BAHAN AJAR

MATRIKS

Pertemuan 3

SMK Institut Indonesia Kutoarjo.

FAJAR HARDIYANTO

Kompetensi Dasar

3.16. Menentukan nilai determinan, invers dan tranpos pada ordo 2x2 dan nilai determinan dan tranpos pada ordo 3x3

4.16 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan, invers dan tranpose pada ordo 2x2 serta nilai determinan dan tranpos pada ordo 3x3

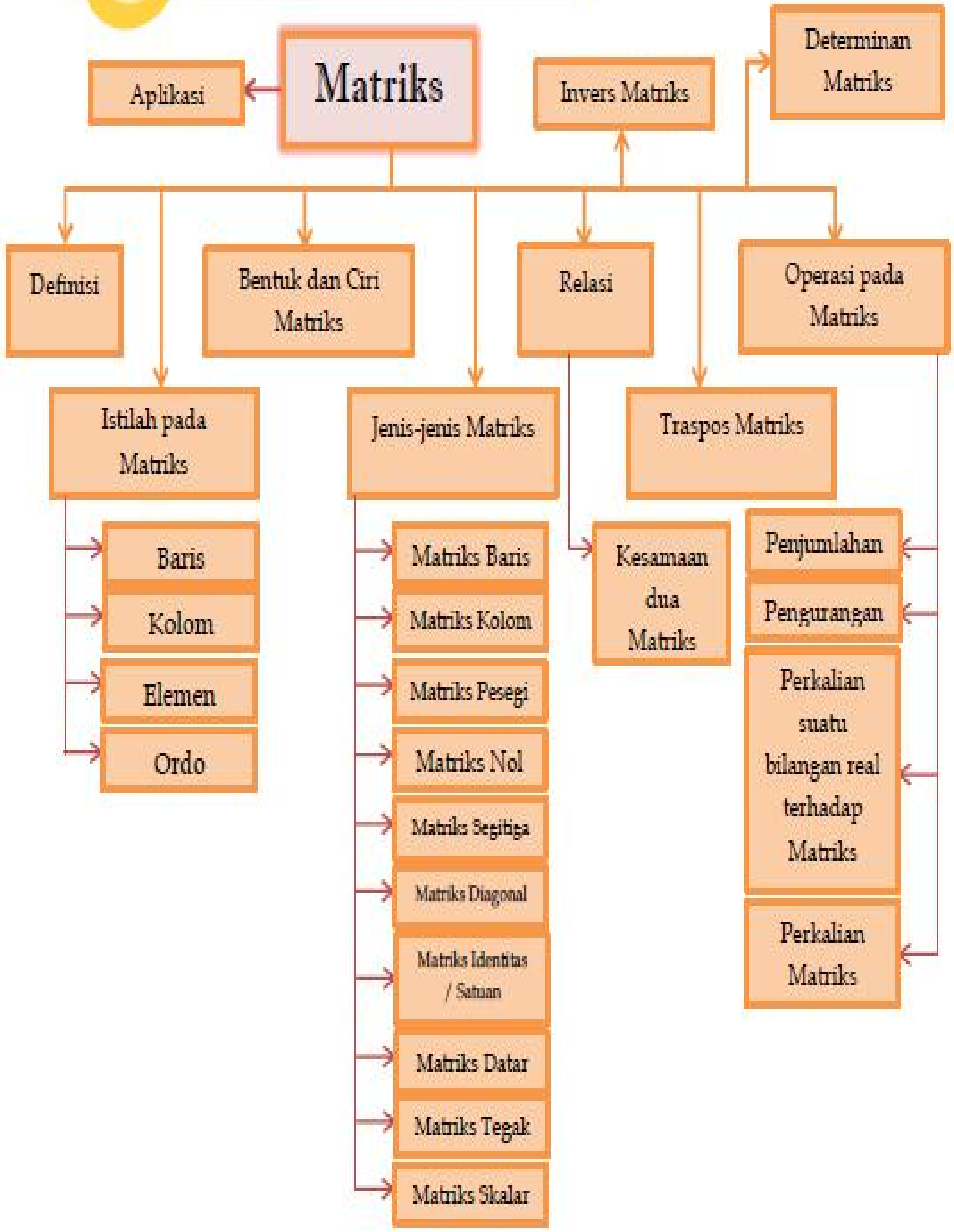
Tujuan Pembelajaran

Melalui model pembelajaran discovery learning dan aplikasi *Google meet, Google Classroom* serta WA Grup, peserta didik dapat menentukan nilai determinan dan invers matriks ordo 2 x 2 dan menentukan determinan matriks ordo 3x3 serta memiliki sikap disiplin dan kerjasama.

