BAHAN AJAR

PERTEMUAN 1

FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

MATEMATIKA SMK KELAS XI

SEMESTER GANJIL

AKHMAD TAUFIQ

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke-Hadirat Tuhan yang Maha Esa, atas limpahan taufiq dan hidayah-Nya, sehingga kami dapat menyusun bahan ajar materi fungsi komposisi dan fungsi invers untuk siswa kelas XI SMK.

Bahan ajar ini kami susun sebagai salah satu tugas Bahan Ajar pada PPG DALJAB 2020 Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa. Besar harapan kami, bahan ajar ini dapat memberikan manfaat bagi masyarakat pada umumnya, serta bagi siswa pada khususnya.

Kami sadari, dalam penulisan bahan ajar ini, masih jauh dari sempurna, oleh karena itu, segala kritik, sanggahan, saran, dan masukan lainnya yang membangun sangat kami harapkan, guna dijadikan perbaikan pada penyusunan selanjutnya.

Magelang, 22 September 2020

Penyusun

A. KOMPETENSI DASAR (KD)

Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu:

3.20 Menganalisis Operasi komposisi dan operasi invers pada fungsi

4.20 Menyelesaikan masalah operasi komposisi dan operasi invers pada fungsi

B. INDIKATOR

3.20.1 Mengidentifikasi fungsi dan sifat fungsi.

3.20.2 Mengindentifikasi oerasi aljabar pada fungsi

3.20.3 Mengidentifikasi operasi komposisi fungsi

3.20.4 Mengidentifikasi operasi komposisi dua fungsi

4.20.1 Menyelesaikan masalah berkaitan fungsi dan sifat-sifat fungsi

4.20.2 Menentukan hasil operasi komposisi dua fungsi

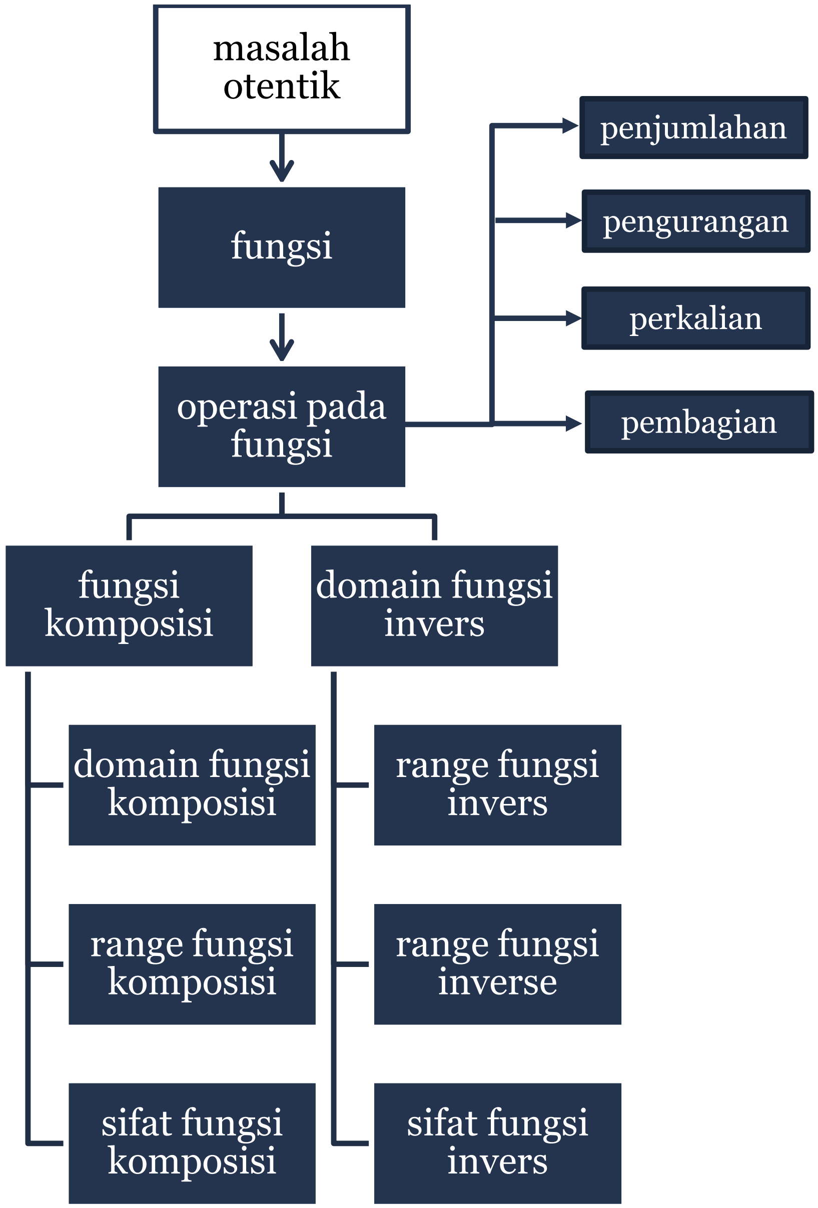
C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Siswa dapat mengidentifikasi fungsi dan sifat fungsi
2. Siswa dapat mengidentifikasi operasi aljabar pada fungsi
3. Siswa dapat mengidentifikasi operasi komposisi fungsi
4. Siswa dapat mengidentifikasi operasi komposisi dua fungsi
5. Siswa dapat menyelesaikan masalah berkaitan fungsi dan sifat-sifat fungsi
6. Menentukan hasil operasis komposisi dua fungsi

