan soal, bekerja sama dengan teman akan memudahkan Anda memahami dan menyelesaikan soal-soal.
   d. *Mandiri*

      Saat evaluasi, bersikaplah mandiri sehingga Anda bisa mengetahui sejauh mana Anda memahami materi dan mengaplikasikan materi yang diperoleh dalam soal-soal.

e. *Aktif dan Kreatif*

Anda harus aktif dalam pembelajaran dan Anda juga bisa berkreasi dengan membuat contoh sendiri dari materi yang dipelajari.

PETA KONSEP



Integral Tak Tentu

A. Kompetensi Inti :

3. Memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi tentang pengetahuan factual, konseptual, procedural, dan metakognitif sesuai dengan bidang dan lingkup kajian matematika pada tingkat teknis, spesifik, detil, dan kompleks, berkenaan dengan ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dalam konteks pengembangan potensi diri sebagai bagian dari keluarga, sekolah, dunia kerja, warga masyarakat nasional, regional, dan internasional
4. Melaksanakan tugas spesifik dengan menggunakan alat, informasi, dan prosedur kerja yang lazim dilakukan serta memecahkan masalah sesuai dengan bidang kajian Matematika

   Menampilkan kinerja di bawah bimbingan dengan mutu dan kuantitas yang terukur sesuai dengan standar kompetensi kerja

   Menunjukkan ketrampilan menalar, mengolah, dan menyaji secara efektif, kreatif, produktif, kritis, mandiri, kolaboratif, komunikatif, dan solutif dalam ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah serta mampu melaksanakan tugas spesifik di bawah pengawasan langsung

   Menunjukkan ketrampilan mempersepsi, kesiapan, meniru, membiasakan, gerak mahir, menjadikan gerak alami dalam ranah konkret terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah, serta mampu melaksanakan tugas spesifik di bawah pengawasan langsung

B. Kompetensi Dasar

3.33 Menentukan nilai integral tak tentu dan tertentu fungsi aljabar

4.33 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu dan tertentu fungsi aljabar

C. Indikator Pencapaian Kompetensi

3.33.1 Menentukan hasil integral tak tentu dari fungsi aljabar.

4.33.1 Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan integral tak tentu.

D. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai pembelajaran, diharapkan siswa dapat :

- Menemukan konsep integral tak tentu
- Memahami notasi integral
- Menganalisis sifat dasar integral tak tentu
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu fungsi aljabar

.

MATERI MODUL
INTEGRAL TAK TENTU

A. Definisi Integral Tak Tentu

Ilustrasi "Jika saya *mengenakan* sepatu, kemudian saya *melepasnya* lagi ". Operasi yang *kedua* menghapuskan yang *pertama*, mengembalikan sepatu pada posisinya yang semula. Kita katakan dua operasi tersebut adalah *operasi balikan* (*invers*). Matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan : *penambahan* dan *pengurangan*, *perkalian* dan *pembagian*, *pemangkatan* dan *penarikan akar*, serta *penarikan logaritma* dan *penghitungan logaritma*. Kalian pada waktu kelas XI telah mempelajari *pendiferensialan* (penurunan); balikannya disebut ***anti pendiferensialan.*** **(** ***integral tak tentu*** **)**.

Kalian ingat kembali pada waktu *di kelas XI*, saat belajar tentang suatu benda yang bergerak lurus, jika persamaan gerak diketahui, maka *kecepatan* sesaatnya dapat dicari, demikian pula *percepataan* sesaatnya.

Andaikan persamaan gerak itu $S_t = f(t)$, maka kecepatan sesaat adalah $V_t = f'(t)$, dan percepatan sesaat adalah $a_t = f''(t)$. Sebagai contoh , jika persamaan gerak lurus adalah $S_t = t^3 + 2t^2 + 5t$, maka *kecepatan* sesaatnya adalah $V_t = 3t^2 + 4t + 5$ dan *Percepatan* sesaatnya adalah $a_t = 6t + 4$.

