

MODUL PEMBELAJARAN DARING
MATA PELAJARAN MATEMATIKA
KELAS XI

BARISAN DAN DERET
ARITMETIKA

Disusun oleh

Nama : Fajrussathi'
Kelas : 180 – Matematika
No.PPG : 20030618010007
Unit kerja : SMK TI Kartika Cendekia Purworejo

PENDIDIKAN PROFESI GURU DALAM JABATAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS SARJANAWIYATA TAMANSISWA
2020

Pendahuluan

A. Definisi

Bahan ajar atau modul ini merupakan salah satu pelengkap dalam pelaksanaan proses pembelajaran matematika secara daring pada materi barisan Aritmetika untuk kelas XI SMK. Semoga dengan bahan ajar ini dapat mempermudah peserta didik dalam memahami materi barisan aritmetika ini.

B. Petunjuk Penggunaan

Berikut adalah langkah-langkah yang disarankan bagi peserta didik dalam menggunakan bahan ajar ini:

1. Bacalah doa terlebih dahulu sesuai dengan keyakinan masing-masing agar diberikan kemudahan dalam mempelajari materi dalam bahan ajar.
2. Bacalah kompetensi yang harus dicapai yang terletak sebelum pembahasan
3. Pahami contoh-contoh soal yang ada
4. Jika mempunyai kesulitan yang tidak dapat peserta didik pecahkan, catatlah kemudian tanyakan kepada guru melalui daring atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi bahan ajar ini.
5. Baca dan pahami rangkuman materi yang ada sebelum mengerjakan soal evaluasi.

C. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan peserta didik dapat:

1. Menentukan pola bilangan dan barisan bilangan
2. Menemukan rumus suku ke- n barisan aritmetika
3. Menentukan suku ke- n dan jumlah n suku suatu deret aritmetika

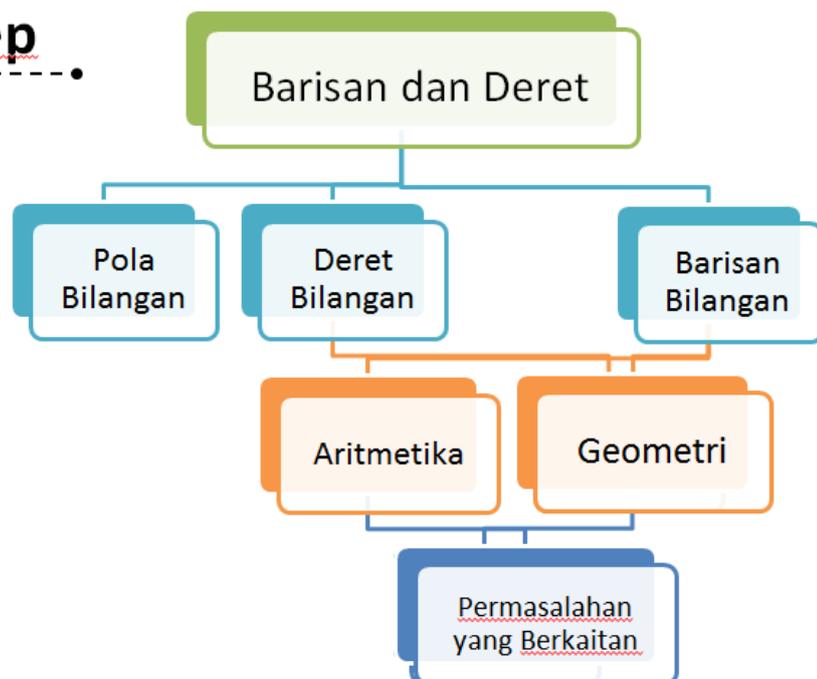
D. Waktu

6 x 45 menit (3 pertemuan)

Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
3.6 Menggeneralisasi pola bilangan dan jumlah pada barisan Aritmetika	3.6.1 Menentukan pola bilangan dan barisan bilangan 3.6.2 Menemukan rumus suku ke-n barisan aritmetika 3.6.3 Menentukan suku ke-n dan jumlah n suku suatu deret aritmetika
4.6 Menggunakan pola barisan aritmetika untuk menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual	4.6.1 Memecahkan masalah kontekstual dengan pola bilangan dan barisan bilangan 4.6.2 Memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmetika

Peta Konsep



MATERI

1. Pola Bilangan dan Barisan Bilangan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai barisan bilangan, dan biasanya kita diminta untuk dapat menentukan suku-suku berikutnya. Persoalan semacam ini kita jumpai ketika kita mengikuti tes psikologi, test intelegency question (IQ), tes kemampuan umum (TKU), tes potensi akademik (TPA), atau tes-tes psikologi untuk bidang-bidang keahlian tertentu, yaitu pada bagian tes seri (Tes Barisan dan Deret).

Dapatkan kamu menuliskan dua angka berikutnya yang mungkin untuk masing-masing barisan bilangan di bawah ini:

1. 1, 3, 5, ..., ...
2. 500, 400, 320, 260, ..., ...
3. 1, 1, 2, 3, 5, ..., ...
4. 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., ...

Barisan bilangan di atas sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Anda mungkin menjumpai barisan bilangan (1) jika mencari nomor rumah. Barisan (2) merupakan harga televisi dalam ribuan rupiah yang disusutkan 20% pertahun. Barisan (3) dan (4) adalah barisan Fibonacci yang dapat anda teliliti dalam susunan daun, segmen-segmen dalam buah nanas atau biji cemara.

Barisan bilangan

Agar kita lebih mudah memahami pengertian barisan bilangan, maka perhatikan contoh urutan bilangan berikut :

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

c) 1, 3, 3, 2, 9, ...

b) 2, 5, 8, 11, ...

d) 18, 4, 17, 16, 23, ...

Pada contoh a) dengan urutan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, ... mempunyai aturan tertentu adalah ditambahkan dengan 1. Sedangkan pada contoh b) dengan urutan 2, 5, 8, 11, ... mempunyai aturan tertentu adalah ditambah dengan 3. **Urutan bilangan yang memiliki aturan tertentu itu disebut barisan bilangan** . Sedangkan urutan bilangan – bilangan pada contoh c) dan d) di atas **tidak mempunyai aturan tertentu**, sehingga **bukan** merupakan suatu **barisan bilangan** .

Bentuk umum barisan bilangan dapat dinyatakan dengan :

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$$

Dengan : $U_1 = \text{suku ke} - 1$

$U_2 = \text{suku ke} - 2$

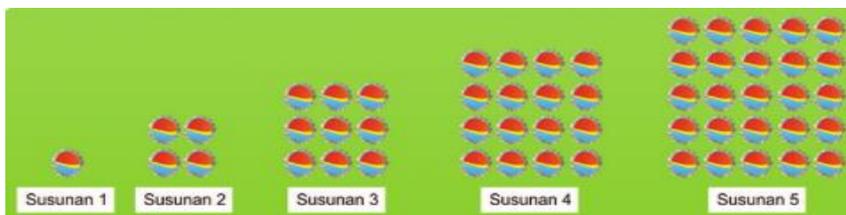
$U_3 = \text{suku ke} - 3$

.

$U_n = \text{suku ke} - n$ (suku ke-n barisan bilangan)

Contoh soal:

1. Beberapa tutup botol dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut.



- a. Hitunglah banyaknya tutup botol pada masing-masing susunan dari gambar di atas. Tuliskan dalam barisan bilangan sampai dengan susunan ke-6 !
 - b. Perhatikan pola bilangan yang telah kalian peroleh. Tentukan banyak tutup botol pada susunan ke-15?
2. Suatu grup nasyid dijadwalkan latihan setiap Rabu pada bulan Agustus. Jika latihan pertama dilakukan pada tanggal 3, tentukan jadwal latihan nasyid pada bulan tersebut.