D. MOTIVASI

"Barangsiapa tidak mau merasakan pahitnya belajar, ia akan merasakan hinanya kebodohan sepanjang hidupnya." -Imam Syafi'i rahimahullah

E. PETA KONSEP



F. MATERI PEMBELAJARAN

1.1 PENGERTIAN FUNGSI DAN SIFAT-SIFATNYA

Pada Bab. 5 Kelas X, kita telah mempelajari konsep relasi dan fungsi. Konsep tersebut merupakan materi prasyarat dalam mempelajari materi pada bab ini. Kita akan mempelajari dan menemukan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers dengan melakukan pengamatan dan pemahaman pada beberapa masalah dan contoh. Pertama sekali, mari kita ingat pengertian fungsi dan sifat-sifatnya.

Pengertian Fungsi

Misalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong. Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. Syarat suatu fungsi yaitu sebagai berikut:

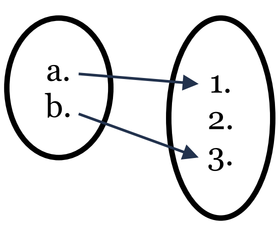
1. Semua anggota himpunan A mempunyai pasangan anggota himpunan B
2. Semua anggota himpunan A mempunyai pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan B

Sifat-sifat fungsi

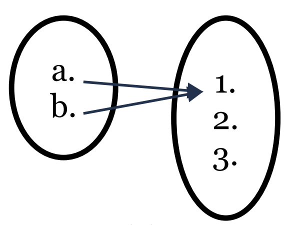
Beberapa sifat fungsi antara lain fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif

1. Fungsi injektif

   Fungsi injektif disebut juga fungsi into (satu-satu) . Suatu fungsi f : A $\longrightarrow$ B dikatakan fungsi injektif jika setiap anggota himpunan A mempunyai bayangan berbeda di B. Untuk lebih memahaminya, cermati diagram berikut!



(i)



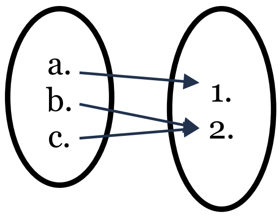
(ii)

(i) Diagram panah (i) termasuk fungsi injektif

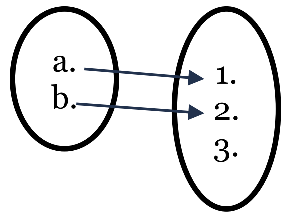
(ii) Diagram panah (ii) bukan fungsi injektif karena dua anggota himpunan A mempunyai pasangan yang sama dengan anggota himpunan B

2. Fungsi Surjektif

Fungsi Surjektif disebut juga fungsi onto (pada) . Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi surjektif jika setiap anggota himpunan B mempunyai prapeta dihimpunan B. Untuk lebih memahaminya, cermati diagram berikut!



