

## Bahan Ajar Pertemuan ke-1

# PERSAMAAN LINGKARAN

### KOMPETENSI DASAR

3.21 Menentukan persamaan lingkaran

4.21 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan lingkaran

### TUJUAN PEMBELAJARAN

3.21.1 Menganalisis persamaan standar/baku suatu lingkaran.

3.21.2 Menganalisis koordinat titik pusat dan jari-jari dari suatu persamaan standar lingkaran.

## CONTOH APLIKASI DI DUNIA NYATA

### A. Sinyal WiFi di Monas

Kawasan Monas memiliki luas 80 *ha*. Pada suatu acara panitia hendak memasang WiFi di tengah-tengah tugu Monas dengan jangkauan maksimum WiFi tersebut sejauh 250 *m*. Sinyal WiFi ini akan digunakan oleh petugas keamanan acara untuk keperluan komunikasi. Apakah petugas keamanan tersebut dapat berkomunikasi pada setiap titik di kawasan Monas tersebut?



Gambar 1

Tugu Monas

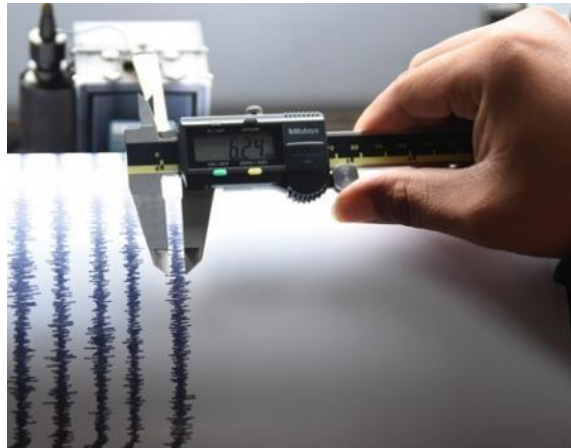
(Sumber: [www.dreamstime.com](http://www.dreamstime.com))

Untuk menjawab pertanyaan di atas kita harus menentukan batas terluar sinyal WiFi yang dapat dijangkau oleh petugas keamanan. Batas terluar tersebut merupakan kumpulan

titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu (sumber sinyal Wifi). Kumpulan titik-titik tersebut dapat dinyatakan dengan **persamaan lingkaran**.

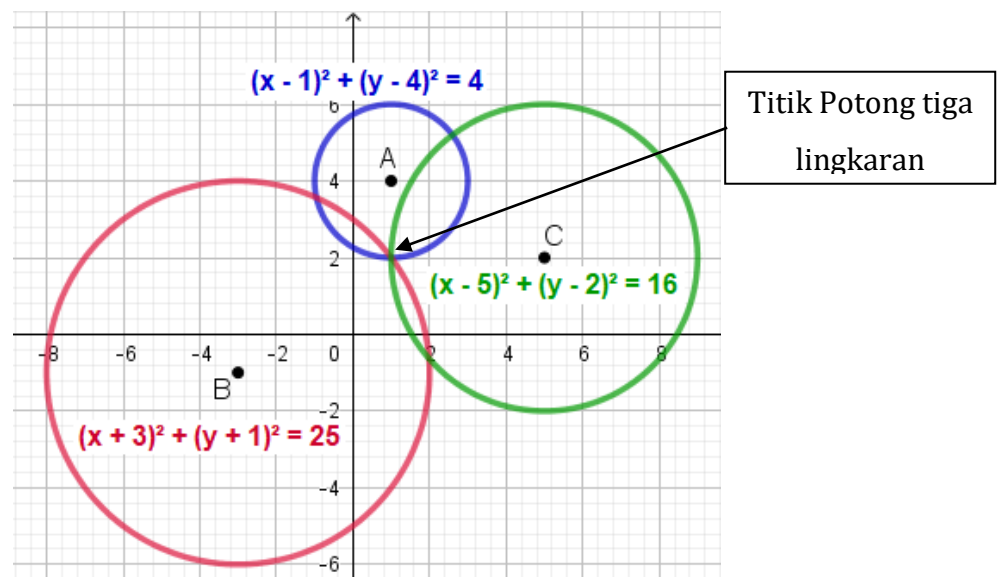
### B. Menentukan Pusat (Episentrum) Gempa Bumi

Episentrum gempa bumi adalah titik pada permukaan bumi tepat di atas asal lokasi gempa. Seismograf dapat digunakan untuk menentukan pusat gempa bumi dengan cara memasangnya pada tiga tempat berbeda dengan mengasumsikan episentrum ketiga tempat tersebut.



