BAHAN AJAR OPERASI PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS

UNTUK SMK KELAS X

DISUSUN

O

L

E

H

NAMA : MUSRIAH, S.Pd

NO PESERTA : 20031518010287

KELAS : 2

PPG DALAM JABATAN MATEMATIKA UNWIDHA ANGKATAN 1
TAHUN 2020

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN JARAK JAUH
(RPP - JJ)

SMK BP DARUL ULUM REJOSARI

Mata Pelajaran :
Matematika

Kelas / Semester :
X / 1 (Satu)

Materi Pokok :
Matriks

Alokasi Waktu :
2 Jam Pelajaran

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mengikuti proses pembelajaran secara daring, peserta didik diharapkan dapat menyelesaikan operasi penjumlahan dan pengurangan matriks dengan benar.

B. METODE PEMBELAJARAN

Pembelajaran Jarak Jauh (PJJ)

C. MEDIA PEMBELAJARAN

- Grup *WhatsApp*
- Youtube
- Google Classroom

D. SUMBER BELAJAR

1. Kasmina dan Toali. (2014). *Matematika untuk SMK/MAK Kelas X*. Jakarta: Erlangga.
2. Bahan ajar pada Youtube

KEGIATAN PENDAHULUAN

Guru :

- Melakukan pembukaan dengan salam pembuka, memanjatkan ***syukur*** kepada Tuhan YME melalui chat *Grup WhatsApp*
- Menanyakan keadaan peserta didik di rumah melalui chat *Grup* WhatssApp.
- Memerintahkan siswa untuk mengisi daftar hadir melalui chat *Grup* WhatssApp
- Memberitahukan materi pelajaran yang akan dibahas.
- Menyampaikan tentang Tujuan Pembelajaran
- Menjelaskan mekanisme pelaksanaan pengalaman belajar sesuai dengan langkah-langkah pembelajaran. Misalnya: menyiapkan buku siswa sebagai pegangan, menggunakan *Google Classroom* dan mengakses Youtube serta teknis yang lainnya.

KEGIATAN INTI

KEGIATAN LITERASI

Peserta didik diberi motivasi atau rangsangan untuk memusatkan perhatian pada topik materi operasi penjumlahan dan pengurangan matriks dengan cara :

- Menayangkan video yang relevan mengenai operasi penjumlahan dan pengurangan matriks pada unggahan youtube (https://youtu.be/LeuCvLVwmic)
- Kegiatan literasi ini dilakukan siswa dari rumah dengan mengakses unggahan youtube / mendownload video unggahan youtube terkait materi yang diunggah.

CRITICAL THINKING (BERPIKIR KRITIS)

Guru memberikan kesempatan pada peserta didik untuk mengidentifikasi sebanyak mungkin pertanyaan yang berkaitan dengan materi yang disajikan dan akan dijawab melalui kegiatan belajar pada laman *Grup WhatssApp.*

COLABORATION (KERJASAMA)

- **Mendiskusikan materi pada *Grup WhatsApp***
  Peserta didik dan guru secara bersama-sama membahas contoh yang diberikan mengenai materi operasi penjumlahan dan pengurangan matriks.

CREATIVITY (KREATIFITAS) dan COMMUNICATION (KOMUNIKASI)

- Menyimpulkan tentang poin-poin penting yang muncul dalam kegiatan pembelajaran yang baru dilakukan.
- Bertanya tentang hal yang belum dipahami.
- Mengerjakan soal melalui *Google Clasroom* (https://classroom.google.com/c/MTQ1NTc1MzYxNDA5/a/MTY5ODcxMTg1NzU2/details) yang diberikan guru melalui *Grup WhatssApp* untuk mengecek penguasaan siswa terhadap materi pembelajaran.

KEGIATAN PENUTUP

Peserta didik :

- Membuat resume (***CREATIVITY***) tentang poin-poin penting yang muncul dalam kegiatan pembelajaran tentang materi operasi penjumlahan dan pengurangan matriks yang baru dilakukan.

Guru :

- Kegiatan diakhiri dengan salam lewat forum chat *Whatsapp Group*
- Memeriksa pekerjaan siswa dari Google Classroom
- Peserta didik yang sudah selesai diperiksa hasil pekerjaannya maka akan dinilai dan diberikan komentar melalui *Grup WhatssApp*.

E. PENILAIAN

- **Soal Uraian** (Lihat di Link Google Classroom*)*
  Peserta didik membuka / menyimak dan mempelajari materi pada unggahan youtube kemudian Peserta didik mengumpulkan foto selfi (sedang memegang rangkuman materi hasil menonton unggahan youtube) di *Grup WhatssApp dan* melihat soal penugasan di *google classroom* .