Sebaliknya , jika diketahui rumus percepatan sesaat atau kecepatan sesaat dari suatu gerak lurus, bagaimanakah cara menentukan persamaan gerak itu ? Persoalan ini adalah persoalan mencari f (t) jika diketahui f'' (t) atau f' (t), atau mencari suatu fungsi yang diketahui turunannya atau derivatifnya. Dari contoh tadi dapat ditebak bahwa $S_t = t^3 + 2t^2 + 5t$ jika $V_t = 3t^2 + 4t + 5$, dan dapat pula ditebak bahwa $S_t = t^3 + 2t^2 + 5t$ jika $a_t = 6t + 4$.

Tetapi akan segera kita ketahui bahwa S_t tebakan kita itu hanyalah salah satu dari banyak kemungkinan untuk S_t.

Marilah kita perhatikan contoh - contoh berikut :

$f_1(t) = t^3 + 2t^2 + 5t \rightarrow f_1'(t) = 3t^2 + 4t + 5$

$f_2(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 7 \rightarrow f_2'(t) = 3t^2 + 4t + 5$

$f_3(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 9 \rightarrow f_3'(t) = 3t^2 + 4t + 5$

$f_4(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 9 \rightarrow f_4'(t) = 3t^2 + 4t + 5$

Tampak bahwa $f'(t) = 3t^2 + 4t + 5$ menentukan lebih dari satu $f(t)$.

Jadi jika ditentukan bahwa pada suatu gerak lurus, kecepatan sesaatnya pada sebarang saat t adalah $V_t = 3t^2 + 4t + 5$, maka persamaan geraknya *belum tertentu*; salah satu persamaan geraknya yang mungkin adalah $S_t = t^3 + 2t^2 + 5t$, kemungkinan lain masih banyak.

Karena persoalan kita sekarang adalah persoalan mencari suatu fungsi yang *ditentukan turunannya*, maka kita perlu memberikan nama kepada fungsi F yang turunannya f. Untuk lengkapnya disini diberikan secara terpisah definisi antiturunan.

Definisi (1.1)

Antiturunan atau antiderivatif dari fungsi f ialah F yang bersifat bahwa F' = f

Jika f ialah fungsi dari variable x maka yang disebut anti turunan atau antiderivatif dari f (x) ialah F (x) yang bersifat bahwa :

$$F'(x) = f(x).$$

Proses penentuan turunan suatu fungsi atau proses penentuan f' dari f atau penentuan f' (x) dari f (x) disebut *pendeferensialan* atau *diferensiasi*.

Hasil pendiferensialan disebut *derivative* atau *hasil bagi diferensial*. Sebaliknya , penentuan antiturunan suatu fungsi, yaitu penentuan f disebut juga *pengintegralan* atau *integrasi* . Hasil pengintegralan suatu fungsi lazim disebut *integral fungsi* .

B. Sifat - Sifat Integral Tak Tentu

Untuk memahami sifat - sifat dasar integral, marilah kita perhatikan tinjauan berikut ini. Kita gunakan lambang (a,b) untuk menyatakan selang terbuka antara a dan b, dan lambang $[a,b]$ untuk menyatakan selang tertutup antara a dan b dengan pengertian bahwa a < b.

Sifat (1.2)

Jika f' (x) = 0 untuk setiap x anggota x $\in (a,b)$, maka ada konstanta c yang bersifat bahwa f (x) = c untuk setiap x $\in (a,b)$. Untuk fungsi f, g, h, yang bersifat bahwa f (x) = g (x) - h (x), apabila ketiga fungsi itu dapat diturunkan, maka f ' (x) = g ' (x) - h ' (x). Berdasarkan sifat (1.2) jika g' (x) = h' (x) untuk setiap x dalam selang (a,b) maka ada konstanta c sedemikian sehingga g (x) - h (x) = c untuk setiap x $\in (a,b)$. Hasil ini sangat penting sehingga lazim ditetapkan sebagai dalil atau teorema, yang dapat dirumuskan sebagai berikut.

