



RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN
MATEMATIKA

KEGIATAN PEMBELAJARAN

A. PENDAHULUAN

Melaksanakan vicon menggunakan google meet dengan siswa untuk:

1. Mengkondisikan kelas virtual (*whatsapp* group dan forum di *google classroom*), memberi salam, menanyakan kabar dan mengingatkan pentingnya menaati protocol covid-19
2. Menyampaikan tujuan pembelajaran pertemuan hari ini
3. Membuat apersepsi tentang Luas Daerah(Integral)
4. Memastikan siswa bergabung dengan google classroom dan sudah melakukan presensi kehadiran

B. INTI (PERTEMUAN 1 : Luas Daerah)

1. Peserta didik mempelajari dan mengidentifikasi cara menghitung luas daerah melalui PDF, PPT atau video pembelajaran pada link <https://www.youtube.com/watch?v=sV3YZWFvFrw> yang telah diunggah pada google classroom.
2. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk mengidentifikasi hal yang belum dipahami berupa pertanyaan yang berkaitan cara menghitung luas daerah melauai forum pada google classroom atau whatsapp.
3. Peserta didik menerapkan konsep yang dipelajari untuk menentukan luas daerah pada LKPD yang diberikan oleh Guru pada google classroom
4. Peserta didik mengerjakan tugas yang telah diberikan di google classroom

C. REFLEKSI DAN KONFIRMASI

1. Merefleksi kegiatan pembelajaran yang telah dilaksanakan.
2. Menginformasikan kegiatan pembelajaran yang akan dilakukan pada pertemuan berikutnya.
3. Guru memberikan tugas dan memberikan informasi tentang waktu pengumpulannya melalui classroom
4. Guru memberikan review serta mengembalikan tugas yang telah diberikan melalui classroom
5. Kegiatan diakhiri dengan salam lewat forum chat *Whatsapp Group* dan Forum *Google Calssroom*

D. PENILAIAN :

1. Penilaian Sikap
Melalui pengamatan perilaku sikap spiritual dan sikap sosial pada saat pembelajaran berlangsung
2. Penilaian Pengetahuan
Melalui soal pilihan ganda dan esai sesuai dengan instrumen dan norma penilaian yang sudah di upload pada google classroom
3. Penilaian Keterampilan
Melalui unjuk kerja berdasarkan tugas yang diberikan pada saat pembelajaran

NAMA SEKOLAH

SMK NEGERI 1
Purwodadi

BIDANG KEAHLIAN

Semua Kompetensi
Keahlian

MATERI

Luas Daerah(Integral)

KELAS / SEMESTER

XII / GANJIL

ALOKASI WAKTU

1x Pertemuan (2x30')

TUJUAN

PEMBELAJARAN :

Peserta didik mampu menentukan luas daerah dengan menggunakan integral tertentu secara baik dan benar.

ALAT DAN MEDIA
PEMBELAJARAN

- Alat Pembelajaran:
Laptop atau HP
Android
- Media Pembelajaran :
Whatsapp, Google
Classroom, Google
Meet, Email dan
Youtube

Mengetahui,
Kepala Sekolah

Sukamto, S.Pd, M.M.
NIP. 19720302 199512 1 001

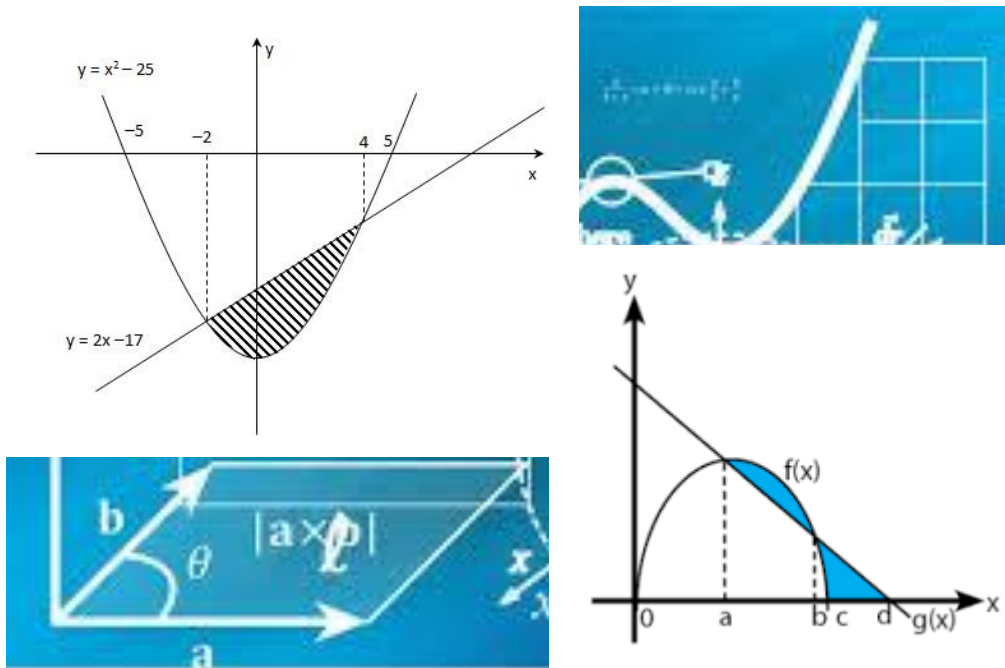
Purwodadi, Juli 2020
Guru Mata Pelajaran