(i)



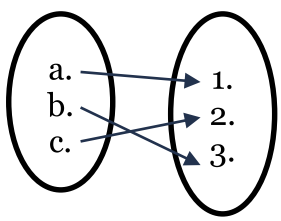
(ii)

(i) Diagram panah (i) termasuk fungsi surjektif

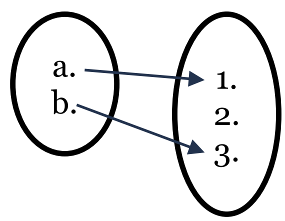
(ii) Diagram panah (ii) bukan fungsi surjektif karena terdapat anggota himpunan B yang tidak mempunyai prapeta di himpunan A

3. Fungsi Bijektif

Fungsi Bijektif disebut juga korespondensi satu-satu . Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi bijektif jika fungsi tersebut injektif dan juga surjektif. Untuk lebih memahaminya, cermati diagram berikut!



(i)



(ii)

(i) Diagram panah (i) termasuk fungsi bijektif

(ii) Diagram panah (ii) bukan fungsi bijektif

1.2 Operasi Aljabar pada Fungsi

Definisi

Jika suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut :

1. Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
2. Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai
   $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
3. Perkalian f dan g ditulis f x g didefinisikan sebagai
   $(f.g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$ dengan daerah asal $D_{f.g} = D_f \cap D_g$.
4. Pembagian $f\ dan\ g$ ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan seagai
   $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal D_f

Contoh

Diketahui fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya.

1. $(f+g)$
2. $(f-g)$
3. $(f.g)$
4. $(\frac{f}{g})$

Penyelesaian

Daerah asal fungsi $f(x) = x + 3$adalah $D_f = \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$ dan daerah asal fungsi $g(x) = x^2 - 9$ adalah $D_g = \{\ x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$.

a) $(f+g)(x)$= $f(x) + g(x)$

$$= (x+3) + (x^2 - 9)$$
$$= x^2 + x - 6$$

Daerah asal fungsi $(f+g)(x)$ adalah

$D_{f+g} \quad = D_f \cap D_g$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\} \cap \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$

b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (x+3) - (x^2 - 9)$

$= -x^2 + x + 12$

Daerah asal fungsi $(f-g)(x)$ adalah

$D_{f-g} \quad = D_f \cap D_g$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\} \cap \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$

c) $(f.g)(x) \quad = f(x).\, g(x)$

$= (x+3).\,(x^2 - 9)$

$= x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

Daerah asal fungsi $(f.g)(x)$ adalah

$D_{f.g} \quad = D_f \cap D_g$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\} \cap \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$

d) $(\frac{f}{g})(x) \quad = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{x+3}{x^2-9}$

$= \frac{x+3}{(x+3).(x-3)}$

$= \frac{1}{x-3}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\} \cap \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$dan $x^2 - 9 \neq 0$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$ dan $(x+3)(x-3) \neq 0$

$= \{x|\ x\epsilon\mathbb{R}\}$ dan $x \neq -3, x \neq 3$

$= \{x|x\epsilon\mathbb{R}, x \neq -3, x \neq 3\}$

Latihan

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ dan $g(x) = \sqrt{x - 2}$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya.