Teorema (1.3)

Apabila g dan h adalah fungsi yang bersifat bahwa g' (x) = h' (x) untuk setiap x $\in (a,b)$, maka ada konstanta c sedemikian sehingga

g (x) = h (x) + c untuk setiap x $\in (a,b)$.

Teorema (1.3) tersebut menunjukan bahwa suatu fungsi mempunyai tak berhingga banyaknya antiturunan, yang satu sama lain hanya berbeda suku konstanta. Hal ini sesuai dengan contoh - contoh dimuka. Berdasarkan teorema (1.3) itu dapatlah disimpulkan bahwa antiturunan dari suatu fungsi selalu berbentuk F (x) + c, dengan pengertian bahwa suku c menyatakan konstanta sebarang.

Teorema Akibat (1.4)

Jika F (x) merupakan suatu antiturunan dari f (x), maka *bentuk umum antiturunan* atau *bentuk umum integral f (x)* adalah *F (x) + c* dengan ketentuan bahwa c adalah konstanta. Bentuk umum antiturunan dari f (x) dinyatakan dengan $\int f(x)\, dx$

Jika fungsi f adalah turunan dari F, maka $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, dengan pengertian bahwa c menyatakan konstanta sebarang,

$\int f(x)\,dx$ disebut juga ***integral tak tentu*** dari **f (x)**

Contoh :

1. $\int 2dx = 2x + c$
2. $\int 3x^2 dx = x^3 + c$
3. $\int (x^2 + 3x - 5)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c$

C. Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

Teorema (1.5) (Aturan Pangkat)

Jika n adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\boxed{\int 1dx = x + c}$$

Teorema (1.6) (Kelinearan dari ∫ . . . dx).

Andaikan f dan g mempunyai anti turunan (Integral Tak Tentu) dan andaikan k suatu konstanta, maka :

(i) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(ii) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; dan akibatnya

(iii) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Contoh :

A. Integralkan !

1. 6
2. x^2
3. $8x^3$
4. $\frac{-6}{x^4}$

Penyelesaian

1. $\int 6dx = 6x + c$ Teorema (1.5)

2. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ Teorema (1.5)

3. $\int 8x^3 dx = 8\int x^3 dx$ Teorema (1.6) (i)

$=8.\frac{1}{4}x^4 + c$ Teorema (1.5)

$=2x^4 + c$

4 $\int \frac{-6}{x^4}dx = \int -6x^{-4}dx$ dari pangkat positif diubah ke dalam pangkat negatif

$\int -6x^{-4}dx = -6\int x^{-4}dx$ teorema (1.6) (i)

$= -6.\frac{1}{-3}x^{-3} + c$

$= 2x^{-3} + c$

$= \frac{2}{x^3} + c$ pangkat negatif diubah kedalam pangkat positif

B. Tentukan Integral dari :

1. $\int (4 - 4x^3)dx$ 2. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2}dx$

Penyelesaian

1. $\int (4 - 4x^3)dx = \int 4dx - \int 4x^3 dx$ Teorema (1.6) (iii)

$= 4x - 4\int x^3 dx$ Teorema (1.6) (i)

$= 4x - 4.\frac{1}{4}x^4 + c$

$= 4x - x^4 + c$

2. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2}dx = \int (x^2 + 1)x^{-2}dx$ Pangkat positif diubah pada pangkat negatif

$= \int (1 + x^{-2})dx$ Sifat distributif

$= \int 1dx + \int x^{-2}dx$ Teorema (1.6) (ii)

$= x + \frac{1}{-1}x^{-1} + c$

$= x - \frac{1}{x} + c$

Latihan Soal 1

Dengan mempelajari uraian dimuka, Kalian diharapkan memperoleh pengertian yang baik tentang konsep integral tak tentu. Kerjakan soal - soal ini secara individual, apabila ada masalah, kerjakan dengan kelompok belajarnya, Selanjutnya kalian dipersilahkan mengerjakan latihan berikut ini.

