

MODUL 1

RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS



Penulis

Ade Jajang Jaelani, S.Pd

Deskripsi

Modul bahan ajar ini merupakan pelengkap dari buku Matematika Umum kelas XI Peminatan IPA. Modul ini disusun dengan tujuan agar Anda bisa mendapatkan panduan pembelajaran mandiri. Modul ini menyediakan materi terkait mata pelajaran, panduan contoh soal yang dilengkapi penyelesaian, uji kompetensi, dan rangkuman materi.

Prasyarat

Modul ini akan mengajak Anda mengenal materi rumus jumlah dan selisih trigonometri yang terdiri dari rumus perkalian sinus dan cosinus dan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

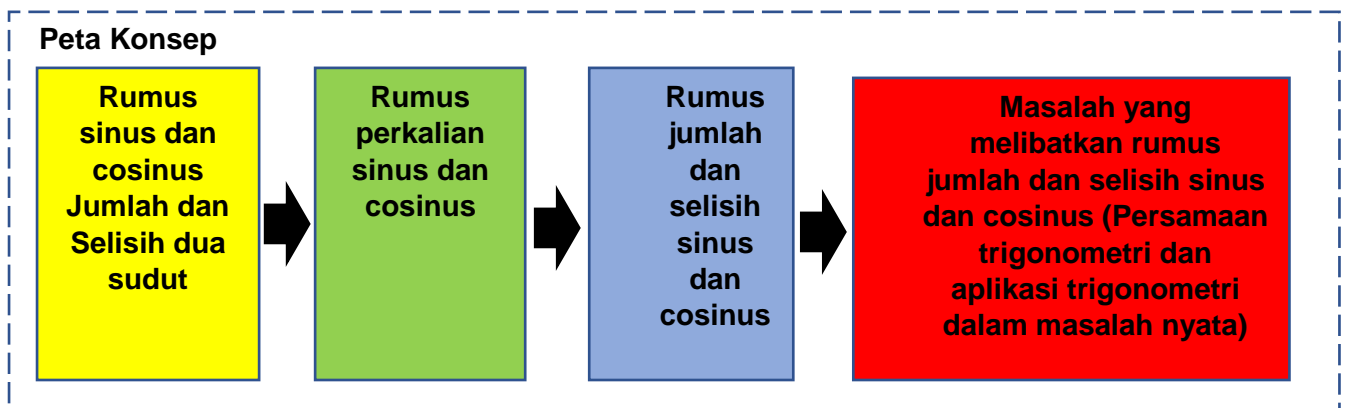
Panduan Belajar

No KD	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	Alokasi Waktu
3.2.	Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus	3.2.18. Menyatakan hubungan antara rumus sinus, cosinus jumlah dan selisih dua sudut dalam perkalian sinus dan cosinus. 3.2.19. Membuktikan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.20. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.21. Membuktikan rumus jumlah dan selisih sinus, menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.22. Membuktikan rumus jumlah dan selisih cosinus menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut dan rumus perkalian sinus dan cosinus 3.2.23. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus 3.2.24. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih cosinus 3.2.25. Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam menyelesaikan 3.2.26. Menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri dengan	8 x 45'

No KD	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi	Alokasi Waktu
		menggunakan jumlah dan selisih sinus dan cosinus Menganalisis rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus dalam penerapannya pada masalah nyata	
4.2	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus	4.2.1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus 4.2.2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.3. Menyelesaikan masalah berkaitan persamaan trigonometri yang berkaitan jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.4. Menyelesaikan permasalahan nyata yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus.	

Halo semuanya, bagaimana kabarnya? Semoga kabar baik. Selamat bertemu pada modul Jumlah dan selisih sinus dan cosinus. Modul ini yang akan mengantarkan Anda untuk dapat menguasai kompetensi, baik pengetahuan, keterampilan, maupun sikap sesuai dengan kurikulum 2013. Dalam modul ini terdiri dari beberapa kegiatan belajar diantaranya:

1. Kegiatan Belajar 1: Rumus perkalian sinus dan cosinus
2. Kegiatan Belajar 2: Rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus
3. Kegiatan Belajar 3: Persamaan Trigonometri & masalah yang melibatkan trigonometri



Kegiatan Belajar 1

RUMUS PERKALIAN SINUS DAN COSINUS



“Setiap orang itu berkompeten dan setiap masalah dapat diselesaikan, maka yakinlah bahwa Anda mampu menyelesaikan semua masalah jika Anda mau.”

