MATRIKS

Untuk SMA/MA Kelas XI

Pertemuan 1:

- *Definisi Matriks*
- *Jenis-jenis Matriks*
- *Operasi pada Matriks*
- *Kesamaan Dua Matriks*
- *Transpos Matriks*

Pertemuan 2 :

- *Determinan Matriks*

Pertemuan 3 :

- *Invers Matriks*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Oleh : LINA SOIMATUN, S.Pd

SMA AL-IRSYAD TEGAL

MATRIKS

KOMPETENSI INTI

KI 1 Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya

KI 2 Menghargai dan menghayati perilaku jujur, disiplin, tanggungjawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri, dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya

KI 3 Memahami pengetahuan faktual dengan cara mengamati (mendengar, melihat, membaca) dan menanya berdasarkan rasa ingin tahu tentang dirinya, makhluk ciptaan Tuhan dan kegiatannya, dan benda-benda yang dijumpainya di rumah dan di sekolah.

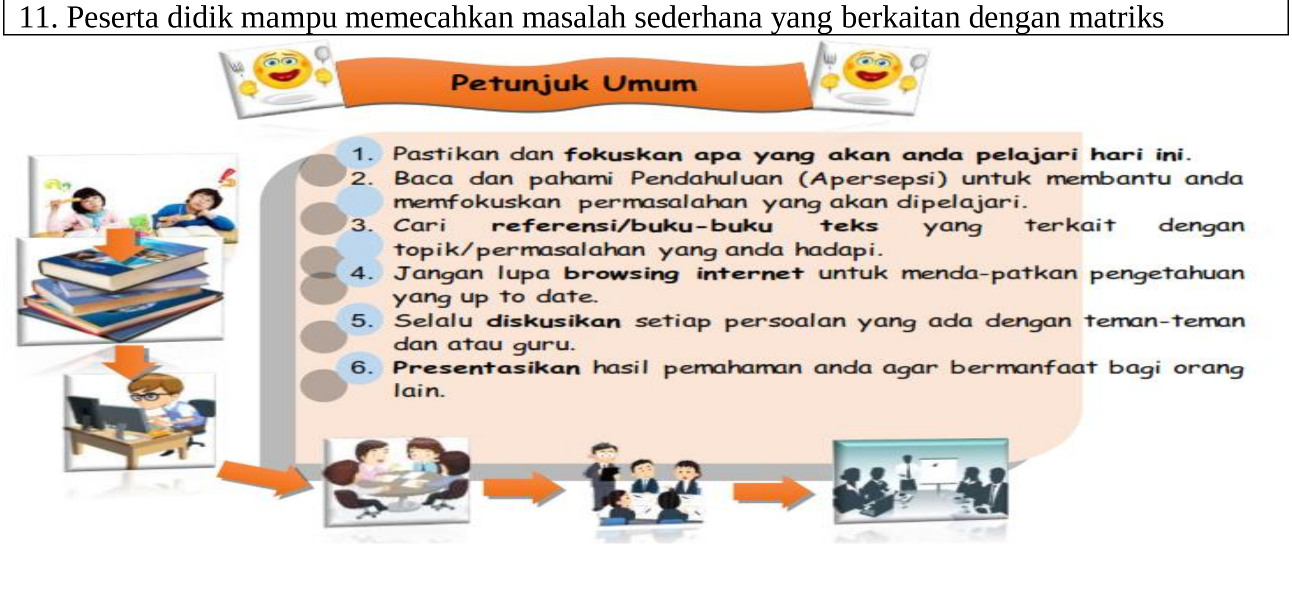
KI 4 Menyajikan pengetahuan faktual dalam bahasa yang jelas dan logis, dalam karya yang estetis, dalam gerakan yang mencerminkan anak sehat, dan dalam Tindakan yang mencerminkan perilaku anak beriman dan berakhlak mulia

KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR

KOMPETENSI DASAR		INDIKATOR
3.2	Mendeskripsikan dan menganalisis konsep dasar operasi matriks dan sifat-sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah	1. Peserta didik mampu mengidentifikasi konsep matriks 2. Peserta didik mampu mendeskripsikan matriks 3. Peserta didik mampu menguraikan ciri matriks 4. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian baris pada matriks 5. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian kolom pada matriks 6. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian elemen pada matriks 7. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian ordo pada matriks 8. Peserta didik mampu menyebutkan jenis-jenis matriks 9. Peserta didik mampu mencontohkan jenis matriks 10. Peserta didik mampu mendapatkan transpos matriks
4.2	Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya	Peserta didik mampu memecahkan masalah sederhana yang berkaitan dengan matriks