Pilihlah salah satu jawaban yang kalian anggap paling tepat !

1. Hasil dari $3\int xdx = \ldots$

   A. $x + c$ B. $3x + c$ C. $\frac{3}{2}x^2 + c$ D. $\frac{1}{3}x^3 + c$ E. $x^3 + c$

2. Hasil dari $\int \frac{3}{x^5}dx = \ldots$

   A. $-\frac{3}{x^6} + c$ B. $-\frac{3}{x^5} + c$ C. $-\frac{4}{3x^4} + c$

   D. $-\frac{3}{4x^4} + c$ E. $-\frac{3}{t^4} + c$

3. Hasil dari $\int x^{\frac{1}{3}}dx = \ldots$

   A. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$ B. $x^{\frac{4}{3}} + c$ C. $\frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}} + c$

   D. $x^{\frac{-2}{3}} + c$ E. $\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}} + c$

4. Hasil dari $\int x^3\sqrt{x}dx = \ldots$

   A. $\frac{2}{9}x^4\sqrt{x} + c$ B. $9x^4\sqrt{x} + c$ C. $\frac{9}{2}x^4\sqrt{x} + c$

D. $\frac{1}{9}x^4\sqrt{x}+c$ E. $x^4\sqrt{x}+c$

5. Hasil dari $\int(2x+4)dx=\ ...$

A. x^2+4x+c B. $2x^2+4x+c$ C. x^2+x+c

D. $2x^2+8x+c$ E. 2

6. Hasil dari $\int(4x-3x^2)dx=...$

A. $4x^2 - x^3 + c$ B. $2x^2 - x^3 + c$ C. $2x^2 - 3x^3 + c$

D. $x^4 - x^3 + c$ E. $2x^4 - 2x^3 + c$

7. Hasil dari $\int(4x^3-3x^2+6x-1)dx=...$

A. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + c$ B. $x^4 - x^3 + 3x^2 - x + c$

C. $4x^4 - x^3 + 6x^2 - x + c$ D. $4x^4 - x^3 + 3x^2 - x + c$

E. $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + c$

8. Hasil dari $\int(x^{\frac{3}{2}}-x)dx=...$

A. $x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^2+c$ B. $x^{\frac{5}{2}}-2x^2+c$

C. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^2+c$ D. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^2+c$

E. $x^{\frac{5}{2}}-x^2+c$

9. Hasil dari $\int(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})dx=...$

A. $2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$ B. $x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$ C. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

D. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+c$ E. $x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{6}x^{\frac{3}{2}}+c$

10. Hasil dari $\int\frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x}}dx=...$

A. $x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}+c$ B. $x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+c$

C. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}+c$

D. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+c$

E. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}+c$

D. Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

Pada waktu kalian duduk di Kelas XI, kalian telah belajar mengenai turunan fungsi trigonometri, untuk mempermudah cara memahami integral tak tentu fungsi trigonometri, alangkah baiknya kalian ingat - ingat kembali materi pelajaran tersebut.

Jika f (x) = sin x → f ' (x) = cos x

Jika f ' (x) = cos x → f (x) = sin x + c, kenapa ?

sebab anti turunan itu operasi balikan (invers) dari turunan, teorema akibat (1.4), sehingga anti turunan dari cos x dapat ditulis dengan

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

Dengan cara yang sama, untuk mendapatkan anti turunan atau integral tak tentu dari sin x adalah sebagai berikut ;

Jika f (x) = cos x → f ' (x) = - sin x

Jika f ' (x) = sin x → f (x) = - cos x + c

dengan demikian anti turunan dari sin x dapat ditulis

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

Dengan cara yang sama pula dapat ditentukan anti turunan untuk $\sec^2 x$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

