

MODUL 2

RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS



Penulis

Ade Jajang Jaelani, S.Pd

Deskripsi

Modul bahan ajar ini merupakan pelengkap dari buku Matematika Umum kelas XI Peminatan IPA. Modul ini disusun dengan tujuan agar Anda bisa mendapatkan panduan pembelajaran mandiri. Modul ini menyediakan materi terkait mata pelajaran, panduan contoh soal yang dilengkapi penyelesaian, uji kompetensi, dan rangkuman materi.

Prasyarat

Modul ini akan mengajak Anda mengenal materi rumus jumlah dan selisih trigonometri yang terdiri dari rumus perkalian sinus dan cosinus dan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

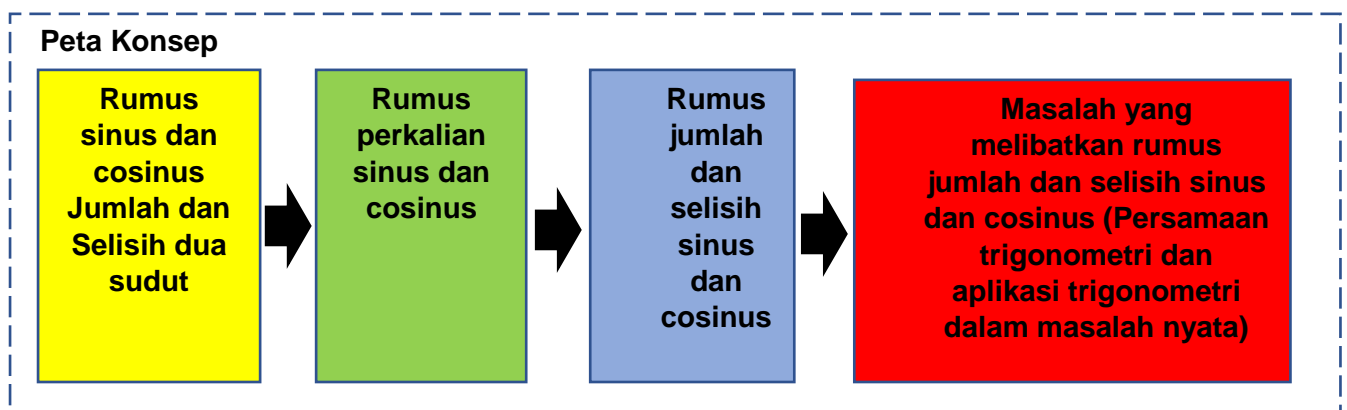
Panduan Belajar

No KD	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	Alokasi Waktu
3.2.	Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus	3.2.18. Menyatakan hubungan antara rumus sinus, cosinus jumlah dan selisih dua sudut dalam perkalian sinus dan cosinus. 3.2.19. Membuktikan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.20. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.21. Membuktikan rumus jumlah dan selisih sinus, menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.22. Membuktikan rumus jumlah dan selisih cosinus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.23. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus 3.2.24. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih cosinus 3.2.25. Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam menyelesaikan 3.2.26. Menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri dengan	8 x 45'

No KD	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	Alokasi Waktu
		menggunakan jumlah dan selisih sinus dan cosinus Menganalisis rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam penerapannya pada masalah nyata	
4.2	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus	4.2.1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus 4.2.2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.3. Menyelesaikan masalah berkaitan persamaan trigonometri yang berkaitan jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.4. Menyelesaikan permasalahan nyata yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus.	

Halo semuanya, bagaimana kabarnya? Semoga kabar baik. Selamat bertemu pada modul Jumlah dan selisih sinus dan cosinus. Modul ini yang akan mengantarkan Anda untuk dapat menguasai kompetensi, baik pengetahuan, keterampilan, maupun sikap sesuai dengan kurikulum 2013. Dalam modul ini terdiri dari beberapa kegiatan belajar diantaranya:

1. Kegiatan Belajar 1: Rumus perkalian sinus dan cosinus
2. Kegiatan Belajar 2: Rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus
3. Kegiatan Belajar 3: Persamaan Trigonometri & masalah yang melibatkan trigonometri



Kegiatan Belajar 2

RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS



“Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan, maka yakinlah bahwa Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau.”

Indikator Pencapaian Kompetensi

Pengetahuan :

- 3.2.18. Membuktikan rumus jumlah dan selisih sinus, menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus
- 3.2.19. Membuktikan rumus jumlah dan selisih cosinus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus
- 3.2.20. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus
- 3.2.21. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih cosinus
- 3.2.22. Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam menyelesaikan

Keterampilan :

- 4.2.6 Terampil dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

Selamat datang peserta didik pada modul pembelajaran mandiri. Pada kegiatan belajar 2 ini, Anda akan mempelajari rumus perkalian sinus dan cosinus

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar 2, Anda sebagai peserta didik dapat:

1. Setelah melakukan kegiatan pembelajaran dengan penemuan melalui pengerjaan LKPD, peserta didik dapat membuktikan rumus jumlah dan selisih sinus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus dengan tepat