Sugiharto
NIP.

MODUL

LUAS DAERAH(INTEGRAL)

Kelas XII Semester Ganjil
Pertemuan 3



Oleh :
Sugiharto
20031518010152

SMK Negeri 1 Purwodadi
Tahun Pelajaran 2020/2021

PRAKATA

Konsep Integral banyak digunakan dalam kehidupan, misalnya dalam bidang Ekonomi dan Bisnis. Integral misalnya, bisa digunakan untuk mencari fungsi biaya total, fungsi penerimaan total, surplus konsumen, dan surplus produsen. Pada penyampaian materi yang abstrak seperti Integral diperlukan sumber materi dan sebuah perangkat yang bisa membantu siswa dalam memahami konsep. Kemajuan teknologi informasi memberikan kemudahan kepada para pengajar untuk memanfaatkan teknologi dalam pembelajaran.

Modul ini terintegrasi dengan penggunaan *software Maple* sehingga diharapkan dapat membantu siswa dalam memahami konsep Integral serta aplikasinya, termasuk dalam bidang kewirausahaan. *Software Maple* bisa memberikan visualisasi atau gambaran dari fungsi-fungsi yang dipelajari pada Integral sehingga lebih memudahkan siswa dalam memahami konsep. Dengan *software Maple*, siswa bisa aktif menggali hubungan antara konsep-konsep integral dan representasi grafisnya.

Modul ini memuat pengantar konsep integral dan penjabaran teorema-teoremanya. Selain itu, modul ini juga menyajikan contoh soal untuk memberikan gambaran yang lebih jelas tentang teorema-teorema integral. Pada akhir kegiatan, terdapat beberapa Soal Evaluasi untuk mengetahui sejauh mana siswa memahami materi yang telah dipelajari.

Purwodadi, September 2020

Penulis

DESKRIPSI DAN PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Deskripsi

Modul ini lanjutan dari model sebelumnya. Pada modul ini berisi bahasan tentang konsep luas daerah. Pokok bahasan di dalamnya yaitu Luas daerah yang di batasi sumbu koordinat, kurva dan garis.

Petunjuk Penggunaan Modul Bagi Siswa

1. Siswa diharapkan mempunyai kemampuan prasyarat sebelum mempelajari modul ini, yaitu materi Diferensial/Turunan
2. Perhatikan setiap kompetensi dasar dan tujuan pembelajaran pada setiap bab yang Anda pelajari.
3. Pahami isi materi modul ini dengan seksama.
4. Mintalah penjelasan pada guru apabila ada materi yang tidak dapat dipahami.
5. Kerjakan semua soal latihan yang ada pada masing-masing bab.
6. Kerjakan semua soal evaluasi yang ada pada setiap bab untuk mengukur pemahaman konsep Anda setelah mempelajari materi pada modul ini. Jika skor yang Anda dapatkan belum mencapai 71% dari skor total, maka pelajarilah kembali materi pada modul ini untuk meningkatkan pemahaman Anda.
7. Bacalah referensi lainnya yang berhubungan dengan materi modul agar Anda mendapatkan tambahan pengetahuan.
8. Tunjukkan Karakter Bangsa Anda dalam menggunakan dan mempelajari modul ini. Sifat-sifat Karakter Bangsa antara lain:

a Percaya diri

Percaya dirilah pada kemampuan sendiri dalam mengerjakan soal-soal sehingga Anda bisa mengukur kemampuan Anda sendiri.

b Bekerja keras dan tidak pantang menyerah

Setiap mendapati soal yang sulit, teruslah berusaha menyelesaikannya. Anda bisa meminta bantuan dari teman maupun guru.

c Kerjasama

Dalam mempelajari materi dan mengerjakan latihan soal, bekerja sama dengan teman akan memudahkan Anda memahami dan menyelesaikan soal-soal.

