

MODUL MATEMATIKA



INTEGRAL

Modul Matematika
INTEGRAL
Untuk SMK Kelas XII

Penulis : Fita Marwanti, S. Pd

Sekolah Menengah Kejuruan Negeri 1 Juwangi
Dinas Pendidikan dan Kebudayaan
Pemerintah Provinsi Jawa Tengah
2020

I. KOMPETENSI DASAR

3.33 Menentukan nilai integral tak tentu dan tentu pada fungsi aljabar.

4.33 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu dan tentu fungsi aljabar.

II. INDIKATOR

3.33.1 Peserta didik dapat menemukan konsep integral tak tentu sebagai balikan dari turunan fungsi.

3.33.2 Peserta didik dapat menyajikan antiturunan dari fungsi aljabar dengan menggunakan konsep integral tak tentu sebagai balikan dari turunan fungsi.

3.33.3 Peserta didik dapat menentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar dengan metode substitusi.

3.33.4 Peserta didik dapat menyajikan proses mencari hasil integral tak tentu dari fungsi aljabar dengan metode substitusi.

3.33.5 Peserta didik dapat menghitung nilai integral tentu dari fungsi aljabar.

3.33.6 Peserta didik dapat menyajikan proses menghitung nilai dari integral tentu dari fungsi aljabar.

4.33.1 Peserta didik dapat memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tentu dari fungsi aljabar.

4.33.2 Peserta didik dapat memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu dari fungsi aljabar dengan metode substitusi.

4.33.3 Peserta didik dapat memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tentu dari fungsi aljabar.

III. TUJUAN PEMBUATAN MODUL

1. Peserta didik dapat menemukan konsep dan memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu sebagai antiturunan fungsi aljabar.
2. Peserta didik dapat memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu fungsi aljabar dengan metode substitusi,
3. Peserta didik dapat memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tentu pada fungsi aljabar.

IV. MATERI PEMBELAJARAN

1. Integral tak tentu sebagai antiturunan pada fungsi aljabar
2. Integral tak tentu pada fungsi aljabar dengan metode substitusi
3. Integral tentu pada fungsi aljabar

V. DESKRIPSI

Modul matematika ini merupakan modul yang dirancang untuk membantu kebutuhan peserta didik dalam belajar mandiri terutama dalam memahami materi Integral. Terutama Integral tak tentu dan integral tentu pada fungsi aljabar.

Kata Pengantar

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan penulis kemudahan dalam menyelesaikan modul dengan tepat waktu. Tanpa rahmat dan pertolongan-Nya, penulis tidak akan mampu menyelesaikan makalah ini dengan baik. Tidak lupa shalawat serta salam tercurahkan kepada Nabi agung Muhammad SAW yang syafa'atnya kita nantikan kelak di yaumul qiyamah.

Penulis mengucapkan syukur kepada Allah SWT atas limpahan nikmat sehat-Nya, sehingga modul "Integral" ini dapat diselesaikan. Modul ini disusun guna memenuhi kebutuhan siswa dalam belajar matematika pada materi integral tak tentu dan integral tentu secara mudah, terstruktur dan mandiri. Penulis berharap modul ini dapat menjadi referensi bagi peserta didik dalam mempelajari Integral tak tentu dan integral tentu.

Penulis menyadari modul integral ini masih perlu banyak penyempurnaan karena kesalahan dan kekurangan. Penulis terbuka terhadap kritik dan saran pembaca agar modul ini menjadi lebih baik. Apabila terdapat banyak kesalahan pada makalah ini, baik terkait penulisan maupun gambar, penulis memohon maaf.

Demikian yang dapat penulis sampaikan. Akhir kata, semoga modul ini dapat bermanfaat. Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Boyolali, 21 September 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman Sampul	i
Kata Pengantar.....	ii
Daftar isi	iii
Pendahuluan.....	1
PetaKonsep.....	2
Integral Tak Tentu	
Apersepsi	3
Integral Tak Tentu sebagai antiturunan.....	4
Asah kemampuan.....	8
Integral Tak Tentu fungsi aljabar dengan metode substitusi.....	9
Asah kemampuan.....	11
Integral Tentu.....	12
Asah kemampuan.....	13

BAB I

PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini Anda akan mempelajari konsep integral tak tentu sebagai balikan dari turunan fungsi aljabar, menentukan hasil integral tak tentu dengan metode substitusi pada fungsi aljabar, menghitung integral tentu pada fungsi aljabar.

B. Prasyarat

Untuk mempelajari modul ini, para siswa diharapkan telah menguasai konsep differensial / turunan fungsi aljabar.

C. Petunjuk

Penggunaan Modul Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu Anda lakukan adalah sebagai berikut:

1. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
2. Pahami contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
3. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Jika Anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat Anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Menemukan konsep integral sebalikan dari turunan fungsi aljabar.
2. Menyajikan proses mencari integral tak tentu dengan konsep turunan dan dengan metode substitusi pada fungsi aljabar.
3. Menghitung nilai integral tentu pada fungsi aljabar.
4. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu dan integral tentu pada fungsi aljabar .