Gambar 2 Seismograf  
(Sumber: eljohnews.com)

Misalkan seismograf dipasang pada lokasi A, B, dan C dengan koordinat titik  $A(1,4)$ ;  $B(-3,-1)$  dan  $C(5,2)$ . Biarkan Episentrum berjarak 2 km dari A; 5 km dari B dan 4 km dari C. Pusat gempa sebenarnya adalah titik potong tiga lingkaran yang berpusat di A, B, dan C dengan jari-jari masing-masing 2, 5 dan 4 seperti terlihat pada Gambar 3.



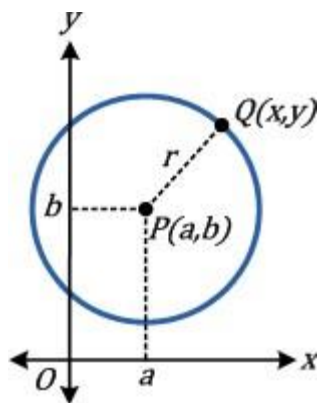
Gambar 3 Aplikasi Persamaan Lingkaran untuk Menentukan Episentrum Gempa Bumi  
(Sumber: Geogebra)

## Persamaan Lingkaran

Lingkaran tidak hanya dapat dinyatakan dalam bentuk (gambar) geometris beserta simbol-simbolnya, namun dapat juga dinyatakan dalam bentuk aljabar, yaitu persamaan lingkaran. Mari kita ingat kembali definisi lingkaran.

### Definisi:

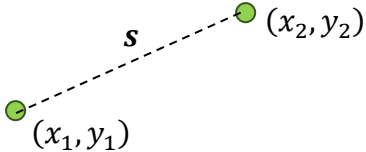
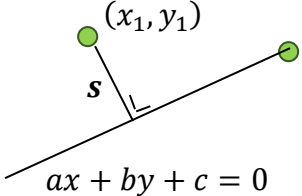
**Lingkaran** adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang datar yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap. Jarak yang sama disebut jari-jari (*radius*), sedangkan titik tetap disebut pusat (*center*).



Gambar 4 Lingkaran berpusat di P

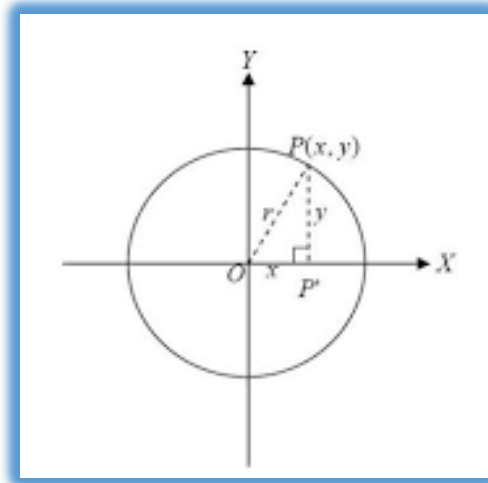
Gambar 4 merupakan lingkaran yang berpusat di  $P(a, b)$  dengan jari-jari  $r = |PQ|$ .

Dalam menentukan persamaan lingkaran, kita harus mengerti tentang formula jarak. Berikut ini diberikan beberapa formula untuk menentukan jarak:

<ul style="list-style-type: none"><li>Jarak Antara dua titik</li></ul> 	Jarak antara titik $(x_1, y_1)$ dan $(x_2, y_2)$ ditentukan oleh: $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
<ul style="list-style-type: none"><li>Jarak Antara Titik dengan garis</li></ul> 	Jarak antara titik $(x_1, y_1)$ dengan garis $ax + by + c = 0$ ditentukan oleh: $s = \left  \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right $

### A. Persamaan Lingkaran dengan Pusat O (0,0)

Perhatikan Gambar 5 yang menunjukkan lingkaran yang berpusat di O (0,0) dan jari-jari  $r$  pada sebuah bidang kartesius.