Pokok Bahasan

1. Determinan Matriks Ordo 2x2
2. Invers Matriks Ordo 2x2
3. Determinan Matriks Ordo 3x3

PETA KONSEP


Matriks
Aplikasi
Invers Matriks
Determinan Matriks
Definisi
Bentuk dan Ciri Matriks
Relasi
Operasi pada Matriks
Istilah pada Matriks
Jenis-jenis Matriks
Traspos Matriks
Baris
Kolom
Elemen
Ordo
Matriks Baris
Matriks Kolom
Matriks Pesegi
Matriks Nol
Matriks Segitiga
Matriks Diagonal
Matriks Identitas / Satuan
Matriks Datar
Matriks Tegak
Matriks Skalar
Kesamaan dua Matriks
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian suatu bilangan real terhadap Matriks
Perkalian Matriks

A • Determinan Matriks Ordo 2x2

Pada bagian sebelumnya, Anda telah mengenal matriks persegi, yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Pembahasan materi determinan matriks persegi yang dibahas di materi kali ini dibatasi hanya sampai matriks 3×3

Matriks berordo 2 ×2 yang terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 ×2. Misalkan Aadalah matriks persegi ordo 2 ×2 dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Definisi

- ***Determinan matriks A didefinisikan sebagai selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau |A|.***
- ***Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.***

Determinan matriks berordo dua

Diagonal sekunder

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Diagonal utama

maka

$$\boxed{\textbf{det A} = |\mathbf{A}| = a \cdot d - b \cdot c}$$

Contoh :

1. Jika matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ cari determinan matriks A !

Jawab:

det A = |A|= $a \cdot d - b \cdot c$ = $2 \cdot 6 - 3 \cdot 4$ = 12 - 12 = 0

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2a - 10 & 4 \\ -3 & a \end{bmatrix}$.

2. Hitunglah nilai-nilai a yang memenuhi det A = 0.

Jawab:

det A = 0

det A = $\begin{vmatrix} 2a - 10 & 4 \\ -3 & a \end{vmatrix}$

$= ((2a - 10) \times a) - (-3 \times 4)$

$= 2a^2 - 10a + 12$

Oleh karena det A = 0 maka

$2a^2 - 10a + 12 = 0$

$a^2 - 5a + 6 = 0$

$(a - 3)(a - 2) = 0$

$a - 2 = 0$ atau $a - 3 = 0$

$a = 2$ $\quad a = 3$

Jadi, nilai a yang memenuhi adalah 2 dan 3.

B • Invers Matriks Ordo 2x2

Ketika di SMP, Anda telah mempelajari operasi hitung pada bilangan. Pada saat mempelajari konsep tersebut, Anda dikenalkan dengan istilah invers (kebalikan) bilangan. Suatu bilangan jika dikalikan dengan inversnya akan menghasilkan unsur identitas. Senada dengan hal tersebut, dalam aljabar matriks pun berlaku ketentuan seperti itu. Ketika Anda mengalikan suatu matriks dengan matriks inversnya, akan dihasilkan identitas, yang dalam hal ini adalah matriks identitas.

1. Adjoint Matriks

Adjoint disingkat **Adj**.

Adjoint suatu matriks bujur sangkar adalah :

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka Adj A = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Contoh Soal :

Tentukan matriks adjoint dari :

1. A = $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka Adj A = $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
2. B = $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, maka Adj B= $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -(-2) & 10 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$
3. C = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$, maka Adj C = $\begin{bmatrix} 4 & -(-1) \\ -(-7) & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

2. Invers Matriks

Jika A sebuah matriks maka invers matriks A adalah A^{-1} dan $A \times A^{-1} = I$, dimana I adalah matriks identitas.

Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika |A| = 0, maka matriks A tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks singular.
- Jika |A| ≠ 0, maka matriks A mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks nonsingular.

Misalkan matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invers dari A adalah A^{-1}, yaitu

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$ an det A ≠ 0

Contoh Soal :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Maka invers matriks A A^{-1}

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4 - 7\cdot 1}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8-7}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Invers suatu Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks sebarang yang memiliki invers, AB dan BA juga memiliki invers maka berlaku hubungan berikut.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

C • Determinan Matriks Ordo 3x3

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari determinan mariks berordo 3 ×3. Misalkan A matriks persegi berordo 3 ×3 dengan bentuk

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 ×3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan metode Sarrus. Adapun langkahlangkah yang harus Anda lakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 ×3 dengan metode Sarrusadalah sebagai berikut:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & & & & & - & - & - \end{matrix}$$

$$\det A = |A| = \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & & & + & + & + \end{matrix}$$

$$\det A = |A| = a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

Contoh Soal :

Tentukan determinan matriks $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Jawab:

$$\det A=\left[\begin{array}{ccc}2 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{array}\right]\begin{array}{cc}2 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{array}$$

det A $= 2\cdot2\cdot3+1\cdot1\cdot5+4\cdot4\cdot1-5\cdot2\cdot4-1\cdot1\cdot2-3\cdot4\cdot1$

= 12 + 5 + 16 – 40 – 2 – 12

= -21

D • Aplikasi Penggunaan Matriks

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode grafik, metode eliminasi,dan metode substitusi. Pada bab ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan menggunakan matriks. Misalkan, sistem persamaan linear berikut:

$$ax+by=P$$

$$cx+dy=Q$$

Bila ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P\\ Q\end{bmatrix}$$

Maka :

$$\boxed{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}P\\ Q\end{bmatrix}}$$

Contoh Soal :

1. Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear berikut.

