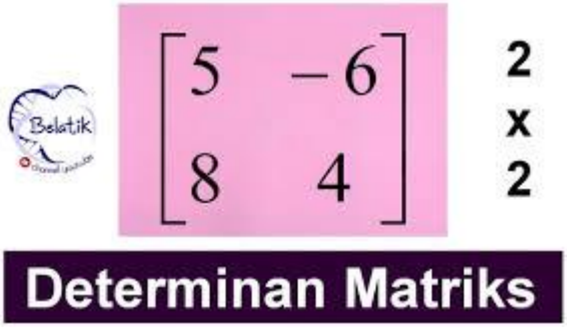
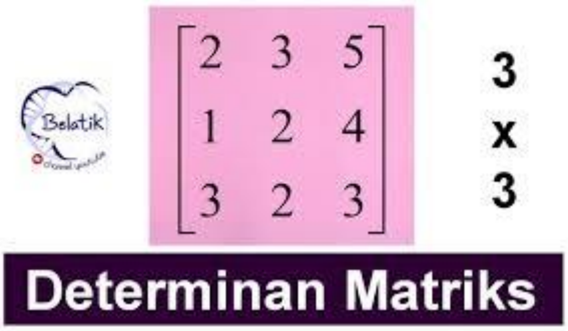
BAHAN AJAR

MODUL DETERMINAN MATRIKS





Disusun oleh:

NAMA : RETTI ARDIANTI, S.Pd

SMA N 1 CISOLOK

PPG MATEMATIKA DALJAB ANGKATAN 1

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat serta hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan modul “DETERMINAN MATRIKS” ini tepat pada waktunya. Modul ini dibuat guna sebagai media pembelajaran yang ringkas dan jelas sehingga peserta didik mampu memahami dengan lebih mudah dalam mata pelajaran metematika khususnya determinan matriks untuk tingkat SMA. Secara keseluruhan, modul ini sesuai kompetensi dasar Matematika sesuai standar yang ada.

Modul ini berisikan ringkasan – ringkasan materi dalam bab matriks khususnya materi determinan yang telah tersajikan dengan ringkas dan jelas sehingga para peserta didik mampu memahami materi dengan mudah. Selain materi, di dalam modul ini juga berisikan contoh soal sehingga peserta didik dapat lebih jelas dan lebih mengerti tentang materi yang sedang dipelajari. Selain itu, diberikan pula latihan soal dan tes formatif yang dapat membantu para peserta didik dalam menguasai segala materi mean dan dapat mengukur kemampuan masing-masing peserta didik.

Penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak demi kesempurnaan modul berikutnya. Penulis berharap semoga modul “DETERMINAN MATRIKS” ini dapat berguna dan bermanfaat bagi para pembaca khususnya bagi para peserta didik dalam menggunakan modul ini sebagai bahan ajar.

Sukabumi, September 2020

Penulis

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

Matriks dalam matematika merupakan kumpulan bilangan, simbol atau ekspresi berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat pada suatu matriks disebut dengan elemen atau disebut juga anggota dari suatu matriks. Contoh matriks dengan 3 baris dan 3 kolom yaitu sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriks banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematika misalnya dalam menemukan solusi masalah persamaan linear, transformasi linear yakni bentuk umum dari fungsi linear contohnya rotasi dalam 3 dimensi. Matriks juga seperti variabel biasa, sehingga matrikspun dapat dimanipulasi misalnya dikalikan, dijumlah, dikurangkan, serta didekomposisikan. Menggunakan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