TUJUAN PEMBELAJARAN

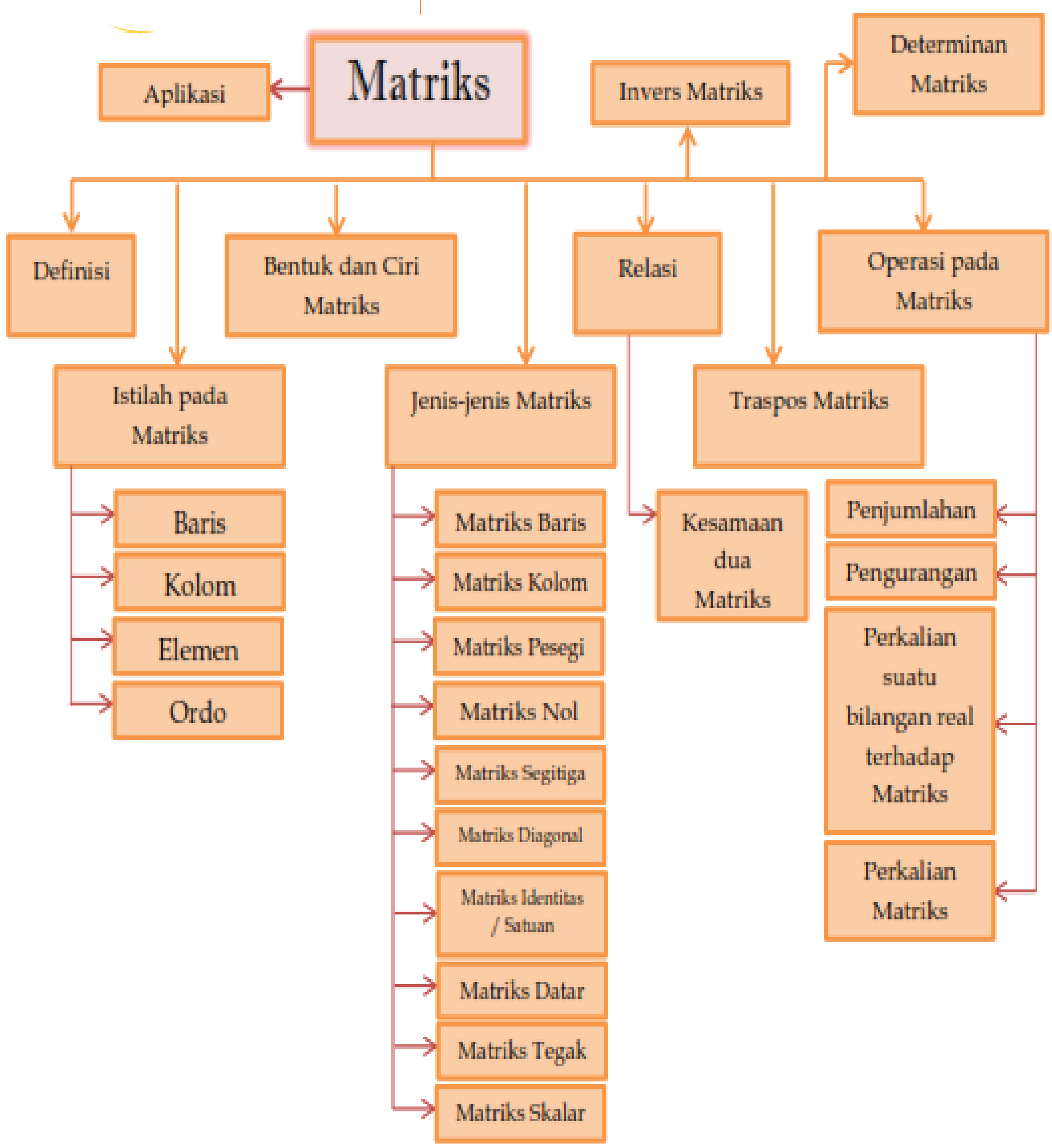
1. Peserta didik mampu mengidentifikasi konsep matriks
2. Peserta didik mampu mendeskripsikan matriks
3. Peserta didik mampu menguraikan ciri matriks
4. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian baris pada matriks
5. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian kolom pada matriks
6. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian elemen pada matriks
7. Peserta didik mampu menyebutkan pengertian ordo pada matriks
8. Peserta didik mampu menyebutkan jenis-jenis matriks
9. Peserta didik mampu mencontohkan jenis matriks
10. Peserta didik mampu mendapatkan transpos matriks
11. Peserta didik mampu memecahkan masalah sederhana yang berkaitan dengan matriks



Materi Prasyarat

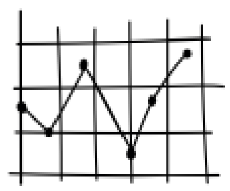
- Operasi Hitung Dasar (Penjumlahan, Pengurangan, Perkalian, dan Pembagian
- Sistem Persamaan Linear
- Sifat penjumlahan, pengurangan dan perkalian bilangan real

PETA KONSEP



MANFAAT MATRIKS

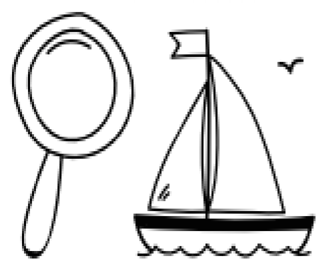
1 Matriks banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematika misalnya dalam menemukan solusi masalah dalam materi persamaan linear, transformasi linear yaitu bentuk umum dari fungsi linear contohnya rotasi dalam 3 dimensi. Matriks juga seperti variabel biasa, sehingga matrikspun dapat dimanipulasi dan diaplikasikan misalnya dikalikan, dijumlah, dikurangkan, serta didekomposisikan. Menggunakan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.



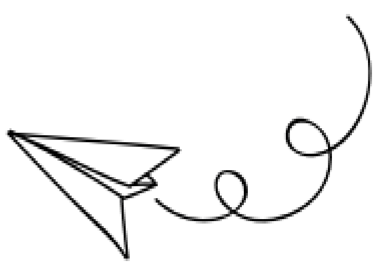
2 Dapat Memudahkan dalam membuat analisis mengenai suatu masalah ekonomi yang mengandung bermacam – macam variabel.

	Pertanian	Industri	Jasa	Demand Akhir	Output Total
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai Tambah	55	125	115	70	365
Output Total	100	290	235	365	990

3 Dapat dimanfaatkan dalam memecahkan masalah operasi penyelidikan , misalnya masalah operasi penyelidikan sumber – sumber minyak bumi dan sebagainya.



4 Matriks dikaitkan dengan penggunaan program linear, analisis input output baik dalam ekonomi, statistik, maupun dalam bidang pendidikan, manajemen, kimia, dan bidang – bidang teknologi yang lainnya.



5 Dalam militer ternyata matriks juga dibutuhkan fungsinya, di dalam dunia spionase dan militer pesan-pesan yang dikirim seing kali ditulis dengan menggunakan kode-kode rahasia. Hanya penerima yang sebenarnya yang memiliki kuncinya sehingga dapat membuka kode tersebut. Kode atau tulisan rahasia tersebut disebut kriptogram Semakin sulit kriptogramnya maka semakin disukai oleh si pengguna. Pemakaian bilangan pengganti abjad sering dijumpai dalam kriptografi salah satu penggunaannya adalah dalam bentuk matriks. Mengapa matriks? Matriks memiliki operasi perkalian yang melibatkan beberapa elemennya sekaligus sehingga penyidikan kode yang berbentuk kode matriks sulit dilakukan.

Refrensi : Wikipedia
https://brainly.co.id/tugas/1490037

MATERI PRASYARAT

Sebelum masuk pada materi matriks, ayo ingat kembali mengenai materi berikut.

1. **Operasi Hitung Dasar**

Operasi hitung dasar dalam matematika dapat dibedakan menjadi empat operasi hitung dasar yaitu:

1) Penjumlahan, yaitu operasi hitung untuk memperoleh dua bilangan bulat atau lebih;
2) Pengurangan, yaitu operasi hitung untuk memperoleh selisih dari dua bilangan atau lebih;
3) Perkalian, yaitu penjumlahan berulang dengan penjumlahan tetap; dan
4) Pembagian, yaitu pengurangan berulang dengan pengurangan tetap, selanjutnya bentuk operasi kali yang berulang adalah operasi pangkat.

(Sumber : http://unitedminoz.blogspot.com/2015/03/operasi-hitung-dasar-matematika.html)

2. Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel. Contohnya adalah:

$$3x + 2y - z = 1$$
$$2x - 2y + 4z = -2$$
$$-x + \frac{1}{2}y - z = 0$$

Sistem ini terdiri dari tiga persamaan dengan tiga variable x, y, z. Solusi sistem liear ini adalah nilai yang dapat menyelesaikan persamaan ini. Solusinya adalah :

$$x = 1$$
$$y = -2$$
$$z = -2$$

Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear m dengan n yang tidak diketahui dapat ditulis seperti ini

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$.$$
$$. \qquad .$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel yang tidak diketahui dan $a_{11}, a_{12}, \dots, x_{mn}$ adalah koefisiennya dan $b_1, b_2, \dots, b_m$ adalah konstantanya.