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

c) $(f.g)(x)$

d) $(\frac{f}{g})(x)$

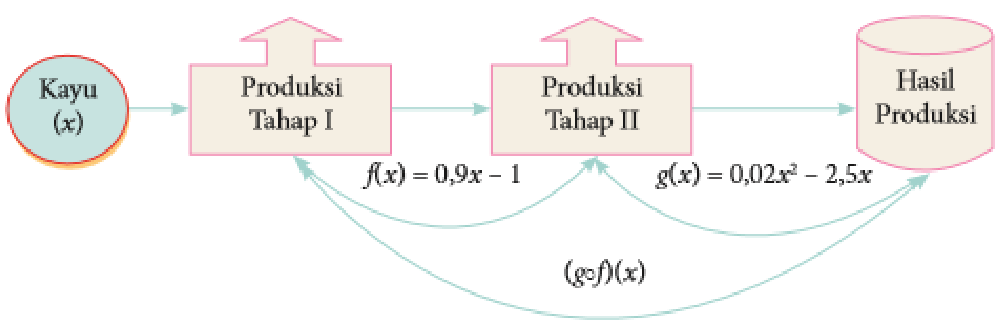
1.3 Menemukan Konsep Fungsi Komposisi

Masalah

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi. Tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya, mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi f(x) = 0,9x – 1 dan mesin II mengikuti fungsi g(x) = 0,02x2 – 2,5x, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 200 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (Kertas dalam satuan ton).

Alternatif Penyelesaian

Tahap-tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Terlihat jelas bahwa tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi setiap tahap dihitung sebagai berikut.

Hasil produksi tahap I

Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah $f(x) = 0{,}9x - 1$

Untuk $x = 200$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}9x - 1 \\ &= 0{,}9(200) - 1 \\ &= 179 \end{aligned}$$

Hasil produksi tahap I adalah 179 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II

Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah $g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(x) &= 0{,}02x^2 - 2{,}5x \\ &= 0{,}02(179)^2 - 2{,}5(179) \\ &= 640{,}82 - 447{,}5 \\ &= 193{,}32 \end{aligned}$$

Dengan demikian, hasil produksi tahap II adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Hasil produksi yang dihasilkan pabrik kertas tersebut jika bahan dasar kayunya sebanyak 200 ton adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Masalah di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.

Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

$f(x) = 0{,}9x - 1$ ....(i)

$g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$ ....(ii)

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), diperoleh fungsi

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 0{,}02(0{,}9x - 1)^2 - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}02(0{,}81x^2 - 1{,}8x + 1) - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}0162x^2 - 0{,}36x + 0{,}02 - 2{,}25x + 2{,}5 \\ &= 0{,}0162x^2 - 2{,}61x + 2{,}52 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh fungsi $g(f(x)) = 0{,}0162x^2 - 2{,}61x + 2{,}52$....(iii)

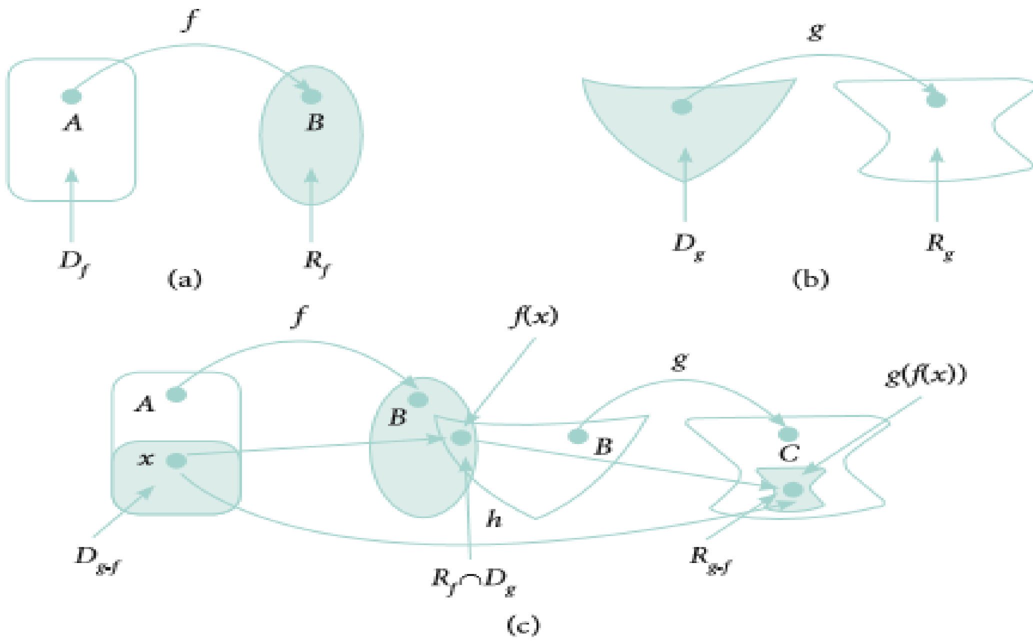
Jika disubstitusikan nilai $x = 200$ ke persamaan (iii), diperoleh:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 0{,}0162x^2 - 2{,}61x + 2{,}52 \\ &= 0{,}0162(200)^2 - 2{,}61(200) + 2{,}52 \\ &= 648 - 522 + 2{,}52 \\ &= 128{,}52 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 128,52 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan gof. Karena itu nilai gof di x ditentukan dengan $(gof)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Perhatikan Gambar berikut.