PETA
KONSEP

INTEGRAL

Integral Tak Tentu

Integral Tentu

1. Integral tak tentu fungsi aljabar sebagai antiturunan
2. Integral tak tentu fungsi aljabar dengan metode substitusi

BAB II PEMBELAJARAN

APERSEPSI



Gambar Bongkar muat barang di pelabuhan.

Perhatikan gambar di atas ! Apa yang kalian pikirkan tentang gambar tersebut ?

Dari kegiatan pada gambar tersebut adalah membongkar muatan dari kapal dan memuat Kembali pada kendaraan angkutan. Jadi membongkar adalah kebalikan dari memuat. Dalam matematika juga terdapat hal yang saling berkebalikan misalnya penjumlahan kebalikan dari pengurangan, pembagian adalah kebalikan dari perkalian, kuadrat bilangan adalah kebalikan dari penarikan akar, begitu pula dengan integral adalah kebalikan dari turunan atau bisa disebut sebagai antuturunan.

A. Integral sebagai anti turunan

Definisi:

$F(x)$ disebut anti turunan dari $f(x)$ pada interval I , jika $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ untuk semua x dalam I .

Tabel 1. Hubungan antara fungsi dan turunan fungsinya

Fungsi [$F(x)$]	Fungsi Turunan [$f(x)$]
$y = 2x^5$	$y' = 2(5)x^{5-1} = 10x^4$
$y = 2x^5 + 15$	$y' = 2(5)x^{5-1} = 10x^4$
: $F(x)$ disebut anti turunan dari $f(x)$ pada interval I , jika $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ untuk semua x dalam I .	$y' = 2(5)x^{5-1} = 10x^4$
$y = 2x^5 + c$	$y' = 2(5)x^{5-1} = 10x^4$

Perhatikan tabel di atas dengan baik.

Beberapa fungsi yang berbeda memiliki turunan yang sama untuk $x \in R$. Dapat dikatakan bahwa antiturunan dari $f(x) = 10x^4$ adalah $F(x) = 2x^5 + C$ dengan C adalah sembarang konstanta.

Proses untuk menentukan antiturunan dari suatu fungsi disebut pengintegralan. Dari tabel di atas dapat disimpulkan, jika dituliskan dalam bentuk umum adalah sebagai berikut :

$$\int f(x) = F(x) + C$$

Semua antiturunan dari $f(x)$ dinotasikan dengan $\int f(x)dx$ (dibaca “intrgral $f(x)$ terhadap x ”). Bentuk $\int f(x)dx$ disebut integral tak tentu dan $f(x)$ di sebut integran.

Dengan mengamati tabel tersebut diperoleh

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

Dengan n bilangan rasional dan $n \neq -1$

Contoh

$$1. \int 4 dx = \int 4 x^0 dx = \frac{4}{0+1} x^{0+1} + C = 4x + C$$

$$2. \int 5x^2 dx = \frac{5}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{5}{3} x^3 + C$$

$$3. \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + C = -\frac{1}{3} x^{-3} + C$$

$$4. \int \sqrt[3]{x^4} dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{\frac{4}{3}+1} x^{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{1}{\frac{7}{3}} x^{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$$



Kunjungi

<https://www.youtube.com/watch?v=XCdIO9BPwRg&t=94s>

Untuk soal dan pembahasan yang lain.

Untuk membantu dalam penyelesaian permasalahan integral tak tentu, terdapat beberapa sifat integral tak tentu, sebagai berikut.

1. $\int a \, dx = ax + C$; a adalah konstanta
2. $\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$; a adalah konstanta
3. $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
4. $\int (f(x) - g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$

**DID YOU
KNOW?**



Contoh

Selesaikan integral-integral berikut !

1. $\int (x - 2)^2 \, dx$
2. $\int \frac{x+2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
3. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^3} \, dx$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} 1. \int (x-2)^2 dx &= \int (x-2)(x-2) dx \\ &= \int (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \frac{1}{2+1} x^{2+1} - \frac{4}{1+1} x^{1+1} + 4x + C \\ &= \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \frac{x+2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(x^{1-\frac{1}{2}} + 2x^{0-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 1) dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{2}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} - x + C \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - x + C \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - x + C \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{x^2-5x+6}{x^3} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{6}{x^3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - 5x^{-2} + 6x^{-3} \right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{5}{-2+1} x^{-2+1} + \frac{6}{-3+1} x^{-3+1} + C \\ &= \ln|x| - 5x - 3x^{-2} + C \end{aligned}$$

Informatif

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{a}{x} dx = a \ln|x| + C$$

ln merupakan logaritma natural

Asah Kemampuan

Tentukan integral tak tentu berikut ini !

