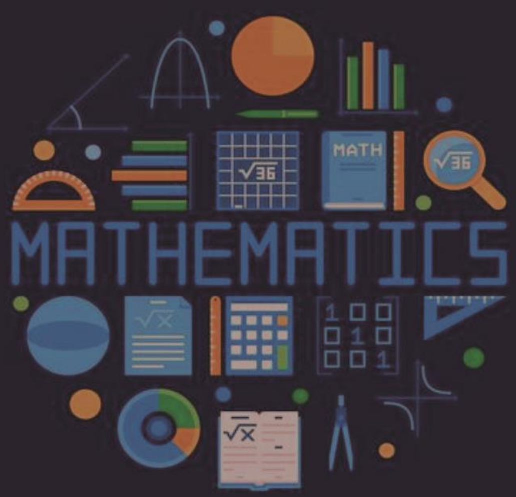
LINA SETYOWATI, S.Pd

MODUL PROGRAM LINIER