Indikator Pencapaian Kompetensi

Pengetahuan :

- 3.2.18. Menyatakan hubungan antara rumus sinus, cosinus jumlah dan selisih dua sudut dalam perkalian sinus dan cosinus.
- 3.2.19. Membuktikan rumus perkalian sinus dan cosinus
- 3.2.20. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus

Keterampilan :

- 4.2.5 Terampil dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian

Selamat datang peserta didik pada modul pembelajaran mandiri. Pada kegiatan belajar 1 ini, Anda akan mempelajari rumus perkalian sinus dan cosinus

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar 1, Anda sebagai peserta didik dapat:

1. Menyatakan hubungan antara rumus sinus, cosinus jumlah dan selisih dua sudut dalam perkalian sinus dan cosinus
2. Membuktikan rumus perkalian sinus dan cosinus dengan tepat
3. Menentukan nilai trigonometri dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus

Setelah melakukan kegiatan diskusi, peserta didik dapat menyelesaikan masalah untuk mencapai tujuan pembelajaran di atas, langkah pertama silakan Anda pelajari dan pahami uraian materi berikut.



Uraian Materi

1. Rumus perkalian sinus dan cosinus

A. Rumus sin dikali sin

Rumus sin dikali sin merupakan rumus perkalian antara sin dan sin yang diperoleh dari perkalian dua sudut sin. Bentuk rumus perkalian sin dikali sin adalah sebagai berikut :

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

Ada cara yang dapat digunakan untuk menghafal rumus perkalian dua sudut sinus. Cara tersebut adalah menghafal rumus perkalian dua sudut sinus menggunakan kalimat berikut *min dua sin sin sama dengan cos jumlah dikurang cos selisih*

Pembuktian rumus $-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$, rumus ini diperoleh dari pengurangan cos dua sudut :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.

Nyatakanlah dalam bentuk perkalian :

- $\cos(x+a) - \cos(x-a)$
- $\cos(x+45^\circ) - \cos(x-45^\circ)$

Jawab :

$$\begin{aligned}\text{a. } \cos(x+a) - \cos(x-a) &= (\cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a) - (\cos x \cdot \cos a + \sin x \cdot \sin a) \\ &= \cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a - \cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a \\ &= -2\sin x \cdot \sin a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b. } \cos(x+45^\circ) - \cos(x-45^\circ) &= (\cos x \cdot \cos 45^\circ - \sin x \cdot \sin 45^\circ) - (\cos x \cdot \cos 45^\circ + \sin x \cdot \sin 45^\circ) \\ &= (\cos x \cdot \cos 45^\circ - \sin x \cdot \sin 45^\circ - \cos x \cdot \cos 45^\circ - \sin x \cdot \sin 45^\circ) \\ &= -2\sin x \cdot \sin 45^\circ \\ &= -2\sin x \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\ &= -\sqrt{2} \cdot \sin x\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.2

Nyatakanlah dalam bentuk jumlah dan selisih :

$$\begin{aligned}\text{a. } -2\sin 80^\circ \cdot \sin 50^\circ &= \cos(80^\circ + 50^\circ) + \cos(80^\circ - 50^\circ) \\ &= \cos 130^\circ + \cos 30^\circ \\ &= \cos 130^\circ - \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b. 2 \sin a \cdot \sin 3a &= -(\cos(a + 3a) + \cos(a - 3a)) \\
&= -(\cos 4a + \cos(-2a)) \\
&= -(\cos 4a + \cos 2a) \\
&= -\cos 4a - \cos 2a
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.3

Tentukanlah nilai dari :

a. $2 \sin 75^\circ \sin 15^\circ$

b. $8 \sin 82,5^\circ \sin 37,5^\circ$

Jawab :

$$\begin{aligned}
a. 2 \sin 75^\circ \sin 15^\circ &= -(\cos(75^\circ + 15^\circ) + \cos(75^\circ - 15^\circ)) \\
&= -(\cos 90^\circ + \cos 60^\circ) \\
&= -(0 + \frac{1}{2}) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b. -8 \sin 82,5^\circ \sin 37,5^\circ &= 4(-2 \sin 82,5^\circ \sin 37,5^\circ) \\
&= 4(\cos(82,5^\circ + 37,5^\circ) + \cos(82,5^\circ - 37,5^\circ)) \\
&= 4(\cos 120^\circ + \cos 45^\circ) \\
&= 4(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \\
&= -2 + 2\sqrt{2} \\
&= 2(\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

B. Rumus cos dikali sin

Rumus cos dikali sin merupakan rumus perkalian antara cos dan sin yang diperoleh dari perkalian dua sudut cos dan sin. Bentuk rumus perkalian cos dikali sin adalah sebagai berikut :

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

Kalimat yang dapat digunakan untuk menghafal rumus perkalian cos dan sin adalah dua cos sin sama dengan sin jumlah dikurang sin selisih.