(Sumber : https://id.wikipedia.org/wiki/Sistem_persamaan_linear)

3. Sifat penjumlahan, pengurangan dan perkalian bilangan real

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan pada Bilangan Real

Sifat-sifat operasi penjumlahan bilangan real untuk a, b ∈ R

- Komutatif : a + b = b + a
- Asosiatif : (a + b) + c = a + (b + c)
- Memiliki identitas penjumlahan yaitu 0, sehingga a + 0 = 0 + a = a
- Memiliki Invers Penjumlahan yaitu –a, sehingga a + (-a) = 0

b. Operasi Perkalian pada Bilangan Real

Sifat sifat operasi perkalian bilangan real untuk a, b ∈ R

- Komutatif : a · b = b · a
- Asosiatif : (a · b) · c = a · (b · c)
- Memiliki identitas perkalian yaitu 1, sehingga a · 1 = 1 · a = a
- Memiliki Invers Penjumlahan yaitu (1/a), sehingga a · (1/a) = 0
- Distributif : a(b + c) = ab + ac

(Sumber : https://www.slideshare.net/ekostereo/bab-1-operasi-bilangan-real)

MATRIKS

PENDAHULUAN

Pernahkah kalian mengamati denah tempat duduk di kelas? Berdasarkan denah tersebut, pada baris dan kolom berapakah kalian berada? Siapa sajakah yang duduk pada baris pertama? Dengan menggunakan matriks, kalian dapat meringkas penyajian denah tersebut sehingga dengan mudah diketahui letak tempat duduk kalian dengan teman-teman kalian.

(Foto diambil saat KBM di SMA Al-Irsyad Tegal)

Seorang statistikawan sedang melakukan penelitian pada sebuah perpustakaan yang ada di suatu kota mengenai minat baca anggota perpustakaan bedasarkan usia dan jenis buku.Ia mengelompokkan usia menjadi tiga bagian yaitu anak-anak (≤12 tahun), remaja (12 tahun< x < 20 tahun) dan dewasa (>20 tahun), sedangkan jenis buku dikelompokkan menjadi buku fiksi, non fiksi, dan pengetahuan umum. Hasil penelitian yang diperoleh dituliskan dalam tabel sebagai berikut.

(Foto: https://fia.ub.ac.id/mmpt/wp-content/uploads/sites/41/2018/11/IMG_1455.jpg)

	Fiksi	Nonfiksi	Pengetahuan umum
Anak-anak	25	9	5
Remaja	40	35	20
Dewasa	30	50	45

Angka-angka yang ada di dalam kotak merupakan jumlah orang yang meminjam buku berdasarkan jenis buku yang dipinjam dan usia peminjam, ternyata, bentuk tabel di atas dapat dibuat lebih sederhana lagi menjadi : $\begin{bmatrix} 25 & 9 & 5 \\ 40 & 35 & 20 \\ 30 & 50 & 45 \end{bmatrix}$

Bentuk ini disebut sebagai matriks, yang terdiri atas sejumlah baris dan kolom. Baris pertama yaitu $\begin{bmatrix} 25 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ merupakan banyaknya peminjam dari kalangan anak-anak, angka 25 menunjukkan banyak anak-anak yang meminjam buku fiksi, angka 9 menunjukkan banyaknya anak-anak yang meminjam buku nonfiksi, dan seterusnya. Kolom pertama yaitu $\begin{bmatrix} 25 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$ merupakan banyaknya buku fiksi yang dipinjam, angka 40 menunjukkan banyaknya buku fiksi yang dipinjam oleh remaja, angka 30 menunjukkan banyaknya buku fiksi yang dipinjam oleh dewasa, dan seterusnya. Pada bentuk matriks di atas, memiliki tiga baris dan tiga kolom,dan selanjutnya dinamakan matriks berordo tiga.

Dengan menggunakan matriks, bentuk yang lebih kompleks dapat ditampilkan menjadi lebih sederhana. Mungkin matriks merupakan hal yang baru bagi kalian, tetapi mempelajari matriks tidaklah sulit. Selama kalian teliti dalam perhitungan dan memahami rumus yang diberikan, permasalahan mengenai matriks tentu dapat kalian atasi. Ada beberapa sifat matriks yang perlu kalian perhatikan. Untuk mengetahuinya, dapat kalian pelajari pada bab ini.

A. Mengenal Bentuk dan Ciri Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita di hadapkan pada masalah untuk menampilkan data atau informasi dalam bentuk tabel atau daftar.

Perhatikan tabel yang memuat data jumlah beberapa siswa di suatu sekolah pada table 1 dan data absensi suatu kelas dalam rentang waktu satu semester pada Tabel 2

Tabel 1

Kelas	**Laki-laki**	**Perempuan**
I	250	185
II	240	200
III	245	205

Tabel 2

	Sakit	Ijin	Tanpa Keterangan
Andi	2	1	3
Budi	1	3	0
Carli	1	1	2

Sekarang marilah kita amati kembali kelompok-kelompok bilangan yang diperoleh daru Tabel 1 dan Tabel 2.

- Kelompok bilangan yang dipeoleh dari Tabel 1 adalah

$$\begin{matrix} 250 & 185 \\ 240 & 200 \\ 245 & 205 \end{matrix} \Rightarrow$$ Semua bilangan ini berbentuk persegi panjang

- Kelompok bilangan yang diperoleh dari Tabel 2 adalah

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \Rightarrow$$ Semua bilangan ini berbentuk persegi

Definisi Matriks

Matriks adalah kelompok bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu susunan berbentuk persegipanjang atau persegi. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

Nama suatu matriks biasanya dilambangkan dengan huruf kapital, seperti A, B, C, … dst.

Ayo Amati

Apakah kelompok bilangan berikut merupakan matriks ?

a. $\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -3 & 9 \end{array}$

b. $\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \end{array}$

c. $\begin{array}{ccc} 4 & & 8 \\ & 3 & \end{array}$

d. $\begin{array}{ccc} & 4 & 7 \\ 9 & & \\ & 3 & 6 \end{array}$

Ayo Menalar

Menurut definisi matriks maka:

a. Kelompok bilangan $\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -3 & 9 \end{array}$ merupakan matriks, sebab susunannya berbentuk persegi dan bilangan-bilangan itu tersusun dalam baris dan kolom.

b. Kelompok bilangan $\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \end{array}$ merupakan matriks, sebab susunannya berbentuk persegi panjang dan bilangan-bilangan itu tersusun dalam baris dan kolom.

c. Kelompok bilangan . $\begin{array}{ccc} 4 & & 8 \\ & 3 & \end{array}$ bukan matriks, sebab susunannya tidak berbentuk persegi maupun persegi panjang, tetapi segitiga.

d. Kelompok bilangan $\begin{array}{ccc} & 4 & 7 \\ 9 & & \\ & 3 & 6 \end{array}$ bukan matriks, sebab susunannya tidak berbentuk persegi maupun persegi panjang, tetapi segilima.