Mengetahui,	Grobogan, September 2020
Kepala Sekolah,	Guru Mata Pelajaran,
Moh. Ronji, S.Kom.	**Musriah, S.Pd.**

OPERASI PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS

KOMPETENSI INTI

KI 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.

KI 2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, santun, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran, damai), bertanggung jawab, responsif, dan pro-aktif, dalam berinteraksi secara efektif sesuai dengan perkembangan anak di lingkungan, keluarga, sekolah, masyarakat dan lingkungan alam sekitar, bangsa, negara, kawasan regional, dan kawasan internasional.

KI 3. Memahami, menerapkan, menganalisis dan mengevaluasi pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif pada tingkat teknis, spesifik, detil, dan kompleks berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI 4. Menunjukkan keterampilan menalar, mengolah, dan menyaji secara efektif, kreatif, produktif, kritis, mandiri, kolaboratif, komunikatif, dan solutif, dalam ranah konkret dan abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah, serta mampu menggunakan metoda sesuai dengan kaidah keilmuan.

KOMPETENSI DASAR

3.16. Menetukan nilai determinan, invers dan tranpose pada ordo 2 x 2 dan nilai determinan dan tranpose pada ordo 3 x 3

4.16. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan, invers dan tranpose pada ordo 2 x 2 serta nilai determinan dan tranpose pada ordo 3 x 3

INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

3.16.1. Menganalisis operasi penjumlahan dan pengurangan matriks
4.16.1. Menyelesaikan masalah operasi penjumlahan dan pengurangan matriks dalam kehidupan sehari – hari

TUJUAN PEMBELAJARAN

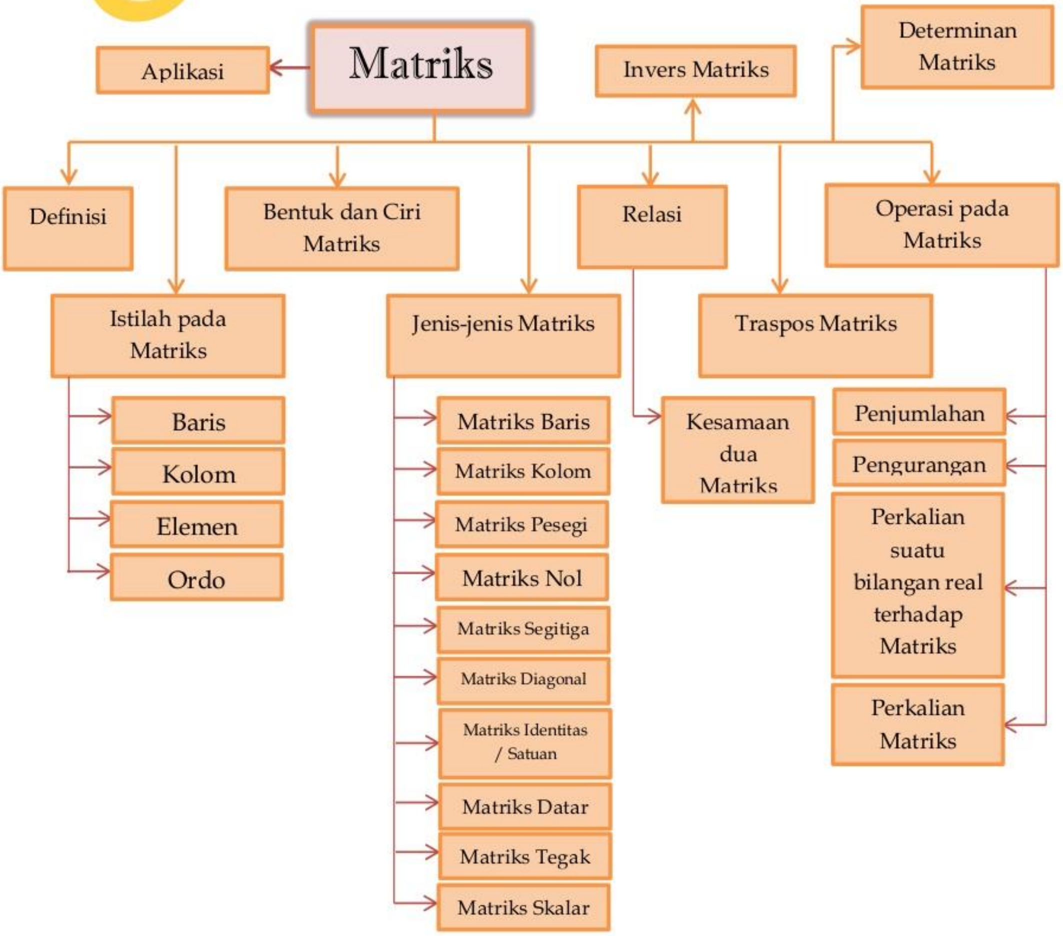
Melalui pendekatan saintifik dengan model *problem based learning,* berbasis 4C, literasi, dan PPK serta menggunakan metode diskusi, dan tanya jawab, peserta didik dapat:

3.16.1. Menganalisis operasi penjumlahan dan penguranga matriks dengan benar

4.16.1. Menyelesaikan masalah operasi penjumlahan dan pengurangan matriks yang berhubungan dengan kehidupan sehari – hari dengan benar

PETA KONSEP

:


Matriks
Aplikasi
Invers Matriks
Determinan Matriks
Definisi
Bentuk dan Ciri Matriks
Relasi
Operasi pada Matriks
Istilah pada Matriks
Jenis-jenis Matriks
Traspos Matriks
Baris
Kolom
Elemen
Ordo
Matriks Baris
Matriks Kolom
Matriks Pesegi
Matriks Nol
Matriks Segitiga
Matriks Diagonal
Matriks Identitas / Satuan
Matriks Datar
Matriks Tegak
Matriks Skalar
Kesamaan dua Matriks
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian suatu bilangan real terhadap Matriks
Perkalian Matriks

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini siswa akan mempelajari materi penjumlahan dan pengurangan matriks. Namun sebelum ke materi penjumlahan dan pengurangan matriks, terlebih dahulu siswa akan mempelajari materi mengenal bentuk dan ciri matriks, pengertian dan istilah dalam matriks, jenis matriks, transpose matriks, dan kesamaan matriks.

B. Prasyarat

Untuk mempelajari modul ini, para siswa diharapkan telah menguasai dasar-dasar penjumlahan, pengurangan, pembagian, dan perkalian, sistem persamaan linier, dan sifat penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bilangan real.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu anda lakukan adalah sebagai berikut:

1. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
2. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
3. Kerjakanlah soal latihan dengan cermat. Jika Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal latihan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Jika Anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat Anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Menganalisis operasi penjumlahan dan penguranga matriks dengan benar
2. Menyelesaikan masalah operasi penjumlahan dan pengurangan matriks yang berhubungan dengan kehidupan sehari – hari dengan benar

Pernahkah kalian mengamati denah tempat duduk di kelas ? Berdasarkan denah tersebut, pada baris dan kolom berapakah kalian berada ? Siapa sajakah yang duduk pada baris pertama ? Dengan menggunakan matriks, kalian dapat meringkas penyajian denah tersebut sehingga dengan mudah diketahui tempat duduk kalian dan teman – teman .

Seorang statistikawan sedang mengadakan penelitian pada sebuah perpustakaan yang ada di Purwodadi mengenai minat baca anggota perpustakaan berdasarkan usia dan jenis buku. Dia mengelompokkan usia menjadi tiga bagian yaitu anak – anak (≤ 12 tahun), remaja (12 tahun < x < 20 tahun) dan dewasa (≥ 20 tahun), sedangkan jenis buku dikelompokkan menjadi buku fiksi, non fiksi, dan pengetahuan umum. Hasil penelitian yang diperoleh dituliskan dalam tabel sebagai berikut :

Usia	Fiksi	Non Fiksi	Pengetahuan Umum
Anak – anak	25	9	5
Remaja	40	35	20
Dewasa	30	50	45

Angka – angka yang ada di dalam kotak merupakan jumlah orang yang meminjam buku berdasarkan jenis buku yang dipinjam dan usia peminjam. Ternyata, bentuk tabel di atas dapat dibuat lebih sederhana lagi menjadi $\begin{bmatrix} 25 & 9 & 5 \\ 40 & 35 & 20 \\ 30 & 50 & 45 \end{bmatrix}$.

Bentuk ini disebut sebagai matriks, yang terdiri dari sejumlah baris dan kolom. Baris pertama yaitu [25 9 5] merupakan banyaknya peminjam dari kalangan anak – anak. Angka 25 menunjukkan banyak anak –anak yang meminjam buku fiksi, Angka 9 menunjukkan banyak anak –anak yang meminjam buku non fiksi ddan seterusnya. Kolom pertama yaitu $\begin{bmatrix} 25 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$ merupakan banyaknya buku fiksi yang dipinjam, Angka 40 menunjukkan banyaknya buku fiksi yang dipinjam oleh remaja, Angka 30 menunjukkan banyaknya buku fiksi yang dipinjam oleh dewasa, dan seterusnya. Pada matriks di atas memiliki tiga baris dan tiga kolom yang selanjutnya dinamakan matriks berordo tiga.

Dengan menggunakan matriks, bentuk yang lebih kompleks dapat ditampilkan menjadi lebih sederhana. Mungkin matriks merupakan hal baru bagi kalian, tetapi mempelajari matriks tidaklah sulit. Selama kalian teliti dalam perhitungandan memahami rumus yang diberikan, permasalahan mengenai matriks tentu dapat kalian atasi. Ada beberapa sifat matriks yang perlu kalian perhatikan. Untuk mengetahuinya dapat kalian pelajari pada bab ini.