KOMPETENSI INTI

3. Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan

KOMPETENSI DASAR

3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3

INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

3.4.1 Menentukan determinan matriks berordo 2x2

3.4.2 Menentukan determinan matriks berordo 3x3

3.4.3 Mengidentifikasi fakta determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3

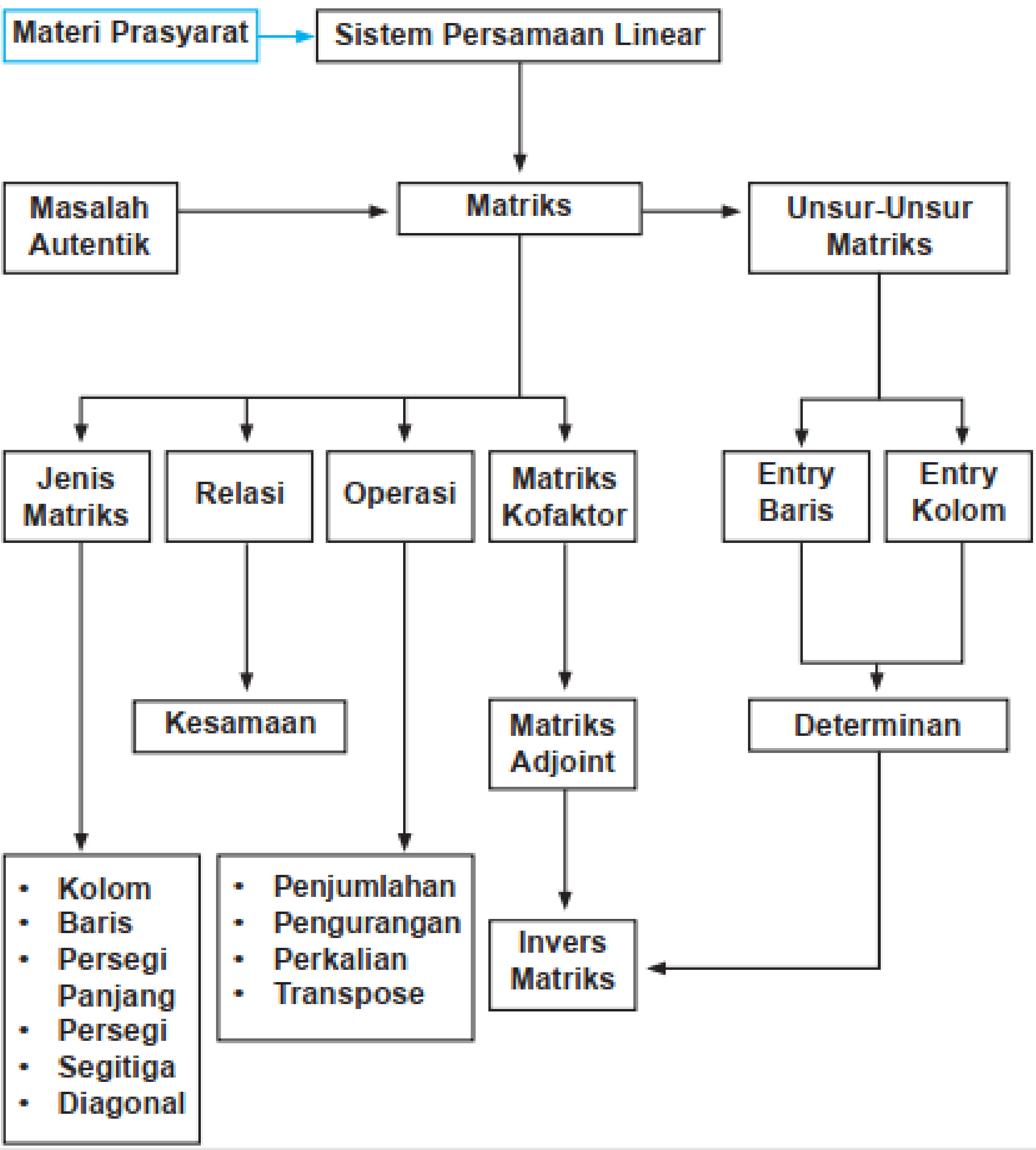
4.4.1 Menggunakan prosedur untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks berordo 2×2 dan 3×3

TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mengikuti proses pembelajaran dengan pendekatan Saintifik dan model pembelajaran Discovery Learning berbasis 4C, Literasi dan PPK serta kegiatan diskusi dan tanya jawab dengan bantuan PPT **(TPACK)** dan LKPD peserta didik dapat :

1) **Menentukan** determinan matriks berordo 2x2 secara tepat dan responsif.
2) **Menentukan** determinan matriks berordo 3x3 dengan tepat dan jujur.
3) **Mengidentifikasi** fakta determinan matriks berordo 2×2 dan 3×3 secara tepat, berfikir kritis dan berkreasi **(4C)** sekaligus memiliki sikap percaya diri **(PPK)**.
4) **Menyelesaikan** masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks berordo 2×2 dan 3×3 secara tepat, berfikir kritis dan berkreasi **(4C)** sekaligus memiliki sikap percaya diri **(PPK)**.