B. Pengertian dan Istilah dalam Matriks

Pengertian Baris, Kolom, dan Elemen Matriks

Baris dari suatu matriks adalah bagian susunan bilangan yang dituliskan mendatar atau horizontal dalam matriks. Kolom dari suatu matriks adalah bagian susunan bilangan yang dituliskan tegak atau vertikal dalam matriks.

Sedangkan elemen atau unsur suatu matriks adalah bilangan-bilangan (real atau kompleks) yang menyusun matriks itu. Elemen dari suatu matriks dinotasikan dengan huruf kecil seperti a, b, c, ... dan biasanya disesuaikan dengan nama matriksnya. Misalkan pada matriks A, elemen-elemennya biasanya dinyatakan dengan a. Biasanya elemen-elemen dari suatu matriks diberi tanda indeks, misalnya yang artinya elemen dari matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & 9 \\ -7 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dengan elemen-elemen 2, 1 dan 5
Baris kedua dengan elemen-elemen -1, 7 dan 9
Baris ketiga dengan elemen-elemen -7, 4 dan 6
Baris keempat dengan elemen-elemen 8, 2 dan 4
Kolom ketiga dengan elemen-elemen 5,9,6 dan 4
Kolom kedua dengan elemen-elemen 1,7,4 dan 2
Kolom pertama dengan elemen-elemen 2, -1, -7 dan 8

Ayo Berlatih

Pada tabel berikut ditunjukkan jarak antara dua kota dalam kilometer (km).

	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	126	256	493	554	801	0

a) Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolom, tulislah matriks yang diperoleh!
b) Berapa banyak baris dan banyak kolom yang Anda peroleh dari soal a)?
c) Sebutkan elemen-elemen pada setiap baris!
d) Sebutkan elemen-elemen pada setiap kolom!

Pengertian Ordo Matriks

Banyak baris dan kolom dari suatu matriks menentukan ordo atau ukuran bagi matriks itu.

Ayo perhatikan

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 15 \\ 16 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Berapakah banyak baris dari matriks A? (2)

Berapakah banyak kolom dari matriks A? (3)

Dalam hal demikian matriks A dikatakan berordo atau berukuran 2×3 dan dituliskan dengan menggunakan notasi $A_{2\times 3}$

Bilangan 2 X 3 yang ditulis agak ke bawah di sebut sebagai subscrip atau indeks. Jika diamati lebih lanjut, banyak elemen dalam matriks A ditentukan oleh 2 3 = 6 yaitu merupakan hasil kali antara banyak baris dengan banyak kolom dari matriks A.

Ayo Simpulkan

Ordo atau **Ukuran** dari suatu matriks ditentukan oleh banyak baris dan banyak kolom dari matriks itu. Ordo suatu matriks ditulis sebagai perkalian dua buah bilangan bulat positif dengan bilangan pertama menyatakan benyaknya baris, dan bilangan kedua menyatakan banyaknya kolom.

Banyak elemen atau **banyak unsur** dari suatu matriks ditentukan oleh hasil kali banyak baris dengan banyak kolom dari matriks itu.

Misalkan matriks A terdiri atas m baris dan n kolom, maka matriks A dikatakan berordo m x n dan ditulis sebagai A_{mxn}. Banyak elemen matriks A adalah (m x n) buah dengan elemen-elemen matriks itu dilambangkan dengan a_{ij} (i dari 1 sampai dengan m dan j dari 1 sampai dengan n).

Secara umum matriks A dapat ditulis dengan notasi berikut:

$$A_{m\times n} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \end{pmatrix}}^{\text{Banyak kolom = n}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{Banyak baris = m}$$

C. Jenis Matriks

Beberapa jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks adalah sebagai berikut :

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris saja. Matriks baris berordo 1x n, dengan n adalah jumlah kolom. Contoh :

$A = (1 \quad -1 \quad 5 \quad 2 \quad 9 \quad 3)$, matriks A merupakan matriks baris yang terdiri atas 6 kolom, memiliki 6 elemen, serta berordo 1 × 6.

$A = (-3 \quad 7 \quad -1)$, matriks B merupakan matriks baris yang terdiri atas 3 kolom, memiliki 3 elemen, serta berordo 1 × 3.

Jumlah elemen pada matriks baris sama dengan jumlah kolomnya.

2. Matriks Kolom

Matriks baris adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja. Matriks baris berordo mx1, dengan m adalah jumlah baris. Contoh :

$C = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, matriks C merupakan matriks kolom yang terdiri atas 3 baris, memiliki 3 elemen serta berordo 3 x 1.

$D = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, matriks D merupakan matriks kolom yang terdiri atas 7 baris, memiliki 7 elemen serta berordo 7 x 1.

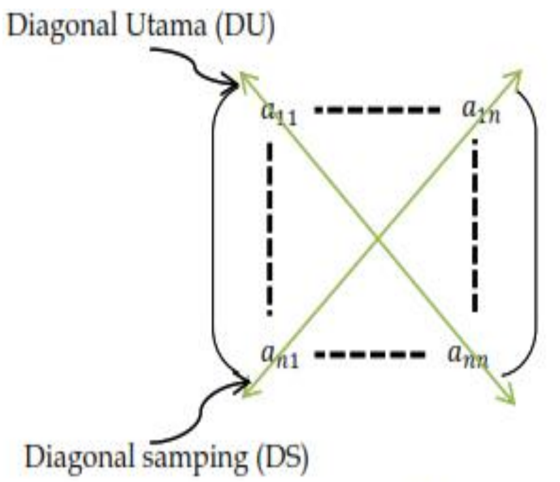
Jumlah elemen pada matriks kolom sama dengan jumlah barisnya.

3. Matriks Persegi

Misalkan suatu matriks berordo $m \times n$ dengan nilai $m = n$, sehingga diperoleh matriks berordo $n \times n$ atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut juga *matriks persegi* berordo/berukuran n. Contoh :

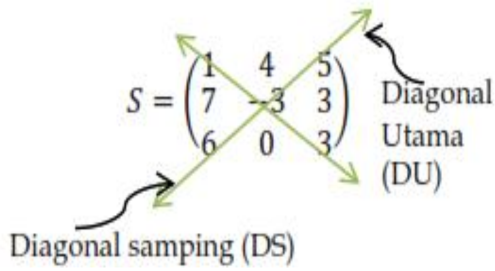
$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, matriks E merupakan matriks persegi berordo dua.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -7 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$, matriks F merupakan matriks persegi berordo empat.