Berdasarkan Gambar di atas dapat dikemukakan beberapa hal berikut.

a) D_f = daerah asal fungsi f; R_f= daerah hasil fungsi f; D_g = daerah asal fungsi g; D_g = daerah hasil fungsi g; D_{gof} = daerah asal fungsi komposisi gof; R_{gof}= daerah hasil fungsi komposisi gof.

b) Fungsi $f$memetakan himpunan A ke himpunan B, ditulis f: $A \rightarrow B$. Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan Gambar (a).

c) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C, ditulis g: $B \rightarrow C$. Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan Gambar (b).

d) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B, ditulis h: $A \rightarrow C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan Gambar (c).

Berdasarkan beberapa hal di atas diperoleh definisi berikut.

Definisi

Jika f dan g fungsi serta $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f k ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis gof) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$$

daerah asal fungsi komposisi f dan g adalah $D_{gof} = \{x \in D_f \,|f(x) \in D_g\}$, dengan

D_f = daerah asal (domain) fungsi f;

D_g = daerah asal (domain) fungsi g;

R_f = daerah hasil (range) fungsi f;

R_g = daerah hasil (range) fungsi g.

Contoh

Diketahui fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x + 1$ dan fungsi $g: R \to R$ dengan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(fog)(x)$.

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2 - 1)\\ &= 2(x^2 - 1) + 1\\ &= 2x^2 - 2 + 1\\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

Jadi, rumus fungsi komposisi $(fog)(x) = 2x^2 - 1$

Contoh

Diketahui fungsi komposisi $(gof)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$.

Tentukan rumus fungsi $f(x)$.

Alternatif Penyelesaian

Menemtukan fungsi $f(x)$

$(gof)(x) = g(f(x)) = 18x^2 + 24x + 2$

$\leftrightarrow 2f(x)^2 - 6 = 18x^2 + 24x + 2$

$\leftrightarrow 2f(x)^2 = 18x^2 + 24x + 2 + 6$

$\leftrightarrow 2f(x)^2 = 18x^2 + 24x + 8$

$\leftrightarrow f(x)^2 = \dfrac{18x^2 + 24x + 2 + 6}{2}$

$\leftrightarrow f(x)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

$\leftrightarrow f(x) = \pm\sqrt{9x^2 + 12x + 4}$

$\leftrightarrow f(x) = \pm(3x + 2)$

Jadi, ada dua fungsi f yang mungkin, yaitu $f(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = -3x - 2$

Contoh

Diketahui fungsi komposisi $(gof)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$.

