

MODUL 3

RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS



Penulis

Ade Jajang Jaelani, S.Pd

Deskripsi

Modul bahan ajar ini merupakan pelengkap dari buku Matematika Umum kelas XI Peminatan IPA. Modul ini disusun dengan tujuan agar Anda bisa mendapatkan panduan pembelajaran mandiri. Modul ini menyediakan materi terkait mata pelajaran, panduan contoh soal yang dilengkapi penyelesaian, uji kompetensi, dan rangkuman materi.

Prasyarat

Modul ini akan mengajak Anda mengenal materi rumus jumlah dan selisih trigonometri yang terdiri dari rumus perkalian sinus dan cosinus dan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

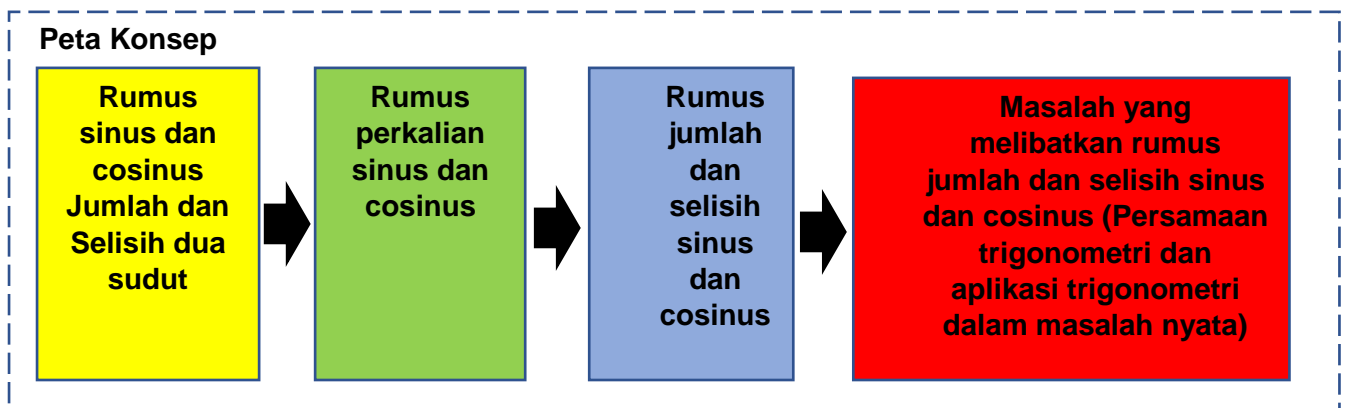
Panduan Belajar

No KD	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	Alokasi Waktu
3.2.	Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus	3.2.18. Menyatakan hubungan antara rumus sinus, cosinus jumlah dan selisih dua sudut dalam perkalian sinus dan cosinus. 3.2.19. Membuktikan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.20. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.21. Membuktikan rumus jumlah dan selisih sinus, menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.22. Membuktikan rumus jumlah dan selisih cosinus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.23. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus 3.2.24. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih cosinus 3.2.25. Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam menyelesaikan 3.2.26. Menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri dengan	8 x 45'

No KD	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	Alokasi Waktu
		menggunakan jumlah dan selisih sinus dan cosinus Menganalisis rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam penerapannya pada masalah nyata	
4.2	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus	4.2.1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus 4.2.2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.3. Menyelesaikan masalah berkaitan persamaan trigonometri yang berkaitan jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.4. Menyelesaikan permasalahan nyata yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus.	

Halo semuanya, bagaimana kabarnya? Semoga kabar baik. Selamat bertemu pada modul Jumlah dan selisih sinus dan cosinus. Modul ini yang akan mengantarkan Anda untuk dapat menguasai kompetensi, baik pengetahuan, keterampilan, maupun sikap sesuai dengan kurikulum 2013. Dalam modul ini terdiri dari beberapa kegiatan belajar diantaranya:

1. Kegiatan Belajar 1: Rumus perkalian sinus dan cosinus
2. Kegiatan Belajar 2: Rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus
3. Kegiatan Belajar 3: Persamaan Trigonometri & masalah yang melibatkan trigonometri



Kegiatan Belajar 3

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

DAN MASALAH YANG MELIBATKAN TRIGONOMETRI



“Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan, maka yakinlah bahwa Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau.”