Dalam suatu matriks persegi, elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dengan elemen a_{nn} dinamakan sebagai diagonal utama (DU), sedangkan elemen-elemen yang terlentang pada garis hubung elemen a_{n1} dengan elemen a_{n1} dinamakan sebagai diagonal samping (DS).

Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan letak elemen-elemen pada diagonal utama dan letak elemen-elemen pada diagonal samping dari suatu matriks persegi.



Elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama adalah 6, -3, dan 5. Sedangkan elemen-elemen yang terletak pada diagonal samping adalah 5, -3, dan 6.

4. Matriks Nol

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks nol, jika semua elemennya sama dengan nol, contoh:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Segitiga

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks segitiga jika elemenelemen yang ada di bawah atau di atas diagonal utamanya (salah satu, tidak kedua-duanya) bernilai nol. Jika elemen-elemen yang ada di bawah diagonal utama bernilai nol maka disebut sebagai matriks segitiga atas. Sebaliknya, jika elemen-elemen yang ada di atas diagonal utamanya bernilai nol maka disebut sebagai matriks segitiga bawah.

- Matriks segitiga dengan elemen-elemen di bawah diagonalnya utama semuanya bernilai nol

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriks segitiga dengan elemen-elemen di atas diagonalnya utama semuanya bernilai nol

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Matriks Diagonal

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks diagonal jika elemenelemen yang ada di bawah dan di atas diagonal utamanya bernilai nol, atau dengan kata lain elemen-elemen selain diagonal utamanya bernilai nol. Contoh:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Matriks Identitas / Matriks Satuan

Suatu matriks skalar dikatakan sebagai matriks identitas jika semua elemen yang terletak pada diagonal utamanya bernilai satu, sehingga matriks identitas disebut juga matriks satuan. Matriks identitas berordo n dilambangkan dengan I_n.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Matriks Datar

Misalkan suatu matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$, ini berarti banyak kolom lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris. Oleh karena kolomnya lebih banyak dibandingkan dengan barisnya, maka susunan elemen-elemennya akan memanjang atau mendatar. Matriks yang berciri demikian disebut dengan matriks datar.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 11 & 7 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Matriks Tegak

Jika $m > n$ maka banyak baris lebih banyak dibandingkan dengan banyak kolom, sehingga susunan elemen-elemennya membentuk persegi panjang tegak. Matriks yang berciri demikian disebut sebagai matriks tegak.

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Matriks Skalar

Suatu matriks diagonal dikatakan sebagai matriks skalar jika semua elemen-elemen yang terletak pada diagonal utamanya memiliki nilai yang sama,

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

D. Kesamaan Dua Matriks

Ayo Amati

Dua kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangunan yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok Asama dengan Blok B, karena banyak Ruko di Blok Asama dengan banyak Ruko di Blok B. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok A sama dengan penempatan Ruko di Blok B. Artinya 10 Ruko di Blok Adan Blok B dibagi dalam dua jajaran.

Ayo Simpulkan

Matriks A dan matriks B dikatakan sama (A= B), jika dan hanya jika:

[i] Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

[ii] Setiap pasangan elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j)

Contoh 1

Untuk matriks-matriks berikut ini, tentukan matriks-matriks mana saja yang sama.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jawab :

- Matriks Y dan P berordo sama, akan tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi Y tidak sama dengan P, ditulis Y≠P.
- Matriks Y dan Q berordo sama, akan tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi Y tidak sama dengan Q, ditulis Y=Q.
- Matriks P dan Q berordo sama, akan tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi P tidak sama dengan Q, ditulis P≠Q.

Elemen seletak

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Elemen seletak

Contoh 2

Misalkan diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3x & 2y \end{pmatrix} \; dan \; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Jika matriks A dan matriks B, tentukan nilai *x* dan *y*.

Jawab:

- Matriks A berordo 2×2 dan matriks B juga berordo 2×2, sehingga ordo matriks *A*=ordo matriks *B*.
  Ini berarti syarat perlu bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.
- Syarat cukup bagi kesamaan matriks A dan matriks B adalah yang seletak harus bernilai sama, sehingga diperoleh hubungan:

  $3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$

  $2y = 14 \Leftrightarrow y = 1$

  Jadi jika *A*=*B* maka nilai *x*=*3* dan nilai *y*=*7*.

E. Transpos suatu Matriks

Dalam mendapatkan informasi yang berbentuk tabel, kadang-kadang Anda mendapatkan dua tabel yang berbeda namun memiliki makna yang sama. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut. Sebuah lembaga kursus bahasa asing memiliki program kursus Bahasa Inggris, Bahasa rab, dan Bahasa Mandarin. Pada lembaga tersebut, jumlah kelas kursus pada setiap program di setiap harinya tidak selalu sama. Banyaknya kelas di setiap program kursus dapat disajikan dalam dua tabel berbeda dengan makna sama berikut.

Hari / Program	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
B. Inggris	6	4	4	2
B. Arab	4	5	4	3
B. Mandarin	3	4	5	8

Program / Hari	B. Inggris	B. Arab	B. MAndarin
Senin	6	4	3
Selasa	4	5	4
Rabu	4	4	5
Kamis	2	3	8

Secara lebih sederhana, kedua tabel tersebut dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks berikut. Misalkan untuk tabel pertama dinamakan matriks Adan tabel kedua matriks B. Dengan demikian, bentuk matriks dari kedua tabel di atas adalah

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ayo Analisis

Sekarang, ayo perhatikan setiap elemen pada kedua matriks tersebut, kemudian bandingkan. Kesimpulan apa yang akan didapat? Dengan membandingkan matriks A dan matriks B tersebut, Anda dapat mengetahui bahwa elemen-elemen pada baris pertama matriks A merupakan elemen-elemen pada kolom pertama matriks B. Demikian pula dengan elemen-elemen pada baris kedua dan ketiga matriks Amerupakan elemenelemen pada kolom kedua dan ketiga matriks B. Dengan demikian, matriks B diperoleh dengan cara menuliskan elemen setiap baris pada matriks A menjadi elemen setiap kolom matriks B. Matriks yang diperoleh dengan cara ini dinamakan sebagai matriks transpos.

Definisi

Misalkan A matriks sebarang. Transpos matriks A adalah matriks B yang disusun dengan cara menuliskan elemen setiap baris matriks A menjadi elemen setiap kolom pada matriks B. Transpos dari matriks A di lambangkan dengan B = A^t(dibaca: A transpos), B = A'(dibaca: A aksen) atau B = $\bar{A}$(dibaca: putaran A)

Berdasarkan definisi transpos matriks, jika Anda memiliki matriks A yang berordo m × n maka transpos A, yaitu A^t memiliki ordo n × m.