   2x – 3y = 4

   3x – y = –1

   –2x + 2y = 2

   Jawab:

   Matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut adalah $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

2. Tentukan nilai x dan y dari persamaan berikut dengan cara matriks

   $2x+y = 8$

   $5x+3y = 21$

   Jawab : $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 21\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3-5\cdot 1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 8+(-1)\cdot 21 \\ -5\cdot 8+2\cdot 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-21 \\ 40+42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, x = 3 dan y = 2

3. Ibu membeli 5 kg tepung dan 3 kaleng mentega dan harus membayar Rp. 30.500,-. Kakak membeli 2 kg tepung dan 1 kaleng mentega dan ia harus membayar Rp. 7.500,- tulis pernyataan di atas dalam bentuk matriks !

   Jawab :

   $5x+3y=30.500$

   $2x+y$ = 7.500

   Dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30500 \\ 7500 \end{bmatrix}$$

Selain dengan cara di atas, sistem persamaan linear dapat juga diselesaikan dengan menggunakan **aturan Cramer** berikut.

Jika AX = B maka $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, ..., $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$.

A_j matriks yang didapat dengan mengganti elemen-elemen pada kolom-j dari matriks A dengan elemen-elemen matriks B.

Contoh soal :

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan aturan Cramer!

3x - 4y = 5

5x + 6y = 1

Jawab:

Terlebih dahulu, tentukan |A|, |A1|, dan |A2|

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - (-4).5 = 18 + 20 = 38$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5.6 - (-4).1 = 30 + 4 = 34$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 5.5 = 3 - 25 = -22$$

Jadi, $x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{34}{38} = \frac{17}{19}$ dan $y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-22}{38} = -\frac{11}{19}$

Dengan demikian, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = \frac{17}{19}$ dan $y = -\frac{11}{19}$.

Ayo Berlatih

I. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan cara invers matriks.

1. $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3a - 2b = 7 \\ -2a + b = -5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 5y - 12 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$

II. Harga 3 rim kertas HVS folio dan 2 rim kertas CD Rp. 35.000,- harga 4 rim kertas HVS folio dan 5 rim kertas CD Rp. 56.000,- jika pernyataan tersebut di tulis dalam bentuk matriks adalah ....

III. Pada liburan semester, sekolah A dan sekolah B mengadakan karyawisata ke Bali. Sekolah A menyewa 10 bus dan 5 mobil. Sekolah B menyewa 7 bus dan 3 mobil. Biaya sewa kendaraan sekolah A sebesar Rp41.250.000,00, sedangkan sekolah B Rp28.250.000,00. Jika diasumsikan biaya sewa per bus dan per mobil kedua sekolah tersebut sama, tentukan harga sewa 1 bus dan 1 mobil.

E • Rangkuman

1. Sifat – sifat tranpose matriks :

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(K\ A)^t = KA^t$
4. $(A \times B)^t = B^t \times A^t$

2. Invers Matriks.

Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Dengan Determinan A, **Det A = ad – bc**

3. Sifat-Sifat Invers suatu Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks sebarang yang memiliki invers, AB dan BA juga memiliki invers maka berlaku hubungan berikut.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

Tes Formatif

1. Invers dari Matriks P dilambangkan dengan ...
   A. P^T
   B. P^{-1}
   C. P^{-T}
   D. P^1
   E. $|P|$
2. Tentukan invers dari Matriks $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   A. $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$
3. Tentukan invers dari Matriks $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
   A. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

4. Tentukan invers dari Matriks $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

A. $\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

5. Determinan Matriks $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ adalah …

A. -13
B. -9
C. 4
D. 13
E. 18

D • DAFTAR PUSTAKA

1. Permendikbud, 2013. Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 69 tahun 2013 Tentang Kerangka Dasar dan Struktur Kurikulum Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah. Kemdikbud.
2. Buku Siswa. Matematika Kelas XI Kurikulum 2013. Kemdikbud.
3. Buku Guru. Matematika Kelas XI Kurikulum 2013. Kemdikbud
4. Kasmina, Toali, Matematika SMK XI. Erlangga