Untuk lebih jelasnya silahkan kalian ikuti dan pelajari contoh - contoh soal berikut ini

Contoh ;

A. Integralkanlah !

1. cos x
2. 2cos x
3. 1 + cos x
4. sin x
5. 4sin s
6. 4 - sin x

Penyelesaian

1. $\int \cos x dx = \sin x + c$
2. $\int 2\cos x dx = 2\sin x + c$
3. $\int (1+\cos x) dx = x + \sin x + c$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
5. $\int 4\sin x dx = -4\cos x + c$
6. $\int (4-\sin x) dx = 4x + \cos x + c$

Latihan Soal 2

Dengan mempelajari uraian dimuka, Kalian diharapkan memperoleh pengertian yang baik tentang konsep integral tak tentu fungsi trigonometri. Kerjakan soal - soal ini secara individual, apabila ada masalah, kerjakan dengan kelompok belajarnya. Selanjutnya kalian dipersilahkan mengerjakan latihan berikut ini.

<u>Pilihlah salah satu jawaban yang kalian anggap benar !</u>

1. Hasi l dari $\int 3\sin x dx = \ldots$

   A. $\frac{3}{2}\sin^2 x + c$ B. 3cos x C. $\frac{3}{2}\cos^2 x + c$

   D. -3cos x + c E. $-\frac{1}{3}\cos x + c$

2. Hasil dari $\int -\sin x dx = \ldots$

   A. - cos x + c B. cos x + c C. $-\frac{1}{2}\sin^2 x + c$

   D. $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ E. $-\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

3. Hasil dari $\int 3\cos x dx = \ldots$

   A. 3sin x + c B. 3cos x + c C. $\frac{1}{3}\sin x + c$

   D. -3sinx + c E. -3cos x + c

4. Hasil dari $\int (1 - \sin x) dx = \ldots$

A. cos x + c B. x - xsinx + c C. x - xcosx + c

D. x + cos x + c E. cos x + c

5. Hasil dari $\int (1 - \cos x) dx = \ldots$

A. -sin x + c B. x - cos x + c C. x + x cos x + c

D. x - sin x + c D. x + x sin x + c

6. Jika f (x) = 4cos x - 1, maka $\int f(x) dx = \ldots$

A. 4sin x - 1 + c B. 4sin x - x + c C. $\frac{1}{4}\sin x - x + c$

D. $-\frac{1}{4}\sin x - x + c$ E. -4sin x - 1 + c

7. Hasil dari $\int (4\cos x - 3\sin x) dx = \ldots$

A. 4sin x - 3cos x + c B. -4sin x + 3cos x + c

C. 4sin x + 3cos x + c D. -4sin x - 3cos x + c

E. -4sin x + 4cos x + c

8. Hasil dari $\int 2\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2} x dx = \ldots$

A. sin x + c B. cos x + c C. -sin x + c

D. -cos x + c E. 2cos x + c

9. Hasil dari $\int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \ldots$

A. 2cos x + c B. 2sin x + c C. sin x + cos x + c

D. 2sin x cos x + c E. x + c

10. $\int 2d(\sin x) = \ldots$

A. 2cos x + c B. -2cos x + c C. 2sinx cos x + c

D. 2sin x + c E. sin x + c

E. Penerapan Integral Tak Tentu

Integral tak tentu dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa macam persoalan, misalnya : Persoalan menentukan *persamaan kurva*, persoalan gerak *kecepatan - percepatan*, persoalan *arus listrik*. Persoalan menentukan persamaan kurva diselesaikan, antara lain berdasarkan sifat bahwa pada grafik dari y = f (x) adanya *gradien garis singgung* (x_o, y_o) adalah $f'(x_o)$. Persoalan gerak kecepatan - percepatan diselesaikan antara lain berdasarkan hubungan antara jarak yang telah ditempuh setelah t satuan waktu, kecepatan sesaat, dan percepatan sesaat pada gerak lurus, yaitu