Transpos dari matriks A berordo m × n adalah sebuah matriks A^t berordo n × m yang disusun dengan proses sebagai berikut:

- Baris pertama matriks A ditulis menjadi kolom pertama dalam matriks A^t.
- Baris kedua matriks A ditulis menjadi kolom kedua dalam matriks A^t.
- Baris ketiga matriks A ditulis menjadi kolom ketiga dalam matriks A^t.

  ..., demikian seterusnya
- Baris ke-m matriks A ditulis menjadi kolom ke-m dalam matriks A^t.

Contoh

a) Jika $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, maka transpos dari P adalah $P' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Jika $Q = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, maka transpos dari Q adalah $Q' = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

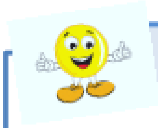
c) Jika $R = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -11 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, maka transpos dari R adalah $R' = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

d) Jika $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ maka transpos dari S adalah $S' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Definisi

Misalkan A adalah matriks persegi berordo n. Matriks A disebut *matriks simetris* atau *matriks setangkap* jika dan hanya jika elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama berinilai sama. Ditulis : $a_{ij} = a_{ji}$ dengan $i \neq j$.

Sebagai akibat dari definisi di atas, jika A adalah matriks simetris maka transpos dari matriks A sama dengan A itu sendiri atau $A^t = A$.



Ayo Berlatih

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi hubungan P^t= Q, bila

$$P = \begin{pmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{dan } Q = \begin{pmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

F. Operasi pada Matriks

Penjumlahan Matriks

Di suatu kota terdapat dua toko meubel, toko meubel 'abadi' dan toko meubel 'Jaya' . beberapa jenis meubel yang dijual di toko itu adalah rak piring, almari dan kasur. Berikut ini adalah persediaan meubel yang ada di kedua toko tersebut.

	Rak piring	almari	kasur
Toko 'Abadi'	4	5	4
Toko 'Jaya'	2	9	3

Untuk menambah persediaan barang, kedua pedagang tersebut pada hari yang sama melakukan pembelian meubel-meubel baru yang jumlahnya disajikan pada tabel berikut.

	Rak piring	almari	kasur
Toko 'Abadi'	11	7	8
Toko 'Jaya'	18	4	5

Berapa banyakkah pesediaan ketiga jenis meubel yang ada di masing-masing toko setelah dilakukan pembelian tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan sangat mudah bagi Anda untuk mendapatkan jawabannya. Langkah yang dilakukan adalah menjumlahkan banyaknya meubel pada persediaan awal dengan meubel yang dibeli sebagai penambahan persediaan. Tentu saja yang dijumlahkan harus sejenis dan pada toko yang sama, misalnya banyak rak piring yang ada di toko 'Abadi' dijumlahkan dengan banyaknya banyak rak piring yang dibeli oleh toko 'Abadi' (yang dijumlahkan harus bersesuaian). Kedua tabel tersebut dapat disederhanakan dan diubah ke dalam bentuk matriks. Selanjutnya melakukan pejumlahan matriks, yaitu yang dijumlahkan adalah elemen-elemen yang seletak. Berikut definisi dari penjumlahan matriks.

Definisi

Jika A dan B adalah dua matriks yang berordo sama maka jumlah dari matriks A dan B(ditulis A+ B) adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak (bersesuaian).

Kedua tabel pada uraian tersebut jika diubah ke dalam bentuk matriks dan dijumlahkan adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+11 & 5+7 & 4+8 \\ 2+18 & 9+4 & 3+5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 20 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan informasi dari penjumlahan matriks tersebut, diperoleh informasi persediaan meubel di kedua toko tadi adalah seperti disajikan pada tabel berikut:

	Rak piring	almari	kasur
Toko 'Abadi'	15	12	12
Toko 'Jaya'	20	13	8

Sifat-sifat Penjumlahan Matriks

Misalkan A, B, C dan D adalah matriks-matriks yang berordo sama, maka dalam penjumlahan matriks :

1. Bersifat komutatif : A + B = B + A
2. Bersifat asosiatif : (A + B) + C = A + (B + C)
3. Terdapat sebuah matriks identitas, yaitu matriks O (matriks nol) yang bersifat A + O = O + A = A
4. Semua matriks A mempunyai lawan atau negatif A yang bersifat A + (-A) = O

Pengurangan Matriks

Dari stok terakhir kedua toko meubel tadi, di hari berikutnya beberapa pelanggan datang untuk membeli sejumlah meubel di masing-masing toko meubel tersebut. Dengan jumlah meubel yang terjual di hari itu yaitu :

	Rak piring	almari	kasur
Toko 'Abadi'	3	8	2
Toko 'Jaya'	4	7	2

Berapa banyakkah sisa pesediaan ketiga jenis meubel yang ada di masing-masing toko setelah dilakukan adanya pembelian di hari tersebut?

Sama halnya seperti pada operasi penjumlahan matriks, pada operasi pengurangan matriks berlaku pula ketentuan kesamaan ordo antara matriks yang bertindak sebagai matriks pengurang dan matriks yang akan dikurangi.

Definisi

Jika A dan B adalah dua matriks yang berordo sama maka pengurangan matriks A oleh matriks B (ditulis A- B) adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara mengurangkan setiap elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak (bersesuaian).

Pada kasus tadi, maka diperoleh :

Stok awal = $C = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 20 & 13 & 8 \end{pmatrix}$,

Penjualan = $D = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$A - B = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 20 & 13 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15-3 & 12-8 & 12-2 \\ 20-4 & 13-7 & 8-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 4 & 10 \\ 16 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Pada pengurangan matriks berlaku sifat antikomutatif, dimana : $A - B \neq B - A$

Perkalian Suatu Bilangan Real terhadap Matriks

Dalam aljabar, perkalian terhadap suatu bilangan merupakan penjumlahan berulang dari bilangan tersebut. Misalnya, perkalian berikut.

$$2a = a + a$$

$$ka = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{Sebanyak k buah}}$$

Dalam matriks pun berlaku ketentuan seperti itu. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Misalkan $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan *2H* dan *-2H*

$$2H = H + H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 & -1+(-1) \\ 0+0 & 1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 2 & 2\times(-1) \\ 2\times 0 & 2\times 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks 2H adalah matriks yang diperoleh dari hasil penjumlahan matriks H dengan matriks H, atau dengan kata lain hasil dari perkalian 2 dengan setiap elemen pada matriks H.

$$-2H = -H + (-H) = -H - H$$

$$= -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + (-2) & 1 + 1 \\ 0 + 0 & -1 + (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \times 2 & -2 \times (-1) \\ -2 \times 0 & -2 \times 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks –2H adalah matriks yang diperoleh dari hasil penjumlahan matriks –H dengan matriks -H, atau dengan kata lain hasil dari perkalian –2 dengan setiap elemen pada matriks H.