Jawab:

1. a. 1, 4, 9, 16, 25, 36

b.

Susunan (Suku ke-)	Banyak tutup botol	Pola
U_1	1	$1 = 1 \times 1$
U_2	4	$4 = 2 \times 2$
U_3	9	$9 = 3 \times 3$
U_4	16	$16 = 4 \times 4$
U_n	$U_n = n^2$

Banyak tutup botol pada susunan ke-15 $\rightarrow U_n = n^2, U_{15} = 15^2 = 225$

2. Mencari polanya sebagai berikut.

Rabu ke-1 3

Rabu ke-2 $3 + 7 = 10$

Rabu ke-3 $10 + 7 = 17$

Rabu ke-4 $17 + 7 = 24$

Rabu ke-5 $24 + 7 = 31$

Jadi, jadwal latihan nasyid tersebut diperoleh dengan menambahkan 7 hari pada setiap suku.

Suku-suku pada barisan tersebut sebagai berikut.

Minggu Ke-	Tanggal	Pola
1	3	$3 = 7 \cdot 1 - 4$
2	10	$10 = 7 \cdot 2 - 4$
3	17	$17 = 7 \cdot 3 - 4$
4	24	$24 = 7 \cdot 4 - 4$
5	31	$31 = 7 \cdot 5 - 4$

Jadi, rumus berulang untuk barisan tanggal tersebut adalah $U_n = 7n - 4$

2. Barisan Aritmatika

Perhatikan beberapa barisan bilangan berikut ini

- a) 1, 3, 5, 7,
- b) 6,10,14,18,
- c) 11, 8, 3, 2,.....
- d) 20, 13, 10, 3,

Pada setiap barisan di atas, tampak bahwa selisih dua suku berurutan **selalu tetap**. Barisan bilangan yang mempunyai ciri seperti itu disebut **Barisan Aritmatika**, dan selisih dua suku berurutan itu disebut **beda** yang biasa dilambangkan dengan huruf **b**.

Misal :

- a) 1, 3, 3, 7,, $b = 3 - 1 = 3 - 3 = 7 - 3 = 2$
- b) 6,10,14,18,....., $b = 10 - 6 = 14 - 10 = 18 - 14 = 4$
- c) 1,8,3,2,....., $b = 8 - 1 = 3 - 8 = 2 - 3 = -3$
- d) 20, 13, 10, 3,...., $b = 13 - 20 = 10 - 13 = 3 - 10 = -3$

Suku pertama dari barisan aritmatika biasanya dilambangkan dengan huruf **a**.



Definisi

Jika terdapat suatu pola (aturan) tertentu antara suku- suku pada barisan yaitu selisih antara dua suku yang berurutan selalu tetap (konstan), maka barisan bilangan tersebut disebut **barisan aritmatika**.

1. Suku pertama dan beda pada barisan Aritmatika

Langkah awal dalam menyelesaikan permasalahan barisan aritmatika adalah menentukan suku pertama dan beda pada barisan.

Contoh soal

Tentukan suku pertama dan beda dari tiap barisan aritmatika berikut ini!

a) 7, 8, 9, 10,

b) 3, 8, 13, 18,

c) 9, 6, 3, 0,

Jawab :

a) 7, 8, 9, 10,

suku pertama : $a = 7$ dan beda : $b = 8 - 7 = 9 - 8 = 10 - 9 = 1$

b) 3, 8, 13, 18,

Suku pertama : $a = 3$ dan beda : $b = 8 - 3 = 13 - 8 = 18 - 13 = 3$

c) 9, 6, 3, 0,

Suku pertama : $a = 9$ dan beda : $b = 6 - 9 = 3 - 6 = 0 - 3 = -3$

Dengan memahami contoh tersebut maka kerjakan latihan berikut :

Latihan

Tentukan suku pertama dan beda dari barisan areitmatika di bawah ini

a. 2, 8, 14, 20, ...

b. 8, 11, 14, 17, ...

c. -6, -3, 0, 3, ...

d. $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, ...