BAB 2 MATERI

A. Mengenal Bentuk dan Ciri Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita di hadapkan pada masalah untuk menampilkan data atau informasi dalam bentuk tabel atau daftar.

Perhatikan data atau informasi data wisudawan FMIPA UPLI pada April 2003 pada tabel1 dan data absensi suatu kelas dalam rentang waktu satu semester pada Tabel 2.

Tabel 1

Jurusan	Banyak Wisudawan	
	Program Kependidikan	Program Non kependidikan
Matematika	34	8
Fisika	45	6
Biologi	51	12
Kimia	23	13

Tabel 2

	Sakit	Ijin	Tanpa Keterangan
Budi	1	1	3
Carli	3	2	0
Dodi	2	1	1

Sekarang marilah kita amati kembali kelompok-kelompok bilangan yang diperoleh daru Tabel 1 dan Tabel 2.

- Kelompok bilangan yang dipeoleh dari Tabel 1 adalah

$$\begin{matrix} 34 & 8 \\ 45 & 6 \\ 51 & 12 \\ 23 & 13 \end{matrix} \Rightarrow$$ Susunan bilangan ini berbentuk persegi panjang

- Kelompok bilangan yang diperoleh dari tabel 2 adalah

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow$$ Susunan bilangan ini berbentuk persegi

Definisi Matriks

Matriks adalah kelompok bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu susunan berbentuk persegipanjang atau persegi. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

Nama suatu matriks biasanya dilambangkan dengan huruf kapital, seperti A, B, C, … dst.

Ayo Amati

Apakah kelompok bilangan berikut merupakan matriks ?

a. $\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -3 & 9 \end{array}$

b. $\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \end{array}$

c. $\begin{array}{ccc} 4 & & 8 \\ & 3 & \end{array}$

d. $\begin{array}{ccc} & 4 & 7 \\ 9 & & \\ & 3 & 6 \end{array}$

Ayo Menalar

Menurut definisi matriks maka:

a. Kelompok bilangan $\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -3 & 9 \end{array}$ merupakan matriks, sebab susunannya berbentuk persegi dan bilangan-bilangan itu tersusun dalam baris dan kolom.

b. Kelompok bilangan $\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \end{array}$ merupakan matriks, sebab susunannya berbentuk persegi panjang dan bilangan-bilangan itu tersusun dalam baris dan kolom.

c. Kelompok bilangan . $\begin{array}{ccc} 4 & & 8 \\ & 3 & \end{array}$ bukan matriks, sebab susunannya tidak berbentuk persegi maupun persegi panjang, tetapi segitiga.

d. Kelompok bilangan $\begin{array}{ccc} & 4 & 7 \\ 9 & & \\ & 3 & 6 \end{array}$ bukan matriks, sebab susunannya tidak berbentuk persegi maupun persegi panjang, tetapi segilima.

B. Pengertian dan Istilah dalam Matriks

Pengertian Baris, Kolom, dan Elemen Matriks

Baris dari suatu matriks adalah bagian susunan bilangan yang dituliskan *mendatar* atau *horizontal* dalam matriks. *Kolom* dari suatu matriks adalah bagian susunan bilangan yang dituliskan *tegak* atau *vertikal* dalam matriks.

Sedangkan *elemen* atau *unsur* suatu matriks adalah bilangan-bilangan (real atau kompleks) yang menyusun matriks itu. Elemen dari suatu matriks dinotasikan dengan huruf kecil seperti *a, b, c*, ... dan biasanya disesuaikan dengan nama matriksnya. Misalkan pada matriks A, elemen-elemennya biasanya dinyatakan dengan a. Biasanya elemen-elemen dari suatu matriks diberi tanda indeks, misalnya a_{ij} yang artinya elemen dari matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & 9 \\ -7 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dengan elemen-elemen 2, 1 dan 5

Baris kedua dengan elemen-elemen -1, 7 dan 9

Baris ketiga dengan elemen-elemen -7, 4 dan 6

Baris keempat dengan elemen-elemen 8, 2 dan 4

Kolom ketiga dengan elemen-elemen 5,9,6 dan 4

Kolom kedua dengan elemen-elemen 1,7,4 dan 2

Kolom pertama dengan elemen-elemen 2, -1, -7 dan 8

Ayo Berlatih

Pada tabel berikut ditunjukkan jarak antara dua kota dalam kilometer (km).

	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	126	256	493	554	801	0

a) Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolom, tulislah matriks yang diperoleh!

b) Berapa banyak baris dan banyak kolom yang Anda peroleh dari soal a)?

c) Sebutkan elemen-elemen pada setiap baris!

d) Sebutkan elemen-elemen pada setiap kolom!