2. Setelah melakukan kegiatan pembelajaran dengan penemuan melalui pengerjaan LKPD, peserta didik dapat membuktikan rumus jumlah dan selisih cosinus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus dengan tepat
3. Setelah melakukan kegiatan diskusi kelompok, peserta didik dapat Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus dengan benar
4. Setelah melakukan kegiatan diskusi kelompok, peserta didik dapat menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih cosinus dengan benar
5. Setelah melakukan kegiatan diskusi kelompok dalam mengerjakan LKPD, peserta didik dapat membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam menyelesaikan dengan benar
6. Setelah melakukan kegiatan diskusi, peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus dengan benar

Setelah melakukan kegiatan diskusi, peserta didik dapat menyelesaikan masalah untuk mencapai tujuan pembelajaran di atas, langkah pertama silakan Anda pelajari dan pahami uraian materi berikut.



Uraian Materi

1. Rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

A. Pembuktian rumus $\sin x + \sin y$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$$

Untuk rumus perkalian (1), kita misalkan $\alpha + \beta = x$ dan $\alpha - \beta = y$

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta = x & & \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y & & \alpha - \beta = y \\ \hline \alpha = \frac{x + y}{2} & + & \beta = \frac{x - y}{2} \end{array}$$

Selanjutnya kedua persamaan disubstitusikan kedalam rumus perkalian:

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$$

sehingga diperoleh rumus penjumlahan sinus

$$2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) = \sin x + \sin y$$

Rumus sin x + sin y

Rumus sin x + sin y merupakan rumus penjumlahan antara sin yang diperoleh dari penjumlahan dua sudut sin. Bentuk rumus penjumlahan sin x + sin y adalah sebagai berikut :

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)$$

Contoh Soal 2.1.

Nyatakanlah bentuk sin 8x + sin 4x dalam bentuk perkalian.

Jawab :

$$\begin{aligned} \sin 8x + \sin 4x &= 2 \sin \frac{1}{2}(8x+4x) \cos \frac{1}{2}(8x-4x) \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}(12x) \cos \frac{1}{2}(4x) \\ &= 2 \sin 6x \cos 2x \end{aligned}$$

Tentukanlah nilai dari sin 105° + sin 15°

Jawab :

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{1}{2}(105^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(105^\circ - 15^\circ) \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}(120^\circ) \cos \frac{1}{2}(90^\circ) \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6} \end{aligned}$$

B. Pembuktian sin x – sin y

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

Untuk rumus perkalian (1), kita misalkan $\alpha + \beta = x$ dan $\alpha - \beta = y$

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \\ \hline \alpha = \frac{x+y}{2} \end{array} + \begin{array}{r} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \\ \hline \beta = \frac{x-y}{2} \end{array} -$$

Selanjutkan kedua persamaan disubstitusikan kedalam rumus perkalian:

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$$

sehingga diperoleh rumus penjumlahan sinus

$$2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y) = \sin x - \sin y$$

Rumus sin x - sin y

Rumus $\sin x - \sin y$ merupakan rumus pengurangan antara sin yang diperoleh dari pengurangan dua sudut sin. Bentuk rumus pengurangan $\sin x + \sin y$ adalah sebagai berikut :

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y)$$

Contoh Soal 2.2.

Nyatakanlah bentuk $\sin 3\alpha + \sin \alpha$ dalam bentuk perkalian.

Jawab :

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha + \sin \alpha &= 2 \cos \frac{1}{2}(3\alpha + \alpha) \sin \frac{1}{2}(3\alpha - \alpha) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(4\alpha) \sin \frac{1}{2}(2\alpha) \\ &= 2 \cos 2\alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

Tentukanlah nilai dari $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

Jawab :

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \cos \frac{1}{2}(75^\circ + 15^\circ) \sin \frac{1}{2}(75^\circ - 15^\circ) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(90^\circ) \sin \frac{1}{2}(60^\circ) \\ &= 2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

C. Pembuktian Rumus $\cos x + \cos y$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$

Untuk rumus perkalian (1), kita misalkan $\alpha + \beta = x$ dan $\alpha - \beta = y$

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta = x & & \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y & & \alpha - \beta = y \\ \hline \alpha = \frac{x + y}{2} & + & \beta = \frac{x - y}{2} \end{array}$$

Selanjutnya kedua persamaan disubstitusikan ke dalam rumus perkalian:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$

sehingga diperoleh rumus penjumlahan sinus

$$2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y) = \cos x + \cos y$$

Rumus $\cos x + \cos y$

Rumus $\cos x + \cos y$ merupakan rumus penjumlahan antara \cos yang diperoleh dari penjumlahan dua sudut \cos . Bentuk rumus penjumlahan $\cos x + \cos y$ adalah sebagai berikut :

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$$

Contoh Soal 2.3.

Nyatakanlah bentuk $\cos (2x + y) + \cos (2x - y)$ dalam bentuk perkalian.