B. Diagram Alir



KEGIATAN BELAJAR 1

DETERMINAN MATRIKS

Teman-teman ada yang *udah tau* apa itu determinan matriks? **Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks persegi**. Maksudnya matriks persegi tuh yang kayak gimana sih? Matriks persegi adalah matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama, sehingga kalau kita gambarkan bentuk matriksnya, akan membentuk bangun layaknya persegi.

"Jadi, kalau jumlah baris dan kolomnya *nggak* sama, kita *nggak* bisa mencari determinannya?"

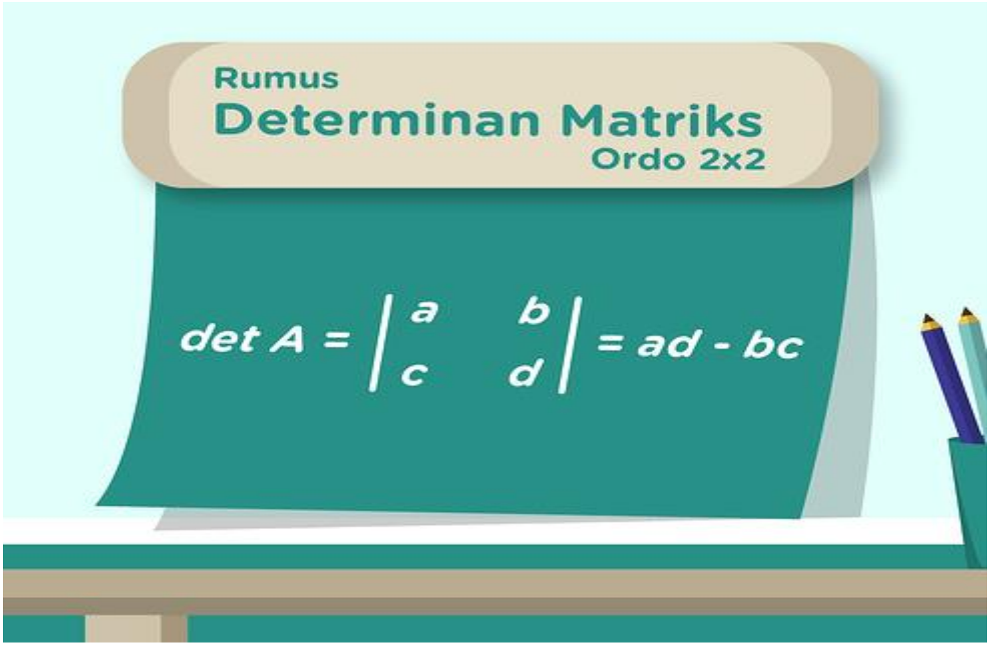
Jawabannya *udah* pasti "Ya"

Gimana, paham ya sampai sini? Oke, kita lanjut, ya. Misalnya, terdapat suatu matriks yang kita beri nama matriks A. Determinan matriks A bisa ditulis dengan tanda **det (A), det A, atau |A|**. Nah, cara mencari determinan suatu matriks juga berbeda-beda, tergantung dari ordonya. Kita bahas satu-satu, ya...

a. Determinan Matriks Ordo 2x2

Misalkan, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

adalah matriks berordo 2x2. Elemen a dan d terletak pada diagonal utama, sedangkan elemen b dan c terletak pada diagonal kedua. Determinan matriks A dapat diperoleh dengan mengurangkan hasil kali elemen-elemen diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen diagonal kedua.



Nah, supaya kamu *nggak* bingung, coba kita perhatikan contoh soal di bawah ini.