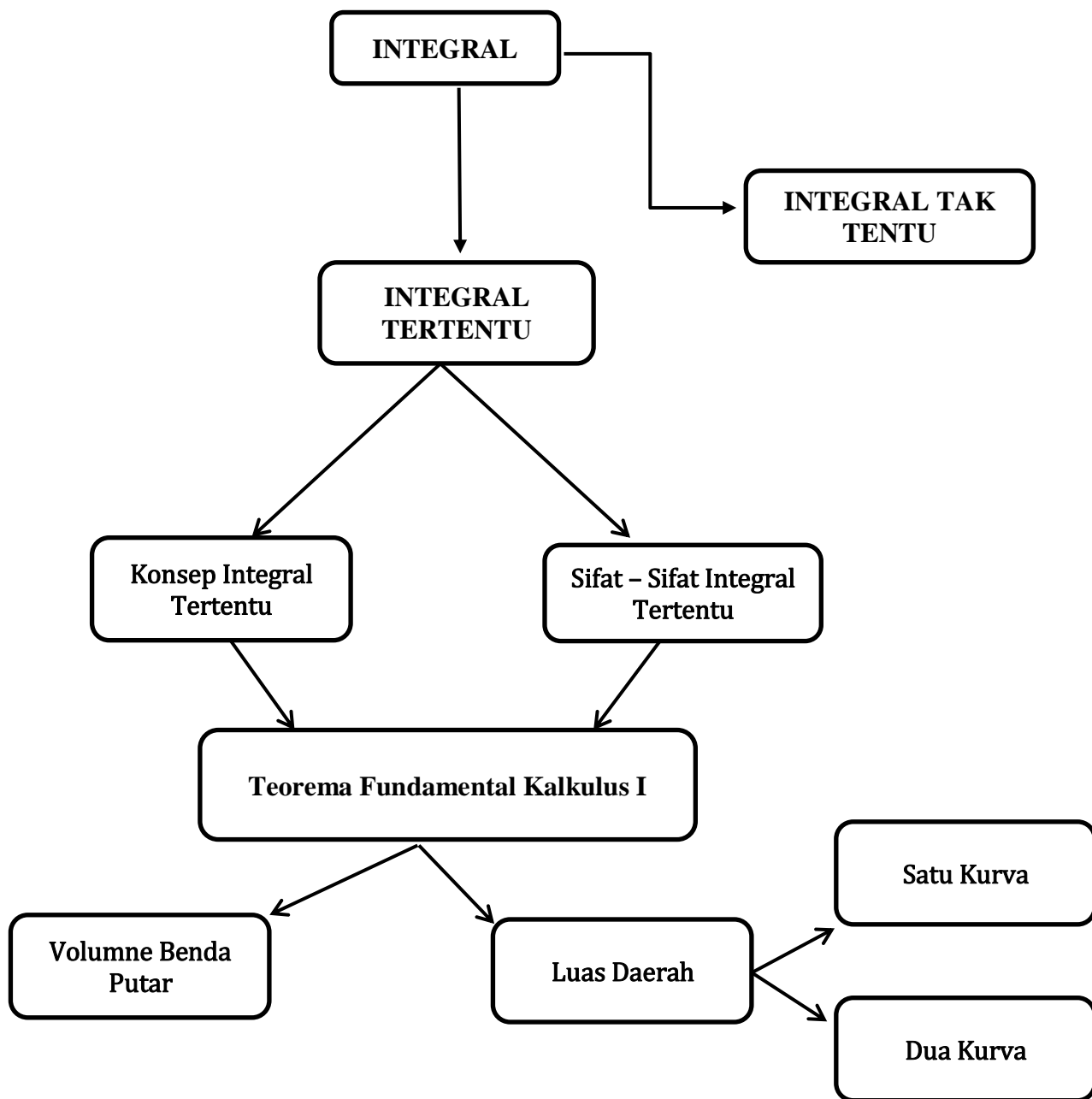
d Mandiri

Saat evaluasi, bersikaplah mandiri sehingga Anda bisa mengetahui sejauh mana Anda memahami materi dan mengaplikasikan materi yang diperoleh dalam soal-soal.

e Aktif dan Kreatif

Anda harus aktif dalam pembelajaran dan Anda juga bisa berkreasi dengan membuat contoh sendiri dari materi yang dipelajari.