2. Menemukan rumus suku ke-n barisan Aritmatika

Jika suku pertama (U_1) dinyatakan dengan a , selisih (beda) antara dua suku berurutan dinotasikan dengan b , dan suku barisan ke-n dilambangkan dengan U_n , maka bentuk umum barisan aritmatika adalah sebagai berikut :

$$U_1 = a = a + 0 \cdot b = a + (1 - 1)b$$

$$U_2 = U_1 + b = a + b = a + 1 \cdot b = a + (2 - 1)b$$

$$U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2 \cdot b = a + (3 - 1)b$$

$$U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3 \cdot b = a + (4 - 1)b$$

jadi

Rumus suku ke-n barisan Aritmatika

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Dengan $b = U_n - U_{n-1}$ dan b adalah konstanta yang tidak bergantung pada n .

3. Menentukan nilai suku ke-n barisan Aritmatika

Rumus suku ke-n barisan aritmatika yang sudah kita dapat adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Dengan :

n = banyak suku, $n \in$ bilangan asli

a = suku pertama

b = beda atau selisih

U_n = suku ke - n

Contoh soal

1. Tentukan rumus suku ke - n dari barisan aritmatika berikut jika di diketahui :
 - a) $a = 3$ dan $b = -4$
 - b) $a = 8$ dan $b = 3$
2. Tentukan suku pertama, beda, rumus suku ke - n dan suku ke - 12 dari barisan aritmatika 10, 13, 20, 23,
3. Diketahui barisan Aritmatika dengan suku ke-3 dan suku ke-7 adalah 8 dan 20. Tentukan rumus suku ke-n pada barisan tersebut!

Jawab :

1.

a) $a = 3$ dan $b = -4$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 3 + (n - 1) \cdot (-4)$$

$$U_n = 3 + (-4n + 4)$$

$$U_n = 3 - 4n + 4$$

$$U_n = 1 - 4n$$

b) $a = 8$ dan $b = 3$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 8 + (n - 1) \cdot 3$$

$$U_n = 8 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n + 3$$

2. Suku pertama : $a = 10$

Beda : $b = 13 - 10 = 3$

Rumus suku ke n : $U_n = a + (n - 1)b$

$$= 10 + (n - 1)3$$

$$= 10 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n + 3$$

Suku ke - 12 : $U_{12} = 3(12) + 3$

$$= 60 + 3$$

$$= 63$$

3. Diketahui:

$$U_3 = 8$$

$$U_7 = 20$$

Ditanya: rumus U_n

Penyelesaian:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Menggunakan metode eliminasi dan substitusi

$$U_3 = a + 2b \rightarrow 8 = a + 2b$$

$$U_7 = a + 6b \rightarrow \underline{20 = a + 6b} \quad -$$

$$-12 = -4b$$

$$b = 3$$

Untuk menemukan nilai a , $b=3$ substitusi ke $8 = a + 2b$

$$8 = a + 2(3)$$

$$8 = a + 6$$

$$8 - 6 = a$$

$$a = 2$$

Jadi rumus suku ke- n adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 2 + (n - 1)3$$

$$U_n = 2 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n - 1$$

Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan barisan aritmatika

Beberapa contoh masalah dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan aplikasi dari barisan aritmatika dan alternatif cara penyelesaiannya akan kita pelajari bersama- sama.

1. Banyak kursi baris depan pada gedung pertunjukkan 15 buah. Banyak kursi pada baris di belakangnya selalu lebih 4 buah dari kursi pada baris di depannya. Jika dalam gedung ada 20 baris kursi, maka banyak kursi pada baris ke-20 di gedung tersebut adalah...