Pengertian Ordo Matriks

Banyak baris dan kolom dari suatu matriks menentukan *ordo* atau *ukuran* bagi matriks itu.

Ayo perhatikan

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 15 \\ 16 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Berapakah banyak baris dari matriks A? (2)

Berapakah banyak kolom dari matriks A? (3)

Dalam hal demikian matriks A dikatakan berordo atau berukuran 2×3 dan dituliskan dengan menggunakan notasi $A_{2\times 3}$

Bilangan 2×3 yang ditulis agak ke bawah di sebut sebagai subscrip atau indeks. Jika diamati lebih lanjut, banyak elemen dalam matriks A ditentukan oleh $2 \times 3 = 6$ yaitu merupakan hasil kali antara banyak baris dengan banyak kolom dari matriks A.

Ayo Simpulkan

Ordo atau **Ukuran** dari suatu matriks ditentukan oleh banyak baris dan banyak kolom dari matriks itu. Ordo suatu matriks ditulis sebagai perkalian dua buah bilangan bulat positif dengan bilangan pertama menyatakan benyaknya baris, dan bilangan kedua menyatakan banyaknya kolom.

Banyak elemen atau **banyak unsur** dari suatu matriks ditentukan oleh hasil kali banyak baris dengan banyak kolom dari matriks itu.

Misalkan matriks A terdiri atas *m* baris dan *n* kolom, maka matriks A dikatakan berordo $m \times n$ dan ditulis sebagai $A_{m\times n}$. Banyak elemen matriks A adalah $(m \times n)$ buah dengan elemen-elemen matriks itu dilambangkan dengan a_{ij} (*i* dari 1 sampai dengan *m* dan *j* dari 1 sampai dengan *n*). secara umum matriks A dapat ditulis dengan notasi berikut:

$$A_{m\times n} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \end{pmatrix}}^{\text{Banyak kolom = n}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{Banyak baris = m}$$

C. Jenis Matriks

Beberapa jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks adalah sebagai berikut :

1. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris saja. Matriks baris berordo $1 \times n$, dengan n adalah jumlah kolom. Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$, matriks A merupakan matriks baris yang terdiri atas 6 kolom, memiliki 6 elemen, serta berordo 1×6.

$B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, matriks B merupakan matriks baris yang terdiri atas 3 kolom, memiliki 3 elemen, serta berordo 1×3.

Jumlah elemen pada matriks baris sama dengan jumlah kolomnya.

2. Matriks Kolom

Matriks baris adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja. Matriks baris berordo $m \times 1$, dengan m adalah jumlah baris. Contoh :

$C = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, matriks C merupakan matriks kolom yang terdiri atas 3 baris, memiliki 3 elemen, serta berordo 3×1.

$D = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, matriks D merupakan matriks kolom yang terdiri atas 7 baris, memiliki 7 elemen, serta berordo 7×1.

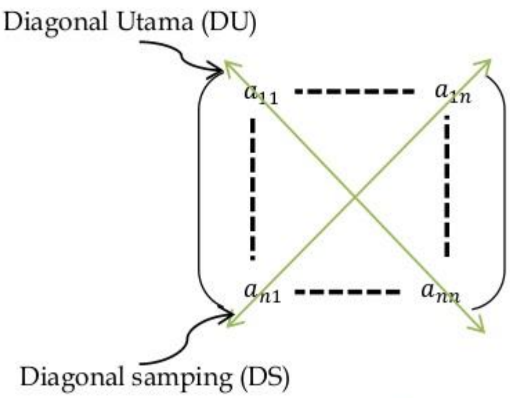
Jumlah elemen pada matriks kolom sama dengan jumlah barisnya.

3. Matriks Persegi

Misalkan suatu matriks berordo $m \times n$ dengan nilai $m=n$, sehingga diperoleh matriks berordo $n \times n$ atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut juga *matriks persegi* berordo/ berukuran n. Contoh :

$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, matriks E merupakan matriks persegi berordo dua.

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & -7 \\ 8 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$, matriks F merupakan matriks persegi berordo empat.



Dalam suatu matriks persegi, elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dengan elemen a_{nn} dinamakan sebagai diagonal utama (DU), sedangkan elemen-elemen yang terletang pada garis hubung elemen a_{n1} dengan elemen a_{n1} dinamakan sebagai diagonal samping (DS).

Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan letak elemen-elemen pada diagonal utama dan letak elemen-elemen pada diagonal samping dari suatu matriks persegi.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonal Utama (DU)

Diagonal samping (DS)

Elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama adalah 6, -3 dan 5. Sedangkan elemen-elemen yang terletak pada diagonal samping adalah 5, -3 dan 6.