PETA KONSEP



Integral Luas Daerah

A. Kompetensi Inti :

3. Memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi tentang pengetahuan factual, konseptual, procedural, dan metakognitif sesuai dengan bidang dan lingkup kajian matematika pada tingkat teknis, spesifik, detil, dan kompleks, berkenaan dengan ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dalam konteks pengembangan potensi diri sebagai bagian dari keluarga, sekolah, dunia kerja, warga masyarakat nasional, regional, dan internasional
4. Melaksanakan tugas spesifik dengan menggunakan alat, informasi, dan prosedur kerja yang lazim dilakukan serta memecahkan masalah sesuai dengan bidang kajian Matematika
Menampilkan kinerja di bawah bimbingan dengan mutu dan kuantitas yang terukur sesuai dengan standar kompetensi kerja
Menunjukkan ketrampilan menalar, mengolah, dan menyaji secara efektif, kreatif, produktif, kritis, mandiri, kolaboratif, komunikatif, dan solutif dalam ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah serta mampu melaksanakan tugas spesifik di bawah pengawasan langsung
Menunjukkan ketrampilan mempersepsi, kesiapan, meniru, membiasakan, gerak mahir, menjadikan gerak alami dalam ranah konkret terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah, serta mampu melaksanakan tugas spesifik di bawah pengawasan langsung

B. Kompetensi Dasar

- 3.34 Menentukan luas permukaan dan volume benda putar dengan menggunakan integral tertentu
- 4.34 Menyelesaikan masalah luas permukaan dan volume benda putar dengan menggunakan integral tertentu

C. Indikator Pencapaian Kompetensi

- 3.34.1 Menentukan luas permukaan dengan menggunakan integral tertentu.
- 4.34.1 Menerapkan konsep Integral tentu untuk menghitung luas daerah

D. Tujuan Pembelajaran

Setelah selesai pembelajaran, diharapkan siswa dapat :

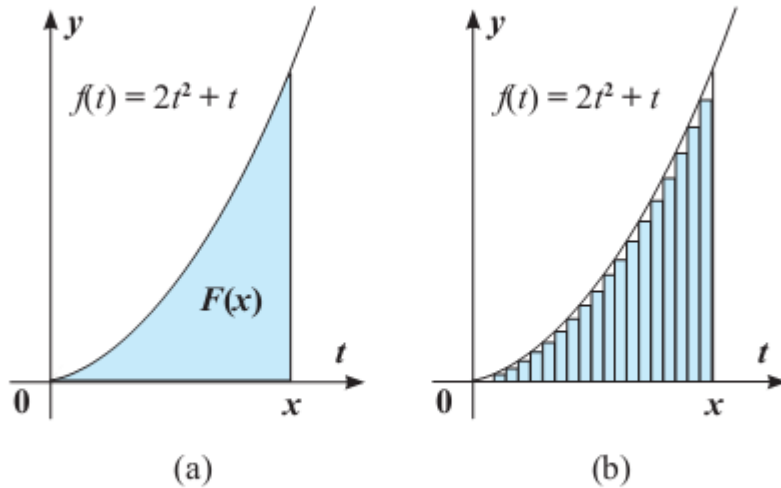
- Menemukan hubungan integral tak tentu dan tentu dalam Teorema Fundamental Kalkulus I
- Menentukan luas daerah yang dibatasi satu kurva
- Menentukan luas daerah yang dibatasi dua kurva

MATERI MODUL LUAS DAERAH (INTEGRAL)

A. TEOREMA FUNDAMENTAL KALKULUS I

a.

Misalkan luas daerah pada gambar di bawah dinyatakan sebagai fungsi $F(x)$.



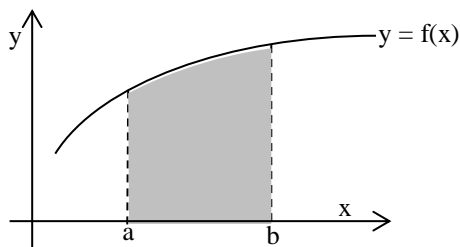
Gambar 5.12 Luas daerah yang dibatas oleh $f(t) = 2t^2 + t$, sumbu- x dan garis $t = x$.