Tentukan fungsi komposisi $(fog)(x)$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$

$= 3g(x) + 2$, karena $f(x) = 3x + 2$

$= 3(2x^2 - 6) + 2$

$= 6x^2 - 18 + 2$

$= 6x^2 - 16$

Jadi, fungsi komposisi $(fog)(x) = 6x^2 - 16$

Untuk $\boldsymbol{f(x) = -3x - 2}$

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$

$= -3g(x) - 2$, karena $f(x) = -3x - 2$

$= -3(2x^2 - 6) - 2$

$$= -6x^2 + 18 - 2$$
$$= -6x^2 + 16$$

Jadi, fungsi komposisi $(fog)(x) = -6x^2 + 16$

1.4 Sifat-sifat Fungsi Komposisi

Contoh

Diketahui fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x - 1$, fungsi $g: R \to R$ dengan $g(x) = 4x + 5$ dan fungsi $h: R \to R$ dengan $g(x) = 3x - 3$.

Tentukanlah rumus fungsi komposisi $fo(goh)(x)$.

Penyelesaian

Misalkan $m(x) = (goh)(x)$

$$m(x) = (goh)(x) = g\big(h(x)\big) = 4\big(h(x)\big) + 5$$
$$= 4(2x - 3) + 5$$
$$= 8x - 12 + 5$$
$$= 8x - 7$$

$$(fo(goh)(x) = (fom(x))$$
$$= f(m(x))$$
$$= 2\big(m(x)\big) - 1$$
$$= 2(8x - 7) - 1$$
$$= 16x - 14 - 1$$
$$= 16x - 15$$

Jadi, rumus fungsi komposisi $\big(fo(goh)(x)\big) = 16x - 15$

Pahamilah contoh-contoh soal di bawah ini untuk memudahkan dalam menentukan sifat-sifat operasi fungsi komposisi.

Contoh

Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$dengan $f(x) = 4x + 3$ dan fungsi $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - 1$.

a) Tentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

b) Apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$? Coba selidiki.

Penyelesaian

a) Menentuka rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= g(4x + 3) \\ &= (4x + 3) - 1 \\ &= 4x + 2\end{aligned}$$

Menentukan rumus fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= f(x - 1) \\ &= 4(x - 1) + 3 \\ &= 4x - 4 + 3 \\ &= 4x - 1\end{aligned}$$

b) Tidak,.

$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ sebab

$4x + 2 \neq 4x - 1$ Untuk $x = 2$ diperoleh

$4(2) + 2 \neq 4(2) - 1$

$10 \neq 7$

Uji Kompetensi

1. Diketahui fungsi $f(x) = x + 5$ dan $g(x) = x^2 - 25$. Tentukanlah $(f + g)$.
2. Diketahui fungsi $f: R \to R$ dengan $f(x) = 7x + 2$ dan fungsi $g: R \to R$ dengan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(fog)(x)$.

Soal HOTs

Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ dinyatakan dengan $f(x) = x^2 + 2x - 5$ dan $g(x) = x - 2$. Jika $(fog)(x) = 3$. Nilai x yang memenuhi adalah . . .

a. -6 atau -1
b. -4 atau 2
c. -3 atau 2
d. -2 atau 4
e. -1 atau 6

Rangkuman

1. Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B
2. Terdapat 3 sifat fungsi yaitu, fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi injektif
3. Sifat-sifat operasi aljabar pada fungsi:
   a) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai
      $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
   b) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai
      $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
   c) Perkalian f dan g ditulis f x g didefinisikan sebagai
      $(f.\, g)(x) = f(x)\, .\, g(x)$ dengan daerah asal $D_{f.g} = D_f \cap D_g$.
   d) Pembagian $f\ dan\ g$ ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan seagai
      $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal D_f
4. Jika f dan g fungsi serta $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f k ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis gof) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$$

DAFTAR PUSTAKA

Boronok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Sudianto Manulang, Lasker Pangarapan Sinaga, Mangara Simanjorang. 2017. Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Anonim (2019, 2 Februari). *Soal HOTS Matematika SMA Materi Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers | Soal UNBK 03*. Dikutip 16 September 2019 dari Edumatik Net : https://m.youtube.com/watch?v=2gyCzpap6qM.