$$s(t) = \int v(t)\,dt \text{ dan } v(t) = \int a(t)\,dt.$$

Macam - macam Penggunaan Integral Tak Tentu

1. Persoalan Menentukan Persamaan kurva

   Turunan suatu fungsi menunjukan gradien garis singgung pada grafik fungsi itu di titik yang bersangkutan. Sebaliknya jika diketahui turunan fungsi f ditambah dengan diberikannya beberapa syarat tambahan fungsi itu, maka dapat menghasailkan kurva yang menjadi grafik fungsi f itu.

   Contoh :

   Carilah persamaan kurva yang melalui titik T (2,3) dan yang di sebarang titik P (x, y) sama dengan dua kali absis titik P itu.

   Penyelesaian :

   Misalkan persamaan kurva itu y = f (x),

   Diketahui $\frac{dy}{dx} = 2.x$. maka $y = \int 2x\,dx$

   $y = x^2 + c$, karena kurva melalui titik T (2,3)

   maka $3 = (2)^2 + c$

   $c = -1$

   jadi kurva yang ditanyakan adalah $y = x^2 - 1$

2. Persoalan Gerak Lurus

Ingat kembali bahwa jika s (t), v (t), dan a (t) masing-masing menyatakan posisi, kecepatan, dan percepatan, pada saat t dari suatu benda yang bergerak sepanjang garis koordinat, maka

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Pada waktu kalian di kelas XI, unsur yang di ketahuinya s (t) dan dari situ kita menghitung v (t) dan a (t). Sekarang kita bermaksud proses kebalikannya.

Contoh :

Sebuah peluru ditembakan gerak lurus ke atas dengan kecepatan letup 300 m / dt. Berapakan kecepatan peluru itu pada jarak 2500 meter di atas titik awalnya ?

Penyelesaian :

Dianggap bahwa gesekan atau tekanan udara diabaikan, dan percepatan gravitasi 10 m / dt^2 maka :

$\frac{dv}{dt} = -10$ (karena arah ke bawah)

$v(t) = \int -10\,dt$

$v(t) = -10t + c$

$v(0) = 300$, maka $c = 300$

$v(t) = -10t + 300$

$\frac{ds}{dt} = -10t + 300$

$s(t) = \int (-10t + 300)\,dt$

$s(t) = -5t^2 + 300t + c$

pada saat $t = 0$, $s(0)$ maka $c = 0$

Jadi $s(t) = -5t^2 + 300t$, pada jarak $s(t) = 2500$

$2500 = -5t^2 + 300t$

$5t^2 - 300t + 2500 = 0$

$t^2 - 60t + 500 = 0$

$(t - 10)(t - 50) = 0$

$t_1 = 10$ detik dan $t_2 = 50$ detik

untuk t = 10 → v (10) = -10. 10 + 300 = 200 m / dt

untuk t = 50 → v (50) = -10. 50 + 300 = - 200 m / dt

Jadi setelah 10 detik diletupkan, peluru ada pada jarak 2500 meter diatas titik awal. Pada saat 50 detik setelah diletupkan peluru juga ada pada jarak 2500 meter di atas titik awal, dengan kecepatan 200 m / dt (tanda negeatif menunjukan arah yang berlawanan / arah ke bawah).

Latihan Soal 3

Selesaikan permasalahan berikut!

1. Gradien garis singgung di tiap titik (x, y) sebuah kurva ditentukan oleh rumus $\frac{dy}{dx} = 3x(2-x)$, jika kurva tersebut melalui titik (-1, 10), tentukan persamaan kurvanya
2. Tentukan fungsi F, jika diketahui F' = 1 - 2x dan F (3) = 4
3. Sebuah benda bergerak dari keadaan diam. Kecepatan v m/dt benda tersebut ditentukan oleh rumus v = $\int (t^2 + 2t)dt$, dimana t lamanya waktu dalam detik yang ditempuh setelah benda mulai bergerak. Tentukan sebuah rumus untuk v yang dinyatakan dengan t. Gunakan rumus itu untuk menentukan kecepatan benda tersebut setelah 3 detik.