Dengan mempartisi interval tersebut menjadi n subinterval sama panjang (Gambar 5.2.1b), panjang subinterval $\Delta t = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$, maka bentuk integral tentunya adalah:

$$\begin{aligned} \int_0^x 2t^2 + t dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{ix}{n}\right) \frac{x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(2\left(\frac{ix}{n}\right)^2 + \frac{ix}{n} \right) \frac{x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \left(2 \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{x}{n} \sum_{i=1}^n i \right) \end{aligned}$$

B. Luas daerah.

1. Menghitung luas daerah di bawah kurva



Jika $y = f(x) > 0$, (kurva di atas sumbu x dan sumbu y), maka luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan garis $x = b$ dapat dihitung dengan rumus :

$$\text{Luas (L)} = \int_a^b f(x) dx$$

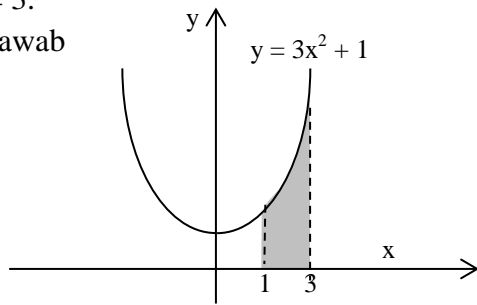
Jika $y = f(x) < 0$, (kurva dibawah sumbu x), maka luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$ dapat dihitung dengan rumus :

$$\text{Luas (L)} = - \int_a^b f(x) dx$$

Contoh.

1. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3x^2 + 1$, sumbu x, garis $x = 1$ dan garis $x = 3$.

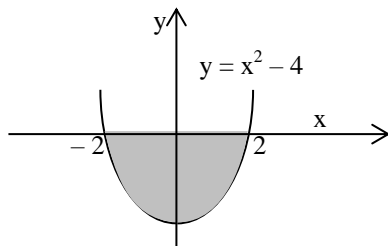
Jawab



$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 (3x^2 + 1) dx \\ &= [x^3 + x]_1^3 \\ &= (3^3 + 3) - (1^3 + 1) \\ &= (27 + 3) - (1 + 1) \\ &= 30 - 2 \\ &= 28 \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4$ dan sumbu x.

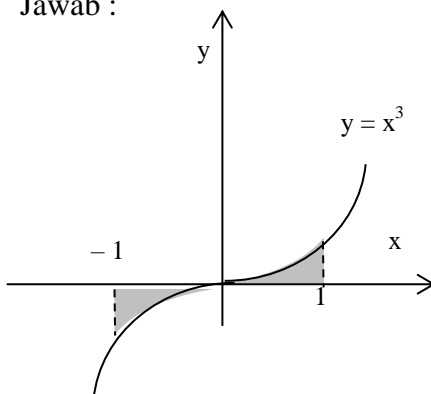
Jawab :



$$\begin{aligned} L &= - \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \\ &= - [\frac{1}{3} x^3 + 4x]_{-2}^2 \\ &= - \{ [\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2] - [\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 4(-2)] \} \\ &= - \{ [\frac{1}{3} \cdot 8 + 8] - [\frac{1}{3}(-8) - 4(-2)] \} \\ &= - \{ \frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3} - 8 \} \\ &= - \{ \frac{16}{3} \} \\ &= - \{ 5 \frac{1}{3} \} \\ &= - (-10 \frac{2}{3}) \\ &= 10 \frac{2}{3} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

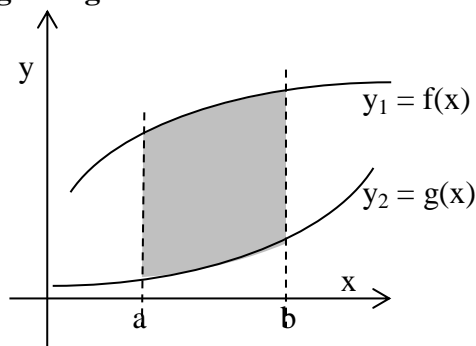
3. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu x, garis $x = -1$ dan $x = 1$.