Pembuktian rumus $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$, rumus ini diperoleh dari pengurangan sin dua sudut :

$$\begin{array}{rcl}
\sin(\alpha + \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
\sin(\alpha - \beta) & = & \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta
\end{array}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

Contoh Soal 2.1.

Nyatakanlah dalam bentuk perkalian :

a. $\sin(a+b) - \sin(a-b)$

b. $\sin(x+30^\circ) - \sin(x-30^\circ)$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{a. } \sin(a+b) - \sin(a-b) &= ((\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b) - (\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b)) \\ &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \\ &= 2 \cos a \cdot \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sin(\alpha+30^\circ) - \sin(\alpha-30^\circ) &= (\sin \alpha \cdot \cos 30^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ) - (\sin \alpha \cdot \cos 30^\circ - \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ) \\ &= (\sin \alpha \cdot \cos 30^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ - \sin \alpha \cdot \cos 30^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ) \\ &= \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ \\ &= 2 \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ \end{aligned}$$

Contoh Soal 2.1

Nyatakanlah dalam bentuk jumlah dan selisih :

$$\begin{aligned} \text{a. } -2 \sin 80^\circ \cdot \sin 50^\circ &= \cos (80^\circ + 50^\circ) + \cos (80^\circ - 50^\circ) \\ &= \cos 130^\circ - \cos 30^\circ \\ &= \cos 130^\circ - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 2 \sin a \cdot \sin 3a &= -(\cos (a + 3a) + \cos (a - 3a)) \\ &= -(\cos 4a + \cos(-2a)) \\ &= -(\cos 4a + \cos 2a) \\ &= -\cos 4a - \cos 2a \end{aligned}$$

Contoh Soal 3.1

Tentukanlah nilai dari :

a. $2 \cos 15^\circ \sin 45^\circ$

b. $8 \sin 82,5^\circ \sin 37,5^\circ$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{a. } 2 \cos 15^\circ \sin 45^\circ &= \sin(15^\circ + 45^\circ) - \sin(15^\circ - 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ - \sin(-30^\circ) \\ &= \sin 60^\circ + \sin(30^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} &= \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sin \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) - \left(\sin \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sin \left(\frac{4\pi}{8} \right) - \left(\sin \left(\frac{2\pi}{8} \right) \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sin \left(\frac{4\pi}{8} \right) - \left(\sin \left(\frac{2\pi}{8} \right) \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{2})$$

C. Rumus sin dikali cos

Rumus sin dikali cos merupakan rumus perkalian antara sin dan cos yang diperoleh dari perkalian dua sudut sin dan cos. Bentuk rumus perkalian sin dikali cos adalah sebagai berikut :

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

Cara untuk menghafal perkalian sin dikali cos dapat menggunakan kalimat dua sin cos sama dengan sin jumlah ditambah sin selisih

Pembuktian rumus $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, rumus ini diperoleh dari penjumlahan sin dua sudut :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

Contoh Soal 3.1.

Nyatakanlah dalam bentuk perkalian :

a. $\sin(a+b) + \sin(a-b)$

b. $\sin(x+60^\circ) + \sin(x-60^\circ)$

Jawab :

a. $\sin(a+b) + \sin(a-b) = ((\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b) + (\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b))$
 $= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
 $= 2 \cos a \cdot \sin b$

b. $\sin(\alpha+15^\circ) + \sin(\alpha-15^\circ) = (\sin \alpha \cdot \cos 15^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ) + (\sin \alpha \cdot \cos 15^\circ - \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ)$
 $= (\sin \alpha \cdot \cos 15^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ + \sin \alpha \cdot \cos 15^\circ - \cos \alpha \cdot \sin 15^\circ)$
 $= 2 \sin \alpha \cdot \cos 15^\circ$

Contoh Soal 3.2

Nyatakanlah dalam bentuk jumlah dan selisih :

a. $2 \sin 80^\circ \cdot \cos 50^\circ = \sin(80^\circ + 50^\circ) + \sin(80^\circ - 50^\circ)$
 $= \sin 130^\circ - \sin 30^\circ$
 $= \cos 130^\circ - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
c. 2 \sin a \cdot \cos 3a &= \sin (a + 3a) + \sin (a - 3a) \\
&= \sin 4a + \sin (-2a) \\
&= \sin 4a - \sin 2a
\end{aligned}$$