4. Matriks Nol

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks nol, jika semua elemennya sama dengan nol, contoh :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Segitiga

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks segitiga jika elemenelemen yang ada di bawah atau di atas diagonal utamanya (salah satu, tidak kedua-duanya) bernilai nol. Jika elemen-elemen yang ada di bawah diagonal utama bernilai nol maka disebut sebagai matriks segitiga atas. Sebaliknya, jika elemen-elemen yang ada di atas diagonal utamanya bernilai nol maka disebut sebagai matriks segitiga bawah.

- Matriks segitiga dengan elemen-elemen di bawah diagonalnya utama semuanya bernilai nol

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriks segitiga dengan elemen-elemen di atas diagonalnya utama semuanya bernilai nol

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Matriks Diagonal

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks diagonal jika elemenelemen yang ada di bawah dan di atas diagonal utamanya bernilai nol, atau dengan kata lain elemen-elemen selain diagonal utamanya bernilai nol. Contoh:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Matriks Identitas / Matriks Satuan

Suatu matriks skalar dikatakan sebagai matriks identitas jika semua elemen yang terletak pada diagonal utamanya bernilai satu, sehingga matriks identitas disebut juga matriks satuan. Matriks identitas berordo *n* dilambangkan dengan I_n.

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Matriks Datar

Misalkan suatu matriks berordo $m \times n$ dengan $m < n$, ini berarti banyak kolom lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris. Oleh karena kolomnya lebih banyak dibandingkan dengan barisnya, maka susunan elemen-elemennya akan memanjang atau mendatar. Matriks yang berciri demikian disebut dengan matriks datar.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 11 & 7 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & -7 \\ 5 & 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Matriks Tegak

Jika $m > n$ maka banyak baris lebih banyak dibandingkan dengan banyak kolom, sehingga susunan elemen-elemennya membentuk persegi panjang tegak. Matriks yang berciri demikian disebut sebagai matriks tegak.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 3 & -4 \\ -7 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

10. Matriks Skalar

Suatu matriks diagonal dikatakan sebagai matriks skalar jika semua elemen-elemen yang terletak pada diagonal utamanya memiliki nilai yang sama,

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

D Transpos suatu Matriks

Dalam mendapatkan informasi yang berbentuk tabel, kadang-kadang Anda mendapatkan dua tabel yang berbeda namun memiliki makna yang sama. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut. Sebuah lembaga kursus bahasa asing memiliki program kursus Bahasa Inggris, Bahasa rab, dan Bahasa Mandarin. Pada lembaga tersebut, jumlah kelas kursus pada setiap program di setiap harinya tidak selalu sama. Banyaknya kelas di setiap program kursus dapat disajikan dalam dua tabel berbeda dengan makna sama berikut.

Hari / Program	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
B. Inggris	6	4	4	2
B. Arab	4	5	4	3
B. Mandarin	3	4	5	8

Program / Hari	B. Inggris	B. Arab	B. MAndarin
Senin	6	4	3
Selasa	4	5	4
Rabu	4	4	5
Kamis	2	3	8

Secara lebih sederhana, kedua tabel tersebut dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks berikut. Misalkan untuk tabel pertama dinamakan matriks Adan tabel kedua matriks B. Dengan demikian, bentuk matriks dari kedua tabel di atas adalah

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ayo Analisis

Sekarang, ayo perhatikan setiap elemen pada kedua matriks tersebut, kemudian bandingkan. Kesimpulan apa yang akan didapat? Dengan membandingkan matriks A dan matriks B tersebut, Anda dapat mengetahui bahwa elemen-elemen pada baris pertama matriks A merupakan elemen-elemen pada kolom pertama matriks B. Demikian pula dengan elemen-elemen pada baris kedua dan ketiga matriks Amerupakan elemenelemen pada kolom kedua dan ketiga matriks B. Dengan demikian, matriks B diperoleh dengan cara menuliskan elemen setiap baris pada matriks A menjadi elemen setiap kolom matriks B. Matriks yang diperoleh dengan cara ini dinamakan sebagai matriks transpos.

Definisi

Misalkan A matriks sebarang. Transpos matriks A adalah matriks B yang disusun dengan cara menuliskan elemen setiap baris matriks A menjadi elemen setiap kolom pada matriks B. Transpos dari matriks A di lambangkan dengan B = A^t(dibaca: A transpos), B = A'(dibaca: A aksen) atau B = $\bar{A}$(dibaca: putaran A)

Berdasarkan definisi transpos matriks, jika Anda memiliki matriks A yang berordo m × n maka transpos A, yaitu A^t memiliki ordo n × m.