Definisi

Jika A sebarang matriks, dan k sebarang bilangan real maka kA adalah sebuah matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian kdengan setiap elemen matriks A. Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar.

Ayo Berlatih

Diketahui matriks-matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan :

1. (2+3)A
2. 3(A+B)
3. 3(2A)
4. 2A+3A
5. 3A+3B
6. 6A

Penyelesaian :

1. $(2+3)A = 5 \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

2. $3(A+B) = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= 3\times\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

3. $3(2A) = 3 \times\left(2 \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$

$$= 3 \times\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 54 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

4. $2A+3A = 2\times\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 27 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

4. $3A+3B = 3\times\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

5. $6A = 6 \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= = \begin{pmatrix} 18 & 54 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Ayo Simpulkan

Sifat-sifat Perkalian suatu Bilangan Real terhadap Matriks

Misalkan p dan q adalah bilangan real, A dan B adalah matriks-matriks berordo m×n, maka perkalian bilangan real dengan matriks memenuhi sifat-sifat sebagai berikut

1. $(p+q)A=pA+qA$
2. $p(A+B)=pA+pB$
3. $p(qA) = pq(A)$
4. $1A=A$
5. $(-1)A=-A$

Perkalian Matriks

Riki dan Fera membeli alat tulis di koperasi sekolah. Riki membeli 3 buah bolpoin dan 2 buku, sedangkan Fera membeli 2 buah bolpoin dan 5 buku. Jika harga sebuah bolpoin Rp1.000,00 dan harga sebuah buku Rp2.500,00, berapakah harga belanjaan yang harus dibayar oleh masingmasing siswa tersebut? Permasalahan tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel berikut:

	Bolpoin	Buku
Riki	3	2
Fera	2	5

	Harga
Bolpoin	1.000
Buku	2.500

Penyelesaian dari permasalahan tersebut bisa diselesaikan dengan menggunakan aljabar biasa atau menggunakan matriks. Dalam hal ini, permasalahan tersebut akan diselesaikan menggunakan matriks, sebagai pengantar untuk memahami perkalian matriks yang akan Anda pelajari.Langkah pertama adalah menuliskan model dari masalah tersebut menjadi bentuk matriks, sehingga diperoleh:

- Data banyaknya bolpoin dan buku yang dibeli oleh Riki dan Fera (dinyatakan oleh matriks P), yaitu $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- Data harga bolpoin dan buku (dinyatakan oleh matriks Q), yaitu $Q = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2500 \end{pmatrix}$

Elemen baris pertama dan kolom pertama matriks P menyatakan banyak nya bolpoin yang dibeli Riki, sedangkan elemen baris pertama dan kolom pertama matriks Qmenyatakan harga bolpoin. Dengan demikian, untuk mengetahui harga beli semua bolpoin yang dibeli Riki adalah dengan cara mengalikan elemen baris pertama kolom pertama matriks P dengan elemen baris pertama kolom pertama matriks Q. Dalam hal ini, (3)(1.000). Begitu pula untuk harga beli buku yang dibeli Riki, yaitu dengan cara mengalikan elemen baris pertama kolom kedua matriksPdengan elemen baris kedua kolom pertama matriks Q, dalam hal ini (2)(2.500). Harga belanjaan yang dibayar Riki adalah penjumlahan dari hasil kali tadi, yaitu (3)(1.000) + (2)(2.500)

= 3.000 + 5.000 = 8.000. Jadi, harga belanjaan Riki Rp8.000,00. Tentukan harga belanjaan yang harus dibayar oleh Fera?

Dari uraian tersebut, dapat Anda ketahui bahwa untuk mendapatkan besarnya harga belanjaan kedua siswa tersebut adalah dengan cara mengalikan matriks P dan Q, sebagai berikut:

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1000 \\ 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1000 + 2 \times 2500 \\ 2 \times 1000 + 5 \times 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 14500 \end{pmatrix}$$

Perkalian tersebut dinamakan perkalian matriks. Ketentuan yang harus Anda ingat, yaitu perkalian dua matriks bisa dilakukan apabila banyaknya kolom pengali (matriks pertama yaitu P) sama dengan banyaknya baris matriks yang dikalikan (matriks kedua yaitu Q). Dari uraian diketahui bahwa ordo $P_{2\times 2}$ dan $Q_{2\times 1}$ dan hasil kalinya berordo 2 × 1.

$$P \times Q = R$$

Ordo hasil

$$(2 \times 2)(2 \times 1) = (2 \times)$$

Sama

Secara umum, jika matriks Pberordo m× pdan matriks Q berordo p× n maka matriks hasil kali PQ berordo m× n.

Definisi

Definisi Perkalian Matriks

Dua buah matriks Adan Bdapat dikalikan (ditulisAB) jika banyak kolom pada matriks Asama dengan banyak baris pada matriks B. Elemen-elemen pada matriks AB diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada matriks Adengan elemen kolom pada matriks B.

Ayo Berlatih

Diketahui matriks-matriks berikut

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan :

1. PQ 2. QR 3. RP 4. QP 5. P(QS) 6. (PQ)S

G. Determinan Matriks

Determinan Matriks Persegi

Pada bagian sebelumnya, Anda telah mengenal matriks persegi, yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Pembahasan materi determinan matriks persegi yang dibahas di materi kali ini dibatasi hanya sampai matriks 3 ×3

Determinan Matriks 2 ×2

Matriks berordo 2 ×2 yang terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 ×2. Misalkan Aadalah matriks persegi ordo 2 ×2 dengan bentuk A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Definisi

Determinan matriks Adi definisikan sebagai selisih antara perkalian elemenelemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks Adinotasikan dengan det Aatau |A|.

Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

Berdasarkan defi nisi determinan suatu matriks, Anda bisa mencari nilai determinan dari matriks A, yaitu:

diagonal sekunder

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c = ad - bc$$

diagonal utama

Determinan Matriks 3 ×3

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari determinan mariks berordo 3 ×3. Misalkan A matriks persegi berordo 3 ×3 dengan bentuk

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 ×3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan metode Sarrus. Adapun langkahlangkah yang harus Anda lakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 ×3 dengan metode Sarrusadalah sebagai berikut:

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks A di sebelah kanan tanda determinan.

2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan D_{11}

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$D_{11}=a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihar gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan D_{1}

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$D_{11}=a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}$

4. Sesuai dengan defi nisi determinan matriks maka determinan dari matriks Aadalah selisihantara D_{1} dan D_{11} yaitu D_{11}-D_{1}

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

H. Invers Matriks

Ketika di SMP, Anda telah mempelajari operasi hitung pada bilangan. Pada saat mempelajari konsep tersebut, Anda dikenalkan dengan istilah invers (kebalikan) bilangan. Suatu bilangan jika dikalikan dengan inversnya akan menghasilkan unsur identitas. Senada dengan hal tersebut, dalam aljabar matriks pun berlaku ketentuan seperti itu. Ketika Anda mengalikan suatu matriks dengan matriks inversnya, akan dihasilkan identitas, yang dalam hal ini adalah matriks identitas.Sebagai ilustrasi bagi Anda, perhatikanlah perkalian matriks-matriks berikut.