Jawab :

$$\begin{aligned} \cos (2x + y) + \cos (2x - y) &= 2 \cos \frac{1}{2}((2x + y) + (2x - y)) \cos \frac{1}{2}((2x + y) - (2x - y)) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(4x) \cos \frac{1}{2}(2y) \\ &= 2 \cos 2x \cos y \end{aligned}$$

Tentukanlah nilai dari $\cos \frac{5}{12} \pi + \cos \frac{1}{12} \pi$

Jawab :

$$\begin{aligned} \cos \frac{5}{12} \pi + \cos \frac{1}{12} \pi &= 2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{5}{12} \pi + \frac{1}{12} \pi \right) + \cos \frac{1}{2} \left(\frac{5}{12} \pi - \frac{1}{12} \pi \right) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi \right) + \cos \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \pi \right) \\ &= 2 \cos \frac{1}{4} \pi + \cos \frac{1}{6} \pi \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6} \end{aligned}$$

D. Pembuktian Rumus $\cos x - \cos y$

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)$$

Untuk rumus perkalian (1), kita misalkan $\alpha + \beta = x$ dan $\alpha - \beta = y$

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \\ \hline \alpha = \frac{x + y}{2} \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \\ \hline \beta = \frac{x - y}{2} \end{array} .$$

Selanjutnya kedua persamaan disubstitusikan kedalam rumus perkalian:

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)$$

sehingga diperoleh rumus penjumlahan sinus

$$-2 \sin \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{1}{2} (x - y) = \cos x - \cos y$$

Rumus $\cos x - \cos y$

Rumus $\cos x - \cos y$ merupakan rumus penjumlahan antara \cos yang diperoleh dari pengurangan dua sudut \cos . Bentuk rumus pengurangan $\cos x - \cos y$ adalah sebagai berikut :

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{1}{2} (x - y)$$

Contoh Soal 2.3.

Nyatakanlah bentuk $\cos(x+h) - \cos(x)$ dalam bentuk perkalian.

Jawab :

$$\begin{aligned}\cos(x+h) - \cos(x) &= -2 \sin \frac{1}{2}((x+h) + (x)) \sin \frac{1}{2}((x+h) - (x)) \\ &= -2 \sin \frac{1}{2}(2x+h) \sin \frac{1}{2}(h)\end{aligned}$$

Tentukanlah nilai dari $\cos \frac{5}{12}\pi + \cos \frac{1}{12}\pi$

Jawab :

$$\begin{aligned}\cos 125^\circ - \cos 55^\circ &= -2 \sin \frac{1}{2}(125^\circ + 55^\circ) + \sin \frac{1}{2}(125^\circ - 55^\circ) \\ &= -2 \sin \frac{1}{2}(180^\circ) + \sin \frac{1}{2}(70^\circ) \\ &= -2 \sin 90^\circ \cdot \sin 35^\circ \\ &= -2 \cdot (1) \cdot \sin 35^\circ \\ &= -2 \sin 35^\circ\end{aligned}$$

Tugas individu kegiatan belajar 2

1. Tentukanlah nilai dari :

a. $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

b. $\frac{\cos 15^\circ - \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ - \sin 75^\circ}$

2. Buktikanlah bahwa :

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$$

RANGKUMAN

Untuk setiap sudut α dan β berlaku rumus-rumus berikut :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Untuk menghafal rumus diatas, kiata bisa menggunakan mnemonics berikut :

Sayang + sayang = Semakin cinta

Sayang – sayang = cinta sirna

Cinta + Cinta = Cenat Cenut

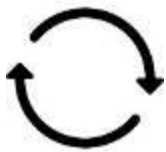
Cinta – Cinta = aduh sayang Sekali

Cara membaca mnemonics diatas adalah sebagai berikut :

Sayang dibalas sayang, semakin cinta

Sayang tidak dibalas sayang, cinta sirna

Perhatikan huruf depannya. Sayang, huruf depannya S untuk sinus. Sedangkan, Cinta Huruf deapannya C untuk cos. Sedangkan tanda "Aduh Menandakan tanda negatif.



Tindak Lanjut Pembelajaran

Setelah anda mempelajari rumus perkalian sinus dan cosinus, untuk lebih mendalami dan menguasai materi yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus, silahkan buka dan pelajari buku yang berkaitan dengan **Matematika Peminatan untuk SMA Kelas XI** karangan Noormandiri , penerbit Erlangga. Kalian juga bisa mencari referensi lain dari sumber-sumber lain baik sumber cetak maupun *search* di internet.

Refleksi Materi

Apakah anda sudah memahami seluruh materi mengenai rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus? Ataukah ada materi yang belum dimengerti? Jika kalian masih belum memahami keseluruhan materi diatas, silahkan pelajari lagi materi dengan lebih seksama. Namun jika sudah memahami keseluruhan materi, silahkan lanjutkan ke kegiatan pembelajaran berikutnya.

Referensi

Sukino. 2017. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan IPA Semester 1* Jakarta: Erlangga.

Noormandiri. 2016. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan IPA Semester 1* Jakarta: Erlangga.