Transpos dari matriks A berordo m × n adalah sebuah matriks A^t berordo n × m yang disusun dengan proses sebagai berikut:

- Baris pertama matriks A ditulis menjadi kolom pertama dalam matriks A^t.
- Baris kedua matriks A ditulis menjadi kolom kedua dalam matriks A^t.
- Baris ketiga matriks A ditulis menjadi kolom ketiga dalam matriks A^t.
  ..., demikian seterusnya
- Baris ke-m matriks A ditulis menjadi kolom ke-m dalam matriks A^t.

Contoh

a) Jika $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, maka transpos dari P adalah $P' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Jika $Q = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, maka transpos dari Q adalah $Q' = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) Jika $R = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -11 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, maka transpos dari R adalah $R' = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

d) Jika $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ maka transpos dari S adalah $S' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Definisi

Misalkan A adalah matriks persegi berordo n. Matriks A disebut *matriks simetris* atau *matriks setangkup* jika dan hanya jika elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama berinilai sama. Ditulis : $a_{ij} = a_{ji}$ dengan $i \neq j$.

Sebagai akibat dari definisi di atas, jika A adalah matriks simetris maka transpos dari matriks A sama dengan A itu sendiri atau $A^t = A$.

Ayo Berlatih

1. Tentukan transpose matriks dari :

a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

2. Tentukan c jika $A = \begin{bmatrix} 4a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c-6b & 2a \\ 4a+2 & 2b+14 \end{bmatrix}$ dan $A = B^T$!

E. Kesamaan Dua Matriks

Ayo Amati

Dua kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangunan yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok Asama dengan Blok B, karena banyak Ruko di Blok Asama dengan banyak Ruko di Blok B. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok A sama dengan penempatan Ruko di Blok B. Artinya 10 Ruko di Blok Adan Blok B dibagi dalam dua jajaran.

Ayo Simpulkan

Matriks A dan matriks B dikatakan sama (A= B), jika dan hanya jika:

[i] Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

[ii] Setiap pasangan elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j)

Contoh 1

Untuk matriks-matriks berikut ini, tentukan matriks-matriks mana saja yang sama.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jawab :

- Matriks Y dan P berordo sama, akan tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi Y tidak sama dengan P, ditulis Y≠P.
- Matriks Y dan Q berordo sama, akan tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi Y tidak sama dengan Q, ditulis Y=Q.
- Matriks P dan Q berordo sama, akan tetapi elemen-elemen yang seletak tidak sama. Jadi P tidak sama dengan Q, ditulis P≠Q.

Elemen seletak

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Elemen seletak

Contoh 2

Misalkan diketahui matriks A dan matriks B sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3x & 2y \end{pmatrix} \; dan \; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Jika matriks A dan matriks B, tentukan nilai *x* dan *y*.

Jawab:

- Matriks A berordo 2×2 dan matriks B juga berordo 2×2, sehingga ordo matriks *A*=ordo matriks *B*.

  Ini berarti syarat perlu bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.
- Syarat cukup bagi kesamaan matriks A dan matriks B adalah yang seletak harus bernilai sama, sehingga diperoleh hubungan:

  $3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$

  $2y = 14 \Leftrightarrow y = 1$

  Jadi jika *A*=*B* maka nilai *x*=*3* dan nilai *y*=*7*.

Ayo Berlatih

1. Carilah nilai x dan y yang memenuhi persamaan matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix} x & y \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 5x + 6 \\ 10 - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ x \end{bmatrix}$

2. Tentukan x dan y dari :

   a. $\begin{bmatrix} 3 & 3x \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2y & -5 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -4 & y+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2y-x \\ x-5 & 3 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x & 1 \\ 0 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

3. Diketahui nilai $x, y, z, a, b, c, d, e,$ dan f jika matriks A = B

   A = $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & -3 \\ 13 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

   B = $\begin{bmatrix} x & x - y & y + z \\ 2z - a & 5 + b & b + 3x \\ x + d & 2y - e & e + 2f \end{bmatrix}$

4. Tentukan a, b, c dan d dari :

   a. $\begin{bmatrix} 5 & 2a-6 \\ 3b & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2b \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -3 & a \\ b+1 & \frac{d}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & d-3 \\ a-2 & 5 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} \frac{10}{b} & 2c \\ a-2 & bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -6 \\ c & 8 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} a+c & 3b+4d \\ -b+3d & 2a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

F. Operasi pada Matriks

Penjumlahan Matriks

Di suatu kota terdapat dua toko meubel, toko meubel 'abadi' dan toko meubel 'Jaya' . beberapa jenis meubel yang dijual di toko itu adalah rak piring, almari dan kasur. Berikut ini adalah persediaan meubel yang ada di kedua toko tersebut.

	Rak piring	almari	kasur
Toko 'Abadi'	4	5	4
Toko 'Jaya'	2	9	3

Untuk menambah persediaan barang, kedua pedagang tersebut pada hari yang sama melakukan pembelian meubel-meubel baru yang jumlahnya disajikan pada tabel berikut.