Jawab :



$$\begin{aligned}
L &= - \int_{-3}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx \\
&= - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-3}^0 + \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\
&= - \left[\frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{4} (-1)^4 \right] + \left[\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 \right] \\
&= - \left[\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 1 \right] + \left[\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 0 \right] \\
&= - \left(0 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

2. Menghitung luas daerah antara dua kurva

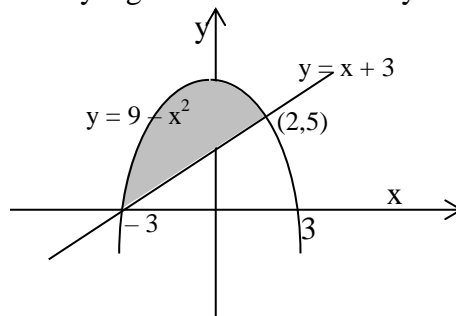


Daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ pada interval $[a, b]$, mempunyai luas yang ditentukan oleh :

$$L = \int_a^b \{ f(x) - g(x) \} dx, \text{ dimana } f(x) \geq g(x) \text{ dan } a \leq x \leq b.$$

Contoh :

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 9 - x^2$ dan garis $y = x + 3$



Kedua kurva dipotongkan, didapat

$$9 - x^2 = x + 3$$

$$9 - x^2 - x - 3 = 0$$

$$6 - x - x^2 = 0$$

$$(3 + x)(2 - x) = 0$$

$$x = -3 \text{ atau } x = 2$$

$$\begin{aligned}
\text{maka luasnya adalah } L &= \int_{-3}^2 \{ (9 - x^2) - (x + 3) \} dx \\
&= \int_{-3}^2 (9 - x^2 - x - 3) dx \\
&= \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx
\end{aligned}$$

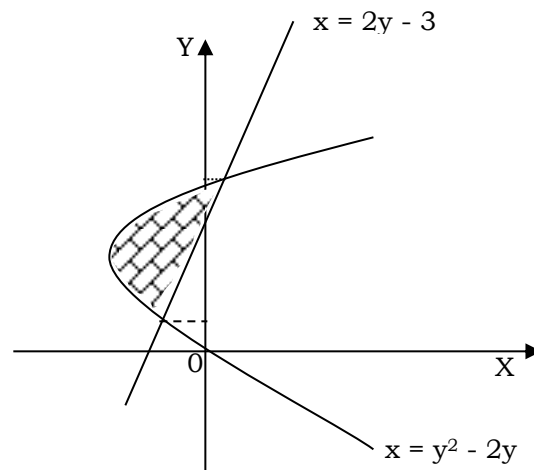
$$\begin{aligned}
&= \left[6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^2 \\
&= \left[\left(6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(6 \cdot (-3) - \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 - \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 \right) \right] \\
&= \left[12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right] - \left[-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3} \right] \\
&= 12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - 9 \\
&= 19 - \frac{16}{6} + \frac{27}{6} \\
&= 20\frac{5}{6} \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

Soal Latihan

Kerjakan soal – soal berikut!

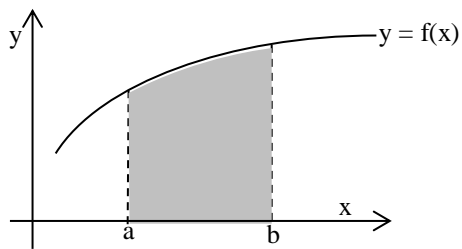
1. Hitunglah luas daerah dalam kuadran pertama yang di batasi oleh kurva $y = x(6 - x)$ dan sumbu X
2. Hitunglah luas daerah yang di batasi kurva $y = x^2 - 4x + 3$, sumbu X dan sumbu Y
3. Hitunglah luas daerah yang di batasi kurva $y = x^3$ dan garis $y = x$.
4. Perhatikan gambar di samping.

Hitunglah luas daerah yang diarsir.



RANGKUMAN

- a. Menghitung luas daerah di bawah kurva yang dibatasi oleh $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan garis $x = b$