1. $\int (x^2 - 1) dx$

2. $\int (x - 3)^2 dx$

3. $\int (3x^2 + 4x + 5) dx$

4. $\int 2x \left(3x - \frac{1}{x}\right) dx$

5. $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt{x}) dx$

6. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2} dx$

7. $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} dx$

8. $\int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$

9. $\int \frac{x^3 + x}{x} dx$

10. $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$

B. Integral tak tentu pada fungsi aljabar dengan Metode Substitusi

$$\text{Jika } u \text{ fungsi dalam } x, \text{ maka: } \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$$

$$\text{Jika } u \text{ fungsi dalam } x, \text{ maka: } \int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c$$

Jika $u = g(x)$ dan $du = u' = g'(x) dx$ dengan $g(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan dan F adalah antiturunan dari f , maka metode substitusi dirumuskan :

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Integral dengan substitusi merupakan cara penyelesaian integral dengan memasukkan variabel baru yang tujuannya untuk memudahkan menyelesaikan integral tersebut.

Contoh

Tentukan integral-integral berikut !

1. $\int (2x - 5)^{15} dx$
2. $\int 6x^2(2x^3 + 7)^8 dx$
3. $\int \sqrt{(3x - 5)} dx$
4. $\int \frac{dx}{-2x+3}$

Penyelesaian :

1. $\int (2x-5)^{15} dx = \dots ?$

Misal : $u = 2x - 5 \rightarrow du = d(2x - 5) = 2 dx$

$$\int (2x-5)^{15} dx = \int u^{15} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} u^{16} + c = \frac{1}{32} (2x-5)^{16} + c$$

2. $\int 6x^2 (2x^3 + 7)^8 dx = \dots ?$

Misal : $u = 2x^3 + 7 \rightarrow du = 6x^2 dx$

$$\int 6x^2 (2x^3 + 7)^8 dx = \int u^8 du = \frac{1}{9} u^9 + c = \frac{1}{9} (2x^3 + 7)^9 + c$$

3. $\int \sqrt{3x-5} dx = \dots ?$

Misal : $u = 3x - 5 \rightarrow du = 3 dx$

$$\int \sqrt{3x-5} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{9} (3x-5) \sqrt{3x-5} + c$$

4. $\int \frac{dx}{-2x+3} = \dots ?$

Misal : $u = -2x + 3 \rightarrow du = -2 dx$

$$\int \frac{dx}{-2x+3} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{-2} du = -\frac{1}{2} \ln u + c = -\frac{1}{2} \ln(-2x+3) + c$$



Kunjungi

<https://www.youtube.com/watch?v=4cmMQipHHmU>

untuk mencari contoh soal dan pembahasan yang lain

Asah Kemampuan

Kerjakan soal berikut

Tentukan integral tak tentu berikut dengan metode substitusi !

1. $\int (2x + 1)^4 dx$

2. $\int x\sqrt{x^2 + 5} dx$

3. $\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$

4. $\int \frac{6}{2x+2} dx$

5. $\int \frac{x+5}{x+2} dx$

Tetap Semangat ya....

C. Integral Tentu

Jika $f(x)$ kontinu pada interval tertutup $a \leq x \leq b$ dan $F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$, maka diperoleh

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Dengan : $F(x)$ = fungsi hasil integral dari $f(x)$

$F(b)$ = Nilai fungsi $F(x)$ untuk $x = b$

$F(a)$ = Nilai fungsi $F(x)$ untuk $x = a$

a = fungsi bawah

b = fungsi atas

Contoh

Tentukan nilai integral berikut !

1. $\int_1^2 x^3 dx$

2. $\int_0^1 (2x + 3x^2) dx$

3. $\int_1^2 \frac{1}{2} x^3 dx$

Kunjungi

<https://www.youtube.com/watch?v=17DyHWRIBbQ>

untuk mencari contoh soal dan pembahasan lainnya.

Penyelesaian :

1) $\int_1^2 x^3 dx = \left. \frac{1}{4} x^4 \right|_1^2 = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 \right) = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$

2) $\int_0^1 (2x + 3x^2) dx = \left. x^2 + x^3 \right|_0^1 = (1^2 + 1^3) - (0^2 + 0^3) = 2 - 0 = 2$

3) $\int_1^2 \frac{1}{2} x^3 dx = \left. \frac{1}{8} x^4 \right|_1^2 = \left(\frac{1}{8} \cdot 2^4 \right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 1^4 \right) = \frac{16-1}{8} = \frac{15}{8}$

Asah Kemampuan

Kerjakan soal berikut dengan benar dan teliti !

Tentukan integral tertentu berikut

1. $\int_0^4 (7 - x) dx$

2. $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) dx$

3. $\int_0^2 \frac{1}{3} x^2 dx$

4. $\int_{-1}^1 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) dt$

5. $\int_2^3 \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{x^2} dx$

6. $\int_{-1}^1 12x(x+1)(x-1) dx$

**Selamat mencoba &
Semoga sukses**