Penyelesaian:

Barisan bilangan dari data itu : 15, 19, 23, 27, ...

suku pertama (a) = 15

beda (b) = 4

n = 20

$$U_n = a + (n-1) b$$

$$U_{20} = 15 + (20-1) 4$$

$$= 15 + (19) 4$$

$$= 15 + 76$$

$$= 91$$

Jadi, banyak kursi pada baris ke-20 adalah 91 kursi.

2. Suatu perusahaan memproduksi 5.000 unit barang pada tahun pertama. Pada tahun-tahun berikutnya, hasil produksi turun secara bertahap sebesar 80 unit per tahun, tentukan pada tahun keberapa perusahaan tersebut hanya memproduksi 3.000 unit?

Penyelesaian:

Penurunan produksi bernilai tetap, berarti merupakan persoalan barisan aritmatika dengan

beda $b = -80$, $a = 5.000$, dan $U_n = 3.000$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$3.000 = 5.000 + (n - 1)(-80)$$

$$3.000 = 5.000 - 80n + 80$$

$$80n = 5.000 + 80 - 3000$$

$$80n = 2.080$$

$$n = 26$$

Jadi, perusahaan tersebut hanya memproduksi 3.000 unit barang pada tahun ke-26

3. Deret Aritmatika

Perhatikan masalah berikut!

Suatu pabrik X memproduksi barang A ditahun pertamanya sebanyak 1.960 unit. Karena banyaknya pesaing dan kendala pemasaran pabrik menurunkan jumlah produksi sebesar 120 unit. Begitu juga ada tahun ketiga dan tahun tahun berikutnya dengan jumlah penurunan yang sama sampai pada tahun ke-16. Dapatkah kalian menghitung jumlah barang A yang telah diproduksi pabrik tersebut dari tahun perama hingga tahun ke-16?

Permasalahan diatas adalah salah satu contoh permasalahan berkaitan dengan deret aritmetika. Deret aritmetika merupakan jumlahan beruntun suku – suku barisan aritmetika. Jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ merupakan barisan aritmetika maka $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ merupakan deret aritmetika dengan U_n adalah suku ke- n . Susunan jumlah suku-suku barisan aritmetika, dinyatakan sebagai berikut.

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

...

$$S_{(n-1)} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{(n-1)}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{(n-1)} + u_n$$

n merupakan bilangan asli.

Deret aritmetika adalah barisan jumlah n suku pertama barisan aritmetika, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{(n-1)}, S_n$ dengan $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{(n-1)} + u_n$.

Untuk menentukan jumlah n suku pertama ditentukan rumus sebagai berikut :

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \dots + (a+(n-1)b) \dots\dots\dots (i)$$

Jika urutan penulisan suku – suku dibalik maka diperoleh

$$S_n = U_n + (U_n-b) + (U_n-2b) + \dots + a \dots\dots\dots (ii)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (i) dan (ii) diperoleh:

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b)$$

$$S_n = U_n + (U_n-b) + (U_n-2b) + \dots + (a + b) + a$$

$$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n)$$

$$2S_n = n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Secara umum, jumlah n suku pertama deret aritmetika dapat ditulis:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

dengan S_n : jumlah n suku pertama
 U_n : suku ke - n
 a : suku pertama
 b : beda
 n : banyak suku

Untuk setiap n berlaku $U_n = S_n - S_{n-1}$

Contoh Soal

1. Diketahui rumus suku ke - n suatu deret aritmetika $U_n = 6 - 2n$. Hitunglah jumlah 20 suku pertamanya.

Jawab :

$$U_1 = 6 - 2.1 = 4$$

$$U_{20} = 6 - 2.20 = -34$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(4 + (-34)) = 10(-30) = -300$$

Jadi, jumlah 20 suku pertamanya adalah - 300.