Contoh soal

Tentukanlah determinan matriks berikut!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Pembahasan:

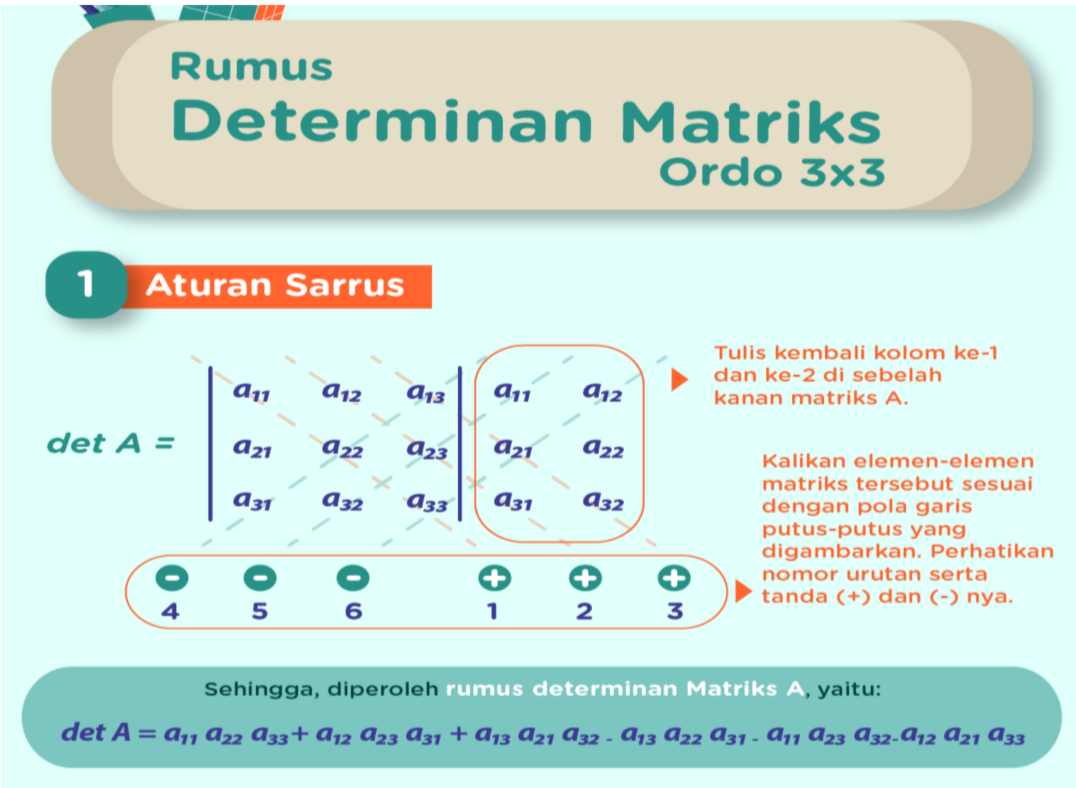
$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (5 \times 4) = 6 - 20 = -14$$

Teman-teman, mudah kan ternyata. *Hm*, kira-kira, mencari determinan matriks berordo 3x3 mudah juga *nggak* ya? Yuk, kita cari *tau*!

b. Determinan Matriks Ordo 3x3

Misalkan, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ adalah matriks berordo 3x3. Terdapat dua cara yang bisa dilakukan untuk mencari determinannya, yaitu menggunakan aturan *Sarrus* dan metode minor-kofaktor.

Hmm… Kamu pasti bingung ya maksud rumus di atas. Tenang *aja*, di bawah ini *udah* ada contoh soal dan pembahasannya kok. Jadi, bisa kamu pahami dengan baik. Tapi, jangan cuma dibaca *aja* ya. Supaya kamu lebih mudah paham, coba deh ikutan corat-coret di kertas. *Yuk*, siapkan pulpen dan kertasnya!