Gambar 5 Lingkaran yang berpusat di O (0,0), berjari-jari  $r$ , dan titik P (x,y) terletak pada lingkaran

Berdasarkan definisi lingkaran, maka akan diperoleh persamaan lingkaran yang berjari-jari  $r$  dan berpusat di titik pangkal O(0,0). Titik P(x,y) merupakan sembarang titik yang terletak pada Lingkaran. Jari-jari lingkaran  $r = |OP|$ . Dengan mengingat kembali rumus jarak antara dua titik, maka akan diperoleh rumus persamaan lingkaran:

$$\begin{aligned} |OP| &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh bentuk umum persamaan lingkaran dengan pusat O(0,0) dan berjari-jari  $r$  adalah :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

#### Contoh 1

Tentukan persamaan lingkaran yang :

- Berpusat di O(0, 0) dan  $r = 3$
- Berpusat di O(0, 0) dan melalui titik A(3, 4)
- Berpusat di O(0, 0) dan menyinggung garis  $12x - 5y - 39 = 0$

#### Alternatif Penyelesaian:

- Pusat O (0,0) dan jari-jari  $r = 3$

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 3^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 9
 \end{aligned}$$

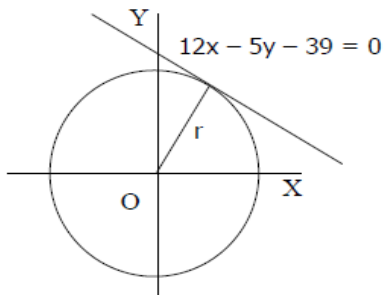
Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $x^2 + y^2 = 9$ .

- b. Pusat O (0,0) dan melalui titik A(3, 4)

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow 9 + 16 &= r^2 \\
 \Leftrightarrow r^2 &= 25 \\
 \Leftrightarrow r &= 5
 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $x^2 + y^2 = 25$ .

- c. Pusat di O(0, 0) dan meyinggung garis  $12x - 5y - 39 = 0$

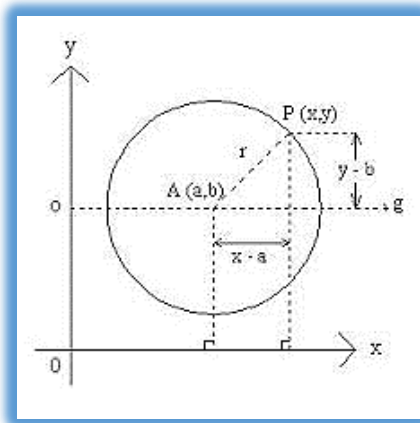


Karena menyinggung garis  $12x - 5y - 39 = 0$ , maka  $r$  merupakan jarak titik pusat  $O(0, 0)$  dengan garis  $12x - 5y - 39 = 0$ . Dengan menggunakan rumus jarak titik terhadap garis diperoleh jari-jari :

$$\begin{aligned}
 r &= \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\
 \Leftrightarrow r &= \left| \frac{12(0) - 5(0) - 39}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \right| \\
 \Leftrightarrow r &= \left| \frac{-39}{13} \right| \Leftrightarrow r = 3
 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $x^2 + y^2 = 9$ .

## B. Persamaan lingkaran dengan Pusat P (a,b)



Gambar 6 Lingkaran yang berpusat di A (a, b), berjari-jari  $r$ , dan titik P (x,y) terletak pada lingkaran

Titik P (x, y) pada lingkaran yang berpusat di A (a,b) dan jari-jari lingkaran  $r$ , sehingga  $|PA| = r$ . Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, maka akan diperoleh rumus persamaan lingkaran:

$$|PA| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jadi diperoleh bentuk umum persamaan lingkaran dengan pusat A (a,b) dan berjari-jari  $r$  adalah :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

### Contoh 2

Tentukan persamaan lingkaran yang :

- Berpusat di (4, 3) dan  $r = 6$
- Berpusat di P(5, -1) dan melalui A(-1, 7)
- Berpusat di P(2, 3) dan menyinggung  $2x + 3y + 4 = 0$

### Alternatif Penyelesaian:

- Pusat di (4, 3) dan  $r = 6$

Persamaan lingkarannya adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$ .