Soal Evaluasi

1. Selesaikan integral-integral tak tentu berikut ini
   a. $\int \left(2x^3\right) dx$

b. $\int\left(3x^2-3x+7\right)dx$

c. $\int\left(\frac{1}{4}x^4+2x^3+3\right)dx$

d. $\int\left(5x^3+10x^2+3x+\frac{1}{4}\right)dx$

2. Tentukanlah fungsi g(t), jika diketahui:
   a. $g'(t)=3t^2+8t-1$ dan $g(2)=5$
   b. $g'(t)=6t^2+4t+1$ dan $g(1)=5$

KRITERIA KEBERHASILAN

Rumus :

Tingkat penguasaan = $\frac{\text{Jumlah Skor}}{60}$ x 100%

Arti tingkat penguasaan :

90 % - 100 %	= baik sekali
80 % - 89 %	= baik
70 % - 79 %	= cukup
< 70 %	= kurang

Apabila tingkat penguasaan kalian mencapai ≥ KKM, kalian berhasil dan akan lebih mudah untuk mengikuti pembelajaran berikutnya, Ok ! Tetapi apabila tingkat penguasaan di bawah KKM, kalian masih harus mengulang kembali

RANGKUMAN

a. Operasi balikan (invers) dari *turunan* adalah *integral tak tentu*
b. Lambang integral dinotasikan dengan $\int$, lambang tersebut pertama kalinya diperkenalkan oleh *Leibniz*
c. $\int$ f (x) dx dibaca " *Integral f (x) dx* " atau " *integral dari f (x) terhadap x* "
d. Rumus - Rumus TAk tentu fungsi Aljabar

1) $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$, $n \in bilangan$ rasional dan $n \neq -1$

2) $\int k dx = kx + c$, k adalah konstanta

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k adalah konstanta

4) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

e. Rumus - Rumus Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

1. $\int \cos x dx = \sin x + c$
2. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

f. Sifat - Sifat kelinearannya integral tak tentu fungsi trigonometri sama dengan integral tak tentu fungsi aljabar, yaitu ;

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, dengan k adalah konstanta
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

dengan f (x) dan g (x) adalah fungsi trigonometri

g. Rumus - Rumus kesamaan trigonometri ;

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
3. - $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
   - $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
   - $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

h. Penerapan integral tak tentu diantaranya untuk ;

- Menentukan persamaan kurva atau fungsi.

  Persamaan kurva dapat dicari bila turunan dan titik yang dilalui kurva tersebut diketahui

- Menentukan persamaan gerak suatu benda

  Lintasan gerak suatu benda s (t) dapat dicari bila kecepatan atau percepatan dan waktunya di ketahui

  $s(t) = \int v(t)dt$ $\qquad$ $v(t) = \int a(t)dt$

KUNCI JAWABAN

A. **Latihan Soal** 1

1. C
2. D
3. A
4. A
5. A
6. B
7. B
8. C
9. A
10. C

B. **Latihan Soal** 2

1. D
2. B
3. A
4. D
5. D
6. B
7. C
8. D
9. E
10. D

C. **Latihan Soal** 3

1. Diketahui; $\frac{dy}{dx} = 3x(2 - x)$ dan titik yang dilalui kurva (-1, 10)

   Ditanyakan; *persamaan kurva*

   $\frac{dy}{dx} = 3x(2 - x)$ $\rightarrow$ y = $\int 3x(2 - x)dx$

   y = $\int (6x - 3x^2)dx$

   y = $3x^2 - x^3 + c$, kurva melalui (-1, 10)