Contoh soal

Tentukan determinan matriks berikut ini menggunakan aturan *Sarrus* dan metode minor-kofaktor!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pembahasan:

- **Aturan *Sarrus***

Agar lebih mudah, kita tulis kembali elemen-elemen pada kolom ke-1 dan ke-2 di sebelah kanan matriks A sebagai berikut:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

Kemudian, kita tarik garis putus-putus seperti gambar di atas. Kalikan elemen-elemen yang terkena garis putus-putus tersebut. Hasil kali elemen yang terkena garis putus-putus berwarna biru diberi tanda positif (+), sedangkan hasil kali elemen yang terkena garis putus-putus berwarna oranye diberi tanda negatif (-). Ingat urutan penulisannya juga, ya!

$$\det A = 4 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 2 - 8 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4$$

$$\det A = 16 + 30 + 32 - 24 - 40 - 16 = -2$$

Sepintas terlihat cukup rumit ya. Tapi, kalau kamu sering berlatih soal, pasti akan hafal dengan sendirinya. Jadi, jangan malas untuk berlatih soal, ya! Sekarang, kita coba kerjakan menggunakan metode yang satunya lagi *kuy*!

2 Metode Minor-Kofaktor

Misalkan, A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Minor matriks A_{ij} diberi notasi M_{ij}, dengan $M_{ij} = \det A_{ij}$.
Kofaktor matriks A_{ij} diberi notasi C_{ij}, dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Sehingga, diperoleh rumus determinan Matriks A, yaitu:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} \text{ , untuk sembarang kolom } j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Atau

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} \text{ , untuk sembarang baris } i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dengan a_{ij} = elemen matriks A_{ij}

- **Metode Minor-Kofaktor**

Berdasarkan rumus minor-kofaktor di atas, determinan matriks A dapat dicari dengan menghitung jumlah seluruh hasil kali antara kofaktor matriks bagian dari matriks A dengan elemen-elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A. Jadi, pertama, kita pilih salah satu baris atau kolom matriks A untuk mendapatkan nilai determinannya. Misalnya, kita pilih baris ke-1. Elemen-elemen matriks baris ke-1, yaitu a_{11}, a_{12}, dan a_{13}.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4 \quad 2 \quad 8} \\ 2 \quad 1 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, karena kita pilih elemen-elemen pada baris ke-1, rumus determinan matriks yang kita gunakan adalah sebagai berikut:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot C_{ij} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$$

Langkah kedua, kita cari kofaktor matriks bagian dari matriks A (C_{ij}). Cij = $(-1)^{i+j}$ M_{ij} dan M_{ij} = det A_{ij} dengan A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j. Maksudnya bagaimana? Oke, coba kamu perhatikan baik-baik ya.

Sebelumnya, kita telah memilih elemen-elemen pada baris ke-1, yaitu a_{11}, a_{12}, dan a_{13}. Oleh karena itu, matriks bagian dari matriks A nya adalah A_{11}, A_{12}, dan A_{13}.

- A_{11} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{12} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-2.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{13} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-3.

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Sehingga,

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} \\
&= 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 4 \cdot (4 - 10) - 2 \cdot (8 - 15) + 8 \cdot (4 - 3) \\
&= -24 + 14 + 8 = -2
\end{aligned}
$$

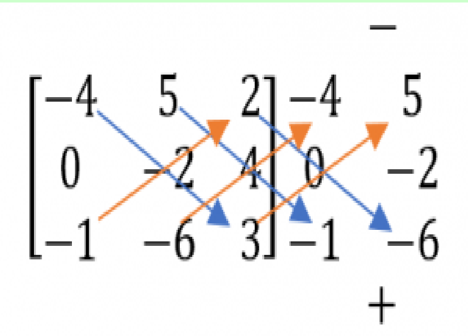
c. Contoh Soal

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

   Nilai $\det(A) = \cdots$

Penyelesaian:

Determinan matriks berordo 3×3 dapat ditentukan secara khusus dengan menggunakan **Aturan Sarrus** sebagai berikut.



$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-4)(-2)(3) + 5(4)(-1) + (2)(0)(-6) \\
&\quad - ((-1)(-2)(2) + (-6)(4)(-4) + (3)(0)(5)) \\
&= 24 - 20 + 0 - (4 + 96 + 0) \\
&= -96
\end{aligned}
$$

Jadi, determinan matriks A adalah $\boxed{\det(A) = -96}$

2.