Indikator Pencapaian Kompetensi

Pengetahuan :

3.2.17 Menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri dengan menggunakan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

Keterampilan :

4.2.7 Terampil dalam menyelesaikan masalah berkaitan persamaan trigonometri yang berkaitan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

Selamat datang peserta didik pada modul pembelajaran mandiri. Pada kegiatan belajar 2 ini, Anda akan mempelajari rumus perkalian sinus dan cosinus

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar 2, Anda sebagai peserta didik dapat:

1. Setelah melakukan kegiatan diskusi kelompok dalam mengerjakan LKPD, peserta didik dapat menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri dengan menggunakan
2. Setelah melakukan kegiatan diskusi, peserta didik dapat menyelesaikan masalah berkaitan persamaan trigonometri yang berkaitan jumlah dan selisih sinus dan cosinus dengan benar

Setelah melakukan kegiatan diskusi, peserta didik dapat menyelesaikan masalah untuk mencapai tujuan pembelajaran di atas, langkah pertama silakan Anda pelajari dan pahami uraian materi berikut.



Uraian Materi

1. Persamaan Trigonometri

A. Persamaan Trigonometri Bentuk $\cos (x + a) \pm \cos (x-a) = c$

Dan $\sin (x + a) \pm \sin (x-a) = c$

Untuk menyelesaikan himpunan penyelesaian trigonometri bentuk $\cos (x + a) \pm \cos (x-a) = c$ dan $\sin (x + a) \pm \sin (x-a) = c$, maka diperlukan rumus perkalian sin dan cosinus :

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

Contoh Soal 3.1.

Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap persamaan berikut :

a. $\sin (x + 210^\circ) + \sin (x - 210^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$

b. $\cos (x + \frac{1}{2}\pi) - \cos (x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{2}$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Jawab :

$$\text{a. } \sin(x + 210^\circ) + \sin(x - 210^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2\sin x^\circ \cos 210^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2\sin x^\circ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2\sin x^\circ = -1$$

$$\sin x^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x^\circ = \sin 210^\circ$$

Maka :

$$x_1 = \alpha + n \cdot 360 \text{ dan } x_2 = (180 - \alpha) + n \cdot 360$$

$$x_1 = 210 + n \cdot 360 \text{ dan } x_2 = (180 - 210) + n \cdot 360$$

$$x_1 = 210 + n \cdot 360 \text{ dan } x_2 = -30 + n \cdot 360$$

$$\text{Untuk } n = 0 \Rightarrow x_1 = 210 + 0 \cdot 360 = 210$$

$$x_2 = -30 + 0 \cdot 360 = -30 \text{ (Tidak memenuhi)}$$

$$\text{Untuk } n = 1 \Rightarrow x_1 = 210 + 1 \cdot 360 = 570 \text{ (Tidak memenuhi)}$$

$$x_2 = -30 + 1 \cdot 360 = 330$$

Jadi, HP = $\{210^\circ, 330^\circ\}$

$$\text{b. } \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{2}$$

$$-2\sin x^\circ \sin \frac{1}{2}\pi = \sqrt{2}$$

$$-2\sin x^\circ (1) = \sqrt{2}$$

$$\sin x^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin x^\circ = \sin \frac{5}{4}\pi$$

Maka :

$$x_1 = \alpha + n \cdot 360 \text{ dan } x_2 = (180 - \alpha) + n \cdot 360$$

$$x_1 = \frac{5}{4}\pi + n \cdot 2\pi \text{ dan } x_2 = \left(\pi - \frac{5}{4}\pi\right) + n \cdot 2\pi$$

$$x_1 = \frac{5}{4}\pi + n \cdot 2\pi \text{ dan } x_2 = -\frac{1}{4}\pi + n \cdot 2\pi$$

$$\text{Untuk } n = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = -\frac{1}{4}\pi \text{ (Tidak memenuhi)}$$

$$\text{Untuk } n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{13}{4}\pi \text{ (Tidak memenuhi)}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{Jadi, HP} = \left\{ \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\}$$

B. Persamaan Trigonometri Bentuk Trigonometri $ax +$ Trigonometri $bx = 0$

Untuk menyelesaikan himpunan penyelesaian trigonometri **bentuk trigonometri $ax +$ trigonometri $bx = 0$** , maka diperlukan rumus jumlah dan selisih sin dan cosinus :

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Contoh Soal 3.2.

Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap persamaan berikut untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$:

a. $\sin x^\circ + \sin (x-60)^\circ = 0$

b. $\cos 2x = -\cos x$

Jawab :

a. $\sin x^\circ + \sin (x-60)^\circ = 0$

$$2\sin\frac{1}{2}(2x-60)^\circ \cos\frac{1}{2}(60)^\circ = 0$$

$$2\sin(x-30)^\circ \cos(30)^\circ = 0$$

$$2\sin(x-30)^\circ \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\sin(x-30)^\circ = 0$$

$$\sin(x-30)^\circ = \sin(0)$$

Maka :

$$\begin{array}{lll} x_1 = \alpha + n \cdot 360 & \text{atau} & x_2 = (180 - \alpha) + n \cdot 360 \\ (x_1 - 30) = 0 + n \cdot 360 & \text{atau} & (x_2 - 30) = (180 - 0) + n \cdot 360 \\ x_1 = 30^\circ + n \cdot 360 & \text{atau} & x_2 = 210^\circ + n \cdot 360 \end{array}$$

untuk $n = 0 \Rightarrow x_1 = 30^\circ + n \cdot 360 \Rightarrow x_1 = 30^\circ + 0 \cdot 360 = 30^\circ$

$n = 1 \Rightarrow x_1 = 30^\circ + n \cdot 360 \Rightarrow x_1 = 30^\circ + (1) \cdot 360 = 390^\circ$ (tidak memenuhi)

untuk $n = 0 \Rightarrow x_2 = 210^\circ + n \cdot 360 \Rightarrow x_2 = 210^\circ + 0 \cdot 360 = 210^\circ$

$n = 1 \Rightarrow x_2 = 210^\circ + n \cdot 360 \Rightarrow x_2 = 210^\circ + 1 \cdot 360 = 570^\circ$ (tidak memenuhi)

Jadi Himpunan penyelesaian adalah $\{30^\circ, 210^\circ\}$

b. $\cos 2x = -\cos x$

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

$$2 \cos \frac{1}{2}(2x + x) \cos \frac{1}{2}(2x - x) = 0$$

$$2 \cos \frac{3}{2}x \cos \frac{1}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3}{2}x = 0 \quad \text{atau} \quad \cos \frac{1}{2}x = 0$$

$$\frac{3}{2}x = 90 + n \cdot 180 \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}x = 90 + n \cdot 180$$

$$x = 60 + n \cdot 120 \quad \text{atau} \quad x = 180 + n \cdot 360$$

Untuk $n = 0 \Rightarrow x_1 = 60 + n \cdot 120 \Rightarrow x_1 = 60 + 0 \cdot 120 = 60$

$$x_2 = 180 + n \cdot 360 \Rightarrow x_2 = 180 + 0 \cdot 360 = 180$$

Untuk $n = 1 \Rightarrow x_1 = 60 + n \cdot 120 \Rightarrow x_1 = 60 + 1 \cdot 120 = 180$

$x_2 = 180 + n \cdot 360 \Rightarrow x_2 = 180 + 1 \cdot 360 = 540$ (tidak memenuhi)

Untuk $n = 2 \Rightarrow x_1 = 60 + n \cdot 120 \Rightarrow x_1 = 60 + 2 \cdot 120 = 300$

Jadi Himpunan penyelesaian adalah $\{60^\circ, 180^\circ, 300^\circ\}$

C. Permasalahan yang melibatkan trigonometri

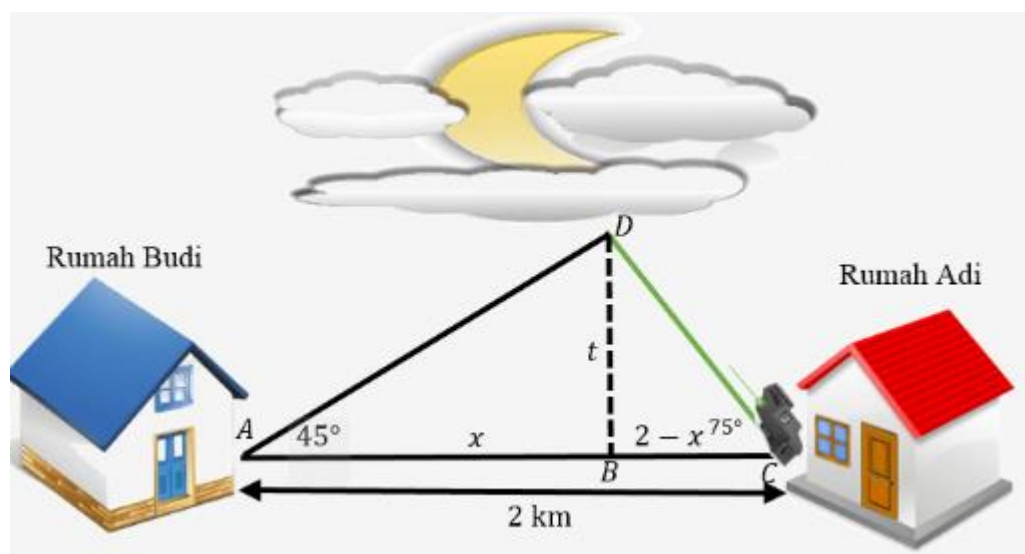
Ada banyak aplikasi trigonometri salah satunya adalah teknik triangulasi yang digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan dalam sistem navigasi satelit. Bidang lainnya yang menggunakan trigonometri termasuk astronomi (dan termasuk navigasi, di laut, udara, dan angkasa), teori musik, akustik, optik, analisis pasar finansial, elektronik, teori probabilitas, statistika, biologi, pencitraan medis/medical imaging farmasi, kimia, teori angka seismologi, meteorologi, oseanografi, berbagai cabang dalam ilmu fisika, survei darat dan geodesi, arsitektur, fonetika, ekonomi, teknik listrik, teknik mekanik, teknik sipil, grafik komputer, kartografi, kristalografi. Berikut contoh aplikasi trigonometri dalam masalah nyata :