- b. Pusat di P(5, -1) dan melalui A(-1, 7)

Jari-jari  $r$  adalah jarak titik AP, yaitu:

$$r = \sqrt{((-1) - 5)^2 + (7 - (-1))^2}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \Leftrightarrow r = 10$$

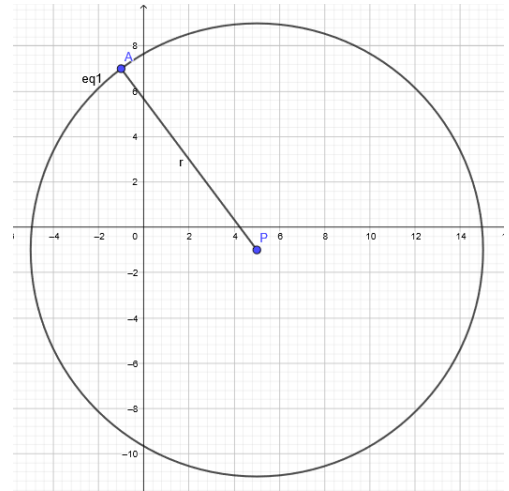
Persamaan lingkarannya adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

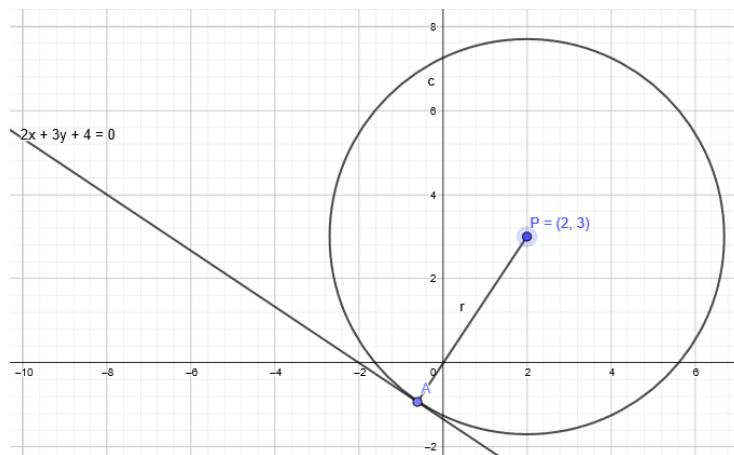
$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - (-1))^2 = 10^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 100$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 100$ .



- c. Pusat di P(2, 3) dan menyinggung  $2x + 3y + 4 = 0$



Karena menyinggung garis  $2x + 3y + 4 = 0$ , maka  $r$  merupakan jarak titik pusat P(2, 3) dengan garis  $2x + 3y + 4 = 0$ . Dengan menggunakan rumus jarak titik terhadap garis diperoleh jari-jari :

$$r = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{|2(2) + 3(3) + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{|17|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow r = \frac{17}{\sqrt{13}}$$

Persamaan lingkarannya adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{17}{\sqrt{13}}\right)^2$$

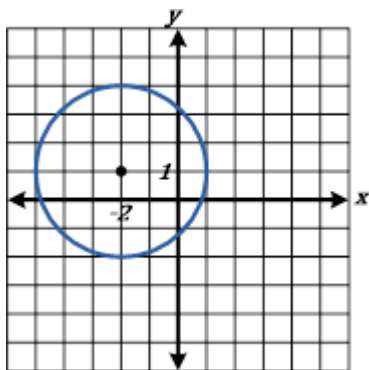
$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{289}{13}$$

$$\Leftrightarrow 13(x - 5)^2 + 13(y + 1)^2 = 289$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $13(x - 5)^2 + 13(y + 1)^2 = 289$ .

### Contoh 3

Tentukanlah persamaan standar lingkaran untuk gambar berikut:



#### Alternatif Penyelesaian:

Pusat lingkaran berada pada koordinat  $(-2, 1)$  dan jari-jari lingkaran 3, sehingga persamaan standarnya:

$$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

### Contoh 4

Tentukanlah pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

#### Alternatif Penyelesaian:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - (-3))^2 = 2^2$$

Dengan demikian, persamaan lingkaran tersebut mempunyai jari-jari 2 dan pusat  $(1, -3)$ .