Contoh Soal 3.3

Tentukanlah nilai dari :

- $2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ$
- $\sin 82,5^\circ \cos 37,5^\circ$

Jawab :

$$\begin{aligned}
a. 2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ &= \sin(45^\circ + 15^\circ) + \sin(45^\circ - 15^\circ) \\
&= \sin 60^\circ + \sin 30^\circ \\
&= \sin 60^\circ + \sin 30^\circ \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b. \sin 82,5^\circ \cos 37,5^\circ &= \frac{1}{2} (\sin(82,5^\circ + 37,5^\circ) + \sin(82,5^\circ - 37,5^\circ)) \\
&= \frac{1}{2} (\sin(120) + \sin(45)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

D. Rumus cos dikali cos

Rumus cos dikali cos merupakan rumus perkalian antara cos dan cos yang diperoleh dari perkalian dua sudut cos. Bentuk rumus perkalian cos dikali cos adalah sebagai berikut :

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

Kalimat yang dapat digunakan untuk menghafal rumus cos dikali cos adalah dua cos cos sama dengan cos jumlah ditambah cos selisih

Pembuktian rumus $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$, rumus ini diperoleh dari pengurangan cos dua sudut :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta
\end{aligned}$$

Contoh Soal 4.1.

Nyatakanlah dalam bentuk perkalian :

- $\text{Cos}(\alpha+\beta)+\text{Cos}(\alpha-\beta)$
- $\text{Cos}(x+45^\circ) - \text{Cos}(x-45^\circ)$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{a. } \text{Cos}(\alpha+\beta)+\text{Cos}(\alpha-\beta) &= (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ &= 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \text{Cos}(x+60^\circ)+\text{Cos}(x-60^\circ) &= (\cos x \cdot \cos 60^\circ - \sin x \cdot \sin 60^\circ) + (\cos x \cdot \cos 60^\circ + \sin x \cdot \sin 60^\circ) \\ &= (\cos x \cdot \cos 60^\circ - \sin x \cdot \sin 60^\circ + \cos x \cdot \cos 60^\circ + \sin x \cdot \sin 60^\circ) \\ &= 2 \cos x \cdot \cos 60^\circ \\ &= 2 \cos x \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Contoh Soal 4.2

Nyatakanlah dalam bentuk jumlah atau selisih dari bentuk $2 \cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)$!

Jawab :

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) &= \cos\left(\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) + \left(\frac{1}{4}\pi - x\right)\right) + \cos\left(\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) - \left(\frac{1}{4}\pi - x\right)\right) \\ &= \cos\frac{1}{2}\pi + \cos 2x \\ &= 0 + \cos 2x \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

Contoh Soal 4.3

Diketahui besar sudut $\alpha = 75^\circ$ dan sudut $\beta = 15^\circ$. Tentukanlah nilai $\cos \alpha \cos \beta$!

Jawab :

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos (75^\circ + 15^\circ) + \cos (75^\circ - 15^\circ)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 90^\circ + \cos 60^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Tugas individu kegiatan belajar 1

1. Tentukanlah nilai $2 \sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + 2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ$
2. Buktikan $\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

RANGKUMAN

Berikut ini adalah kumpulan keempat rumus perkalian fungsi trigonometri sinus dan cosinus.



Tindak Lanjut Pembelajaran

Setelah anda mempelajari rumus perkalian sinus dan cosinus, untuk lebih mendalami dan menguasai materi yang berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus, silahkan buka dan pelajari buku yang berkaitan dengan **Matematika Peminatan untuk SMA Kelas XI** karangan Noormandiri, penerbit Erlangga. Kalian juga bisa mencari referensi lain dari sumber-sumber lain baik sumber cetak maupun *search* di internet.

Refleksi Materi

Apakah anda sudah memahami seluruh materi mengenai rumus perkalian sinus dan cosinus? Ataukah ada materi yang belum dimengerti? Jika kalian masih belum memahami keseluruhan materi diatas, silahkan pelajari lagi materi dengan lebih seksama. Namun jika sudah memahami keseluruhan materi, silahkan lanjutkan ke kegiatan pembelajaran berikutnya.

Referensi

- Sukino. 2017. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan IPA Semester 1* Jakarta: Erlangga.
- Noormandiri. 2016. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan IPA Semester 1* Jakarta: Erlangga.