	Rak piring	almari	kasur
Toko 'Abadi'	11	7	8
Toko 'Jaya'	18	4	5

Berapa banyakkah pesediaan ketiga jenis meubel yang ada di masing-masing toko setelah dilakukan pembelian tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan sangat mudah bagi Anda untuk mendapatkan jawabannya. Langkah yang dilakukan adalah menjumlahkan banyaknya meubel pada persediaan awal dengan meubel yang dibeli sebagai penambahan persediaan. Tentu saja yang dijumlahkan harus sejenis dan pada toko yang sama, misalnya banyak rak piring yang ada di toko 'Abadi' dijumlahkan dengan banyaknya banyak rak piring yang dibeli oleh toko 'Abadi' (yang dijumlahkan harus bersesuaian). Kedua tabel tersebut dapat disederhanakan dan diubah ke dalam bentuk matriks. Selanjutnya melakukan pejumlahan matriks, yaitu yang dijumlahkan adalah elemen-elemen yang seletak. Berikut definisi dari penjumlahan matriks.

Definisi

Jika A dan B adalah dua matriks yang berordo sama maka jumlah dari matriks A dan B(ditulis A+ B) adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak (bersesuaian).

Kedua tabel pada uraian tersebut jika diubah ke dalam bentuk matriks dan dijumlahkan adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+11 & 5+7 & 4+8 \\ 2+18 & 9+4 & 3+5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 20 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan informasi dari penjumlahan matriks tersebut, diperoleh informasi persediaan meubel di kedua toko tadi adalah seperti disajikan pada tabel berikut:

	Rak piring	**almari**	**kasur**
Toko 'Abadi'	15	12	12
Toko 'Jaya'	20	13	8

Sifat-sifat Penjumlahan Matriks

Misalkan A, B, C dan D adalah matriks-matriks yang berordo sama, maka dalam penjumlahan matriks :

1. Bersifat komutatif : A + B = B + A
2. Bersifat asosiatif : (A + B) + C = A + (B + C)
3. Terdapat sebuah matriks identitas, yaitu matriks O (matriks nol) yang bersifat
   A + O = O + A = A
4. Semua matriks A mempunyai lawan atau negatif A yang bersifat A + (-A) = O

Pengurangan Matriks

Dari stok terakhir kedua toko meubel tadi, di hari berikutnya beberapa pelanggan datang untuk membeli sejumlah meubel di masing-masing toko meubel tersebut. Dengan jumlah meubel yang terjual di hari itu yaitu :

	Rak piring	**almari**	**kasur**
Toko 'Abadi'	3	8	2
Toko 'Jaya'	4	7	2

Berapa banyakkah sisa pesediaan ketiga jenis meubel yang ada di masing-masing toko setelah dilakukan adanya pembelian di hari tersebut?

Sama halnya seperti pada operasi penjumlahan matriks, pada operasi pengurangan matriks berlaku pula ketentuan kesamaan ordo antara matriks yang bertindak sebagai matriks pengurang dan matriks yang akan dikurangi.

Definisi

Jika A dan B adalah dua matriks yang berordo sama maka pengurangan matriks A oleh matriks B (ditulis A- B) adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara mengurangkan setiap elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak (bersesuaian).

Pada kasus tadi, maka diperoleh :

Stok awal = $C = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 20 & 13 & 8 \end{pmatrix}$,

Penjualan = $D = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$A - B = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 20 & 13 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15-3 & 12-8 & 12-2 \\ 20-4 & 13-7 & 8-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 4 & 10 \\ 16 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Pada pengurangan matriks berlaku sifat antikomutatif, dimana : $A - B \neq B - A$

Agar lebih memahami materi penjumlahan dan pengurangan matriks, kalian juga bisa menonton video penjelasan penjumlahan dan pengurangan matriks di link ini
https://youtu.be/LeuCvLVwmic

Ayo Berlatih

1. Diketahui Matriks P = $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, Q = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, dan R = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

   Tentukan hasil operasi-operasi berikut.

   a. P + Q
   b. Q – P
   c. P – R
   d. (P + Q) – R
   e. P – (Q + R)
   f. (P + Q) – (Q + R)

G. RANGKUMAN

PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS

1. PENJUMLAHAN MATRIKS

Dua matriks dapat dijumlahkan, jika keduanya berordo sama, dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

2. PENGURANGAN MATRIKS

Dua matriks dapat dikurangkan, jika keduanya beorodo sama, dengan cara mengurangkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

BAB III PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat ketuntasan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Toali dan Kasmina. 2018. *Matematika untuk SMK/MAK Kelas X*. Jakarta: Erlangga.

Kasmina, dkk. 2008. Matematika Program keahlian Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian untuk SMK dan MAK Kelas XI. Jakarta: Erlangga