- Misalkan A=$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

  AB=$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

  = $\begin{pmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{pmatrix}$

  = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

  Perkalian AB menghasilkan I_2 (matriks identitas berordo 2 x 2)

- Misalkan P=$\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan Q= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

  PQ=$\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} -7+8 & 14-14 \\ -4+4 & 8-7 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

  Perkalian PQ menghasilkan I_2

Berdasarkan perkalian-perkalian tersebut, ada hal yang harus Anda ingat, yaitu perkalian matriks A dan matriks Bmenghasilkan matriks identitas (AB= I) Ini menunjukkan matriks Bmerupakan matriks

invers dari matriks A, yaitu B= A^{-1}atau bisa juga dikatakan bahwa matriks Amerupakan invers dari matriks B, yaitu A= B^{-1}. Begitu pulauntuk perkalian matriks Pdan matriks Q berlaku hal serupa.

Definisi

Misalkan Adan Badalah dua matriks yang berordo 2 × 2 dan memenuhi persamaan AB= BA= I_2 maka matriks A adalah matriks invers dari matriks B atau matriks B adalah matriks invers dari matriks A.

Diketahui matriks-matriks berikut.

$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. Apakah matriks B merupakan invers dari matriks A?
b. Apakah matriks C merupakan invers dari matriks D?

Jawab:

a. Matriks B merupakan invers dari matriks A jika memenuhi persamaan $AB = I$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Oleh karena $AB = I$ maka matriks B merupakan invers dari matriks A.

b. Matriks C merupakan invers dari matriks D jika memenuhi persamaan $CD = I$

$$CD = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 & 0+2 \\ 0-2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq I$$

Oleh karena $CD \neq I$ maka matriks C bukan invers dari matriks D.

Setelah Anda memahami definisi invers matriks, selanjut nya akan diperlihatkan kepada Anda penurunan rumus invers matriks ordo 2 × 2 sebagai berikut.

Misalkan A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$dan B=$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Jika B=A^{-1}, bagaimana antara elemen-elemen pada matriks A dan elemen-elemen pada matriks B?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ab + br & aq + bs \\ cp + dr & aq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan konsep kesamaan dua matriks, Anda peroleh

$ab + br = 1 \ldots (1)$
$aq + bs = 0 \ldots (2)$
$cp + dr = 0 \ldots (3)$
$aq + ds = 1 \ldots (4)$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear (1) dengan (3) dan (2) dengan (4), diperoleh:
$= \frac{d}{ad-bc}$, $q = \frac{-b}{ad-bc}$, $r = \frac{-c}{ad-bc}$, s= $\frac{a}{ad-bc}$

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$Jadi\ B = A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, dengan ad-bc≠0

Oleh karena ad-bc = det A, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Ayo Simpulkan

Misalkan A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, invers dari A adalah A^{-1}, yaitu $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, dengan det A≠0

Ayo Simpulkan

Sifat-sifat Matriks

Misalkan p dan q adalah bilangan real, A dan B adalah matriks-matriks berordo m×n, maka memenuhi sifat-sifat sebagai berikut

1. AB ≠ BA Tidak komutatif
2. 2. A(BC) = (AB)C Asosiatif
3. 3. A(B+ C) = AB+ AC Distributif
4. 4. (A+ B)C= AC+ BC Distributif
5. 5. k(AB) = kA(B) = A(kB) Asosiatif
6. 6. IA= AI= A Perkalian dengan Identitas
7. $(A+B)^t = A^t + B^t$
8. $(A^t)^t = A$
9. $(kA)^t = kA^t$, k adalah konstanta
10. $(AB)^t = B^t A^t$
11. $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Misalkan Adan Badalah matriks sebarang yang memiliki invers, AB dan BA juga memiliki invers maka berlaku hubungan berikut.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} . B^{-1}$

I. Aplikasi Matriks

Penggunaan Matriks untuk Menyelesaikan

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode grafik, metode eliminasi,dan metode substitusi. Pada bab ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan menggunakan matriks. Misalkan, sistem persamaan linear berikut:

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat kita tuliskan dalam persamaan matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Persamaan matriks ini dapat kita selesaikan dengan menggunakan sifat berikut:

1. Jika AX=B, maka $X=A^{-1}B$, dengan $|A|\neq 0$
2. Jika XA=B, maka $X=B^{-1}A$, dengan $|A|\neq 0$

Menentukan Persamaan Reaksi dengan Matriks Sistem

Matriks dapat digunakan dalam penentuan persamaan reaksi karena persamaan reaksi merupakan penerapan aljabar linier.Persamaan yang digunakan adalah :

$A\ v = 0$

dengan A merupakan matriks dengan kolom mewakili n zat kimia dan m baris yang mewakili m unsur. Sedangkan v merupakan matriks stoikiometri yang kolomnya mewakili koefisien-koefisien zat-zat yang bereaksi dan 0 adalah matriks 0 yang menunjukkan bahwa dalam keadaan setimbang jumlah unsure yang bereaksi adalah tetap. Penyelesaian matriks v tersebut menggunakan invers matriks.

Determinan matriks dapat digunakan untuk menentukan energi transisi

Penggunaan Matriks Focks dalam Kimia

Matriks Fock atau lebih dikenal sebagai *operator Fock* adalah matriks yang digunakan untuk menghitung kesetimbangan energi suatu elektron terhadap intinya. Pada perhitungan kimia kuantum menggunakan metode Hartree-Fock, perhitungan matriks Fock merupakan awal proses kalkulasi numerik berulang.

- Setiap pehitungan keseimbangan energi satu elektron akan diwakili oleh satu Matriks Fock.
- Dalam matriks Fock, tidak terkandung nilai energi elektron. Persamaan ini hanya memiliki nilai rata-rata tolakan antar elektron.
- Matriks Fock merupakan pendekatan dari operator Hamiltonian dan disebut *operator Fock* karena matriks ini nantinya digunakan dalam perhitungan kimia kuantum untuk orbital atom atau orbital molekul. Persamaan yang sering digunakan adalah persamaan Roothaan dalam metode numerik.

Nilai Eigen dan Penerapannya dalam Kimia

Penerapan nilai eigen terdapat dalam kimia kuantum, terutama yang berkenaan dengan struktur atom polielektron, teori orbital molekul, dan teori vibrasi molekul.

Nilai eigen suatu matriks dapat kalian pelajari pada pembahasan matris selanjutnya. Sebelum itu, kalian tetap harus menguasi konsep dasar matriks yang berada pada bab ini.