Contoh Soal 3.3.

Adi dan Budi merupakan sahabat karib. Suatu malam, mereka berada di rumah masing-masing. Jarak kedua rumah adalah 2 km. Adi mengirim pesan singkat kepada Budi bahwa dia sedang berdiri menghadap rumah Budi dan bermain pistol laser hijau yang kuat dan ditembakkan dengan sudut elevasi 75° ke awan yang berada di langit antara kedua rumahnya sehingga mengenai awan. Budi beranjak berdiri di depan rumah sambil mengamati titik hijau di awan menggunakan klinometer dan terbaca sudut yang terbentuk 45° . Maka tentukanlah tinggi awan yang ditembak Adi !

Jawab :

Perhatikan seketsa gambar berikut :



Tinjau segitiga ABD

Dengan menggunakan konsep tangen, diperoleh :

$$\tan 45^\circ = \frac{t}{x} \Leftrightarrow 1 = \frac{t}{x} \Leftrightarrow x = t$$

Sekarang tinjau segitiga BCD.

Dengan prinsip yang sama diperoleh :

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{t}{x-2} \\ \tan(45 + 30)^\circ &= \frac{t}{t-2} \\ \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} &= \frac{t}{t-2} \\ \frac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} &= \frac{t}{t-2} \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} &= \frac{t}{t-2} \\ (3 + \sqrt{3})(2 - t) &= t(3 - \sqrt{3}) \\ 6 + 2\sqrt{3} - 3t - \sqrt{3}t &= 3t - \sqrt{3}t \\ 6t &= 6 + 2\sqrt{3} \\ t &= \frac{1}{6}(6 + 2\sqrt{3}) \\ t &= \frac{1}{3}(\sqrt{3} + 3) \text{ km}\end{aligned}$$

Jadi, tinggi awan yang ditembak adi adalah $\frac{1}{3}(\sqrt{3} + 3) \text{ km}$

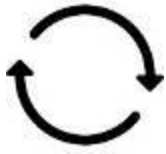
Tugas individu kegiatan belajar 3

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut untuk $0^\circ < x < 360^\circ$:

a. $\sin(x+45)^\circ + \sin(x-45)^\circ = \sqrt{2}$

b. $\cos 3x^\circ + \cos(x+60)^\circ = 0$

2. Sebuah helikopter berada pada ketinggian 2.001,5 m diatas permukaan tanah dan seorang anak berdiri tepat di bawahnya. Anak tersebut berdiri tepat dihadapan sebuah gedung. Ia mengamati puncak gunung dengan tinggi pengamatan 150 cm. Jika sudut elevasi antara anak dan puncak gunung 15° dan sudut depresi antara helikopter dan puncak gunung adalah 60° . Tentukanlah tinggi gedung tersebut.



Tindak Lanjut Pembelajaran

Setelah anda mempelajari rumus perkalian sinus dan cosinus, untuk lebih mendalami dan menguasai materi yang berkaitan dengan persamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri, silahkan buka dan pelajari buku yang berkaitan dengan **Matematika Peminatan untuk SMA Kelas XI** karangan Noormandiri , penerbit Erlangga. Kalian juga bisa mencari referensi lain dari sumber-sumber lain baik sumber cetak maupun *search* di internet.

Refleksi Materi

Apakah anda sudah memahami seluruh materi mengenai persamaan trigonometri dan aplikasi trigonometri? Ataupun ada materi yang belum dimengerti? Jika kalian masih belum memahami keseluruhan materi diatas, silahkan pelajari lagi materi dengan lebih seksama. Namun jika sudah memahami keseluruhan materi, silahkan lanjutkan ke kegiatan pembelajaran berikutnya.

Referensi

- Sukino. 2017. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan IPA Semester 1* Jakarta: Erlangga.
- Noormandiri. 2016. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan IPA Semester 1* Jakarta: Erlangga.