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan matriks C memenuhi $AC = B$, maka $\det(C) = \cdots$

Penyelesaian:

Dari matriks A dan B yang diberikan, diketahui

$\det(A) = 1(3) - 1(2) = 1$ dan

$\det(B) = 4(3) - 1(1) = 11$

Gunakan Teorema Determinan Matriks.

$$\begin{aligned} AC &= B \\ \det(A) \cdot \det(C) &= \det(B) \\ \det(C) &= \frac{\det(B)}{\det(A)} \\ \det(C) &= \frac{11}{1} = 11 \end{aligned}$$

Jadi, determinan dari matriks C adalah $\boxed{\det(C) = 11}$

RANGKUMAN

1. Notasi Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinan dari matriks A dapat dinyatakan

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Misalnya matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka deteminan A adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

TES FORMATIF

1. Tentukan Determinan dari matriks A =

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

A. 39
B. -39
C. -9
D. 9
E. 18

1. Tentukan Determinan dari matriks B =

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

A. 17
B. -17
C. 3
D. -3
E. 14

2. Tentukan determinan matriks A =

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A. 96
B. -96
C. 26
D. -26
E. 90

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3x+6 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 15 & 3x+6 \end{pmatrix}$, maka perkalian nilai-nilai x yang memenuhi $\det(AB) = 729$ adalah ....

A. -4
B. -3
C. 1
D. 3
E. 4

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Jika $AC = B$, maka determinan matriks C adalah $\cdots$

A. 5
B. 3
C. 2
D. -1
E. -2

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Cocokkanlah jawaban Ananda dengan petunjuk kunci jawaban soal latihan pada kegiatan belajar 1 berikut ini :

1. C
2. D
3. B
4. B
5. C

Setiap soal bernilai 20. Apabila tingkat penguasaan ananda mencapai nilai 80 atau lebih, maka ananda dianggap telah tuntas memahami materi ini dengan baik. Apabila nilai yang ananda peroleh kurang dari 80, maka ananda harus mempelajari kembali materi pada kegiatan belajar ini.

GLOSARIUM

1.	Matriks	:	Kumpulan bilangan, simbol atau ekspresi berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom.
2.	Determinan	:	Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks persegi.
3.	Ordo	:	Jika banyak baris suatu matriks adalah m, dan banyak kolom suatu matriks adalah n, maka matriks tersebut memiliki ordo matriks atau ukuran m x n
4.	Elemen	:	Bilangan-bilangan yang terdapat pada suatu matriks atau disebut juga anggota dari suatu matriks
5.	Minor-Kofaktor	:	Metode mencari determinan Matriks berordo 3x3
6.	Sarrus	:	Metode mencari determinan Matriks berordo 3x3
7.	Baris	:	Deretan elemen matriks ke samping
8.	Kolom	:	Deretan elemen matriks ke bawah
9.	Diagonal Sekunder	:	Diagonal sekunder merupakan kebalikan dari garis miring diagonal utama.
10.	Diagonal Utama	:	Diagonal utama merupakan elemen-elemen dengan yang bisa membentuk garis miring
11.	Matriks Persegi	:	Matriks persegi adalah matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama, sehingga kalau kita gambarkan bentuk matriksnya, akan membentuk bangun layaknya persegi.

DAFTAR PUSTAKA

Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan. (2017). *Buku Peserta didik Matematika SMA/MA/SMK/MAK KELAS XI Edisi Revisi*. Jakarta: Kemendikbud.

Sukardi. 2019. *Soal dan Pembahasan Super Lengkap – Matriks (Tingkat SMA/Sederajat)*. https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-matriks-determinan-dan-invers-matriks/ (diakses tanggal 20 September 2020).

Hanni Ammariah. 2019. Determinan dan Invers Matriks. https://blog.ruangguru.com/cara-mencari-determinan-dan-invers-matriks (diakses tanggal 20 September 2020).