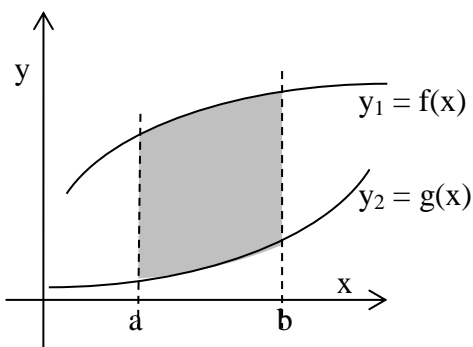
Jika $y = f(x) > 0$

$$\text{Luas (L)} = \int_a^b f(x) dx$$

Jika $y = f(x) < 0$

$$\text{Luas (L)} = - \int_a^b f(x) dx$$

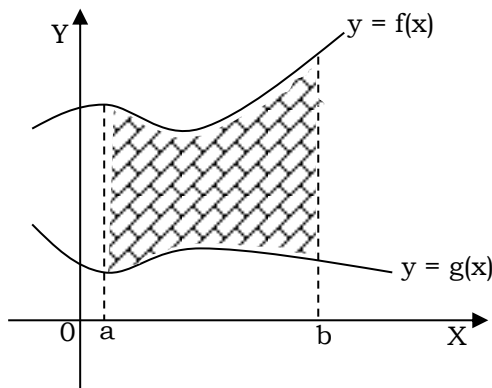
- b. Menghitung luas daerah antara dua kurva yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ pada interval $[a, b]$



$$L = \int_b^a \{f(x) - g(x)\} dx, \text{ dimana } f(x) \geq g(x) \text{ dan } a \leq x \leq b.$$

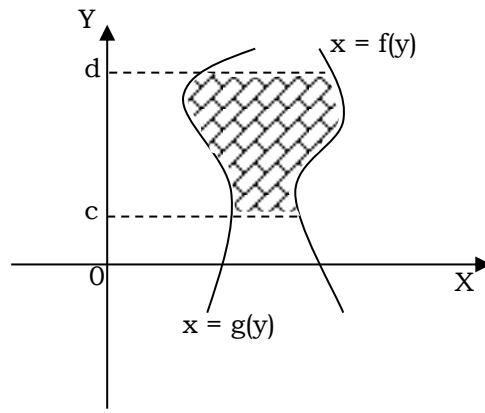
- c. Untuk menentukan luas daerah yang di batasi kurva - kurva, diantaranya bisa dilakukan dengan dua cara ;

- a. Dengan absis sebagai batas integrasi



$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

b. Dengan ordinat sebagai batas integrasi



$$L = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

SOAL EVALUASI

Pilihlah salah satu jawaban yang paling benar!

1. Luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x$, $x = -3$, $x = 4$, dan sumbu X dapat dinyatakan dengan ...

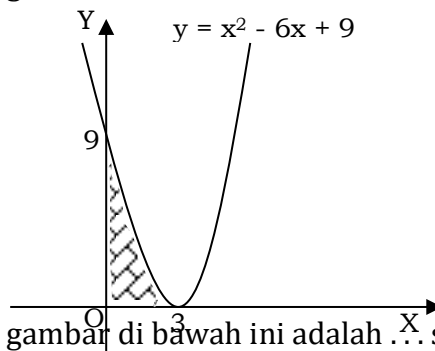
A. $\int_{-3}^4 x dx$ B. $\int_{-3}^0 x dx + \int_0^4 x dx$ C. $-\int_{-3}^0 x dx + \int_0^4 x dx$
 D. $\int_{-3}^0 x dx - \int_0^4 x dx$ E. $-\int_{-3}^0 x dx - \int_0^4 x dx$

2. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 7x + 10$ dan sumbu X dapat dinyatakan dengan ...

A. $\int_0^5 (x^2 - 7x + 10) dx$ B. $-\int_0^5 (x^2 - 7x + 10) dx$ D. $-\int_2^5 (x^2 - 7x + 10) dx$
 D. $\int_2^5 (x^2 - 7x + 10) dx$ E. $\int_0^2 (x^2 - 7x + 10) dx$

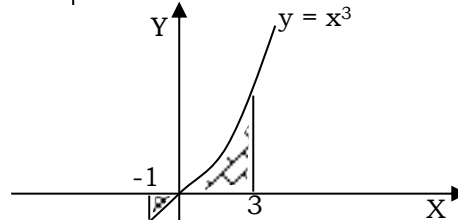
3. Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini adalah ... satuan luas.

- A. 9
 B. $7\frac{1}{2}$
 C. 6
 D. $4\frac{1}{2}$
 E. 3



4. Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini adalah ... satuan luas.

- A. 22
 B. $20\frac{1}{2}$
 C. 20
 D. $16\frac{1}{2}$ E. 16



88

5. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$ adalah ... satuan luas.