2. Hitung jumlah deret $4 + 9 + 14 + \dots + 104$

Jawab :

$$a = 4, b = 5, U_n = 104$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$104 = 4 + (n - 1).5$$

$$104 = 4 + 5n - 5$$

$$104 = -1 + 5n$$

$$105 = 5n$$

$$n = 21$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(4 + 104) = 1.134$$

3. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret aritmetika : $11 + 16 + 21 + \dots$

Jawab :

$$a = 11, b = 16 - 11 = 5, n = 10$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2.11 + (10-1)5) = 5(22 + 45) = 5.67 = 335$$

4. Gaji seorang karyawan setiap bulan dinaikkan sebesar Rp. 50.000,00. Jika gaji pertama karyawan tersebut Rp. 1.000.000,00, tentukan gaji selama satu tahun pertama.

Jawab :

$$a = 1.000.000, b = 50.000, n = 12 \text{ bulan}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times 1.000.000 + (12-1)(50.000))$$

$$= 6(2.000.000 + 11(50.000))$$

$$= 6(2.550.000) = 15.300.000$$

Jadi, jumlah gaji karyawan tersebut selama setahun adalah Rp. 15.300.000,00

5. Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah $S_n = 2n^2 - 3n + 5$. Tentukan suku kesepuluh deret tersebut.

Jawab :

$$S_n = 2n^2 - 3n + 5$$

$$S_{n-1} = 2n^2 - 7n + 10$$

$$U_n = 4n - 5$$

$$\text{Jadi } U_{10} = 4 \cdot 10 - 5 = 35$$

Rangkuman Materi:

1. Barisan aritmetika memiliki pola yaitu selisih antara dua suku yang berurutan selalu tetap
2. Rumus suku ke- n barisan aritmetika: $U_n = a + (n - 1)b$
3. Deret aritmetika adalah barisan jumlah n suku pertama dari barisan aritmetika
4. Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Buku Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI edisi revisi 2017. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia
2. Buku Matematika untuk SMK/MAK Kelas X kurikulum 2013. Kasmira dan Toali.

Ayo Berlatih



- Lanjutkan 3 bilangan dari barisan berikut ini
 - 5, 22, 39, 56, ... , ... , ...
 - 1, 8, 27, 64, ... , ... , ...
 - 111, 88, 65, 42, ... , ... , ...
- Tuliskan 5 suku pertama dari rumus suku berikut:
 - $U_n = 3n - 1$
 - $U_n = n^2 + 3$
 - $U_n = \frac{n+1}{n}$
- Tentukan suku pertama, beda dan rumus untuk suku ke- n dari barisan aritmetika berikut:
 - 1, 4, 7, 10, ...
 - 3, 9, 15, 21, ...
 - 95, 88, 81, 74, ...
- Tentukan suku pertama, beda dan suku ke-50 (U_{50}) dari dua suku yang diketahui sebagai berikut:
 - $U_{10} = 33$ dan $U_{17} = 53$
 - $U_3 = 4$ dan $U_6 = -2$
- Banyak kursi baris depan pada gedung pertunjukkan 12 buah. Banyak kursi pada baris di belakangnya selalu lebih 6 buah dari kursi pada baris di depannya. Jika dalam gedung ada 10 baris kursi, maka banyak kursi pada baris ke-10 di gedung tersebut adalah...
- Untuk membuat ulir disediakan roda gigi pengganti. Banyak ulir yang dibuat oleh roda gigi masing-masing membentuk barisan aritmatika, yaitu 20,25,30,...120. Tentukan banyak roda gigi yang disediakan!
- Diketahui barisan aritmetika 36, 30, 24, ... Tentukan jumlah 15 suku pertamanya.
- Suku ke-6 dari suatu barisan aritmetika adalah 19 dan suku ke-10 adalah 30. Tentukan jumlah 10 suku pertamanya.
- Jumlah deret aritmetika $3 + 5 + 7 + 9 + \dots$ adalah 1.763. Tentukan banyak suku dan suku terakhir deret tersebut.
- Seutas pita dibagi menjadi 10 bagian dengan panjang yang membentuk deret aritmatika. Jika pita yang pendek 20 cm dan yang terpanjang 155 cm, maka panjang pita semula adalah