   substitusikan (-1, 10) ke persamaan kurva y = $3x^2 - x^3 + c$

   $10 = 3(-1)^2 - (-1)^3 + c$

   $10 = 3.1 - (-1) + c$

$$10 = 3 + 1 + c$$

$$c = 6$$

maka persamaan kurvanya adalah $y = 6 + 3x^2 - x^3$

2. Diketahui; F' = 1 - 2x dan F (3) = 4

   ditanyakan; *fungsi F*

   $F'(x) = 1 - 2x$

   $F(x) = \int (1-2x)dx$

   $F(x) = x - x^2 + c$, karena F (3) = 4 maka

   $F(3) = 3 - (3)^2 + c = 4$

   $3 - 9 + c = 4$

   $-6 + c = 4$

   $c = 10$

   maka fungsinya adalah $F(x) = x - x^2 + 10$ atau

   $F(x) = 10 + x - x^2$

3. $v = \int (t^2 + 2t)dt$

   $v = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + c$

   pada saat t = 0 maka v = 0 (benda diam)

   t = 0 dan v = 0 substitusikan ke $v = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + c$, maka

   $$0 = \frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2 + c$$

   $$c = 0$$

   sehingga rumus *kecepatan*, $v = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2$, untuk menentukan kecepatan pada saat t = 3, substitusikan t = 3 ke rumus kecepatan

   $v = \frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2$

$v = 9 + 18 \rightarrow v = 27$

Kecepatan benda pada saat 3 detik adalah 27m/dt

D. Soal Evaluasi

PENSKORAN

No	Soal	KunciJawaban	skor
1	a. $\int\left(2x^3\right)dx$ b. $\int\left(3x^2-3x+7\right)dx$ c. $\int\left(\frac{1}{4}x^4+2x^3+3\right)dx$ d. $\int\left(5x^3+10x^2+3x+\frac{1}{4}\right)dx$	a. $\frac{2}{4}x^4+c$ b. $\frac{3}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7x+c$ c. $\frac{\frac{1}{4}}{5}x^5+\frac{2}{4}x^4+3x+c=\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{2}x^4+3x+c$ d. $=\frac{5}{4}x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x+c$	10 10 10 10
2	Tentukanlah fungsi g(t), jika diketahui: a. $g'(t)=3t^2+8t-1$ dan $g(2)=5$ b. $g'(t)=6t^2+4t+1$ dan $g(1)=5$	a. $g(t)=\int g'(t)dt=\int(3t^2+8t-1)dt$ $=3t^3+4t^2-t+c$ $g(2)=5$ $3(2)^3+4(2)^2-2+c=5$ $24+16-2+c=5$ $38+c=5$ $c=5-38$ $c=-33$ Jadi $g(t)=3t^3+4t^2-t-33$ b. $g(t)=\int(6t^2+4t+1)dt=2t^3+2t^2+t+c$ $g(1)=5$ $2(1)^3+2(1)^2+1+c=5$ $5+c=5$ $c=0$ Jadi $g(t)=2t^3+2t^2+t$	15 15
JUMLAH SKOR			60

REFERENSI

Buku Matematika Pegangan Guru Kelas XII. 2015. Jakarta.Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.

Buku Matematika Pegangan Siswa Kelas XII.2015.Jakarta. Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia

BPPTKPU. 2010. *Bahan Ajar Mandiri*. Bandung : Balai Pelatihan Pendidikan Tenaga Kependidikan Umum. Provinsi Jawa Barat

Kasmina dkk. 2008. Matematika 3. Jakarta: Erlangga

Purcell, E.J. 1990. *Integral dan Geometri Analitis*. Jilid 1. (edisi ke 4) (Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, & Rawuh). Jakarta : Erlangga

Soemartojo, N. dkk.. 1992 . *Integral II*. Jakarta : Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Setiawan, T. dkk.. 2007. *Seri Integral* 1000 Bank Soal SMA/MA Bandung : Yrama Widya

Tampomas Husein.2008. Seribupena Matematika SMA Kelas XII. Jakarta : Erlangga