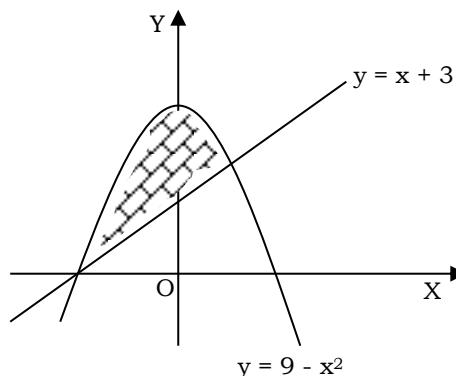
- A. $\frac{2}{3}$ B. $1\frac{1}{3}$ C. 2 D. $2\frac{2}{3}$ E. 4

6. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 1$ dan garis $y = x + 1$ dapat dinyatakan sebagai ...

A. $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx$ B. $\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx$ C. $\int_{-2}^1 (x + 2 - x^2) dx$
 D. $\int_{-2}^1 (x^2 - x - 2) dx$ E. $\int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^2 (x + 2) dx$

7. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah ... satuan luas.

- A. $20\frac{5}{6}$
 B. $13\frac{1}{2}$



C. $7\frac{1}{2}$

D. $6\frac{1}{6}$

E. $5\frac{5}{6}$

8. Luas daerah yang dibatasi parabol $y = 8 - x^2$ dan garis $y = 2x$ adalah ... satuan luas.

A. 36

B. $41\frac{1}{3}$

C. $41\frac{2}{3}$

D. 46

E. $46\frac{2}{3}$

9. Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini adalah ... satuan luas.

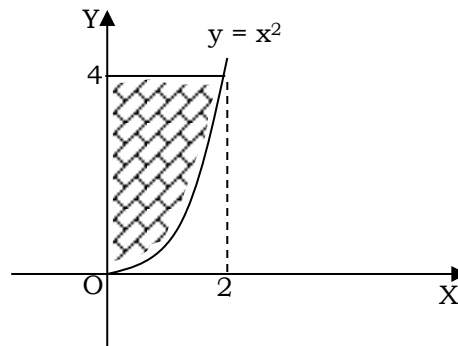
A. $\frac{1}{3}$

B. $1\frac{1}{3}$

C. $2\frac{2}{3}$

D. $5\frac{1}{3}$

E. $5\frac{2}{3}$



10. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sin x$, $y = \cos x$, dan sumbu X untuk $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ adalah ...

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

E. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

KRITERIA KEBERHASILAN

Rumus :

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar} \times 100\%}{10}$$

Arti tingkat penguasaan :

$$90\% - 100\% = \text{baik sekali}$$

$$80\% - 89\% = \text{baik}$$

$$70\% - 79\% = \text{cukup}$$

$$< 70\% = \text{kurang}$$

Apabila tingkat penguasaan kalian mencapai \geq KKM, kalian berhasil dan akan lebih mudah untuk mengikuti pembelajaran berikutnya, Ok ! Tetapi apabila tingkat penguasaan di bawah KKM, kalian masih harus mengulang kembali

Kunci Jawaban

A. Soal Latihan

1. 36 satuan luas
2. $1\frac{1}{3}$ satuan luas
3. $\frac{1}{2}$ satuan luas
4. $1\frac{1}{3}$ satuan luas

B. Soal Evaluasi

1. C
2. D
3. A
4. B
5. C
6. B
7. A
8. A
9. D
10. E

REFERENSI

- Buku Matematika Pegangan Guru Kelas XII. 2015. Jakarta. Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia.
- Buku Matematika Pegangan Siswa Kelas XII. 2015. Jakarta. Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia
- BPPTKPU. 2010. *Bahan Ajar Mandiri*. Bandung : Balai Pelatihan Pendidikan Tenaga Kependidikan Umum. Provinsi Jawa Barat
- Kasmina dkk. 2008. Matematika 3. Jakarta: Erlangga
- Purcell, E.J. 1990. *Integral dan Geometri Analitis*. Jilid 1. (edisi ke 4) (Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, & Rawuh). Jakarta : Erlangga
- Soemartojo, N. dkk.. 1992 . *Integral II*. Jakarta : Departemen Pendidikan dan Kebudayaan
- Setiawan, T. dkk.. 2007. *Seri Integral 1000 Bank Soal SMA/MA Bandung* : Yrama Widya
- Tampomas Husein. 2008. Seribupena Matematika SMA Kelas XII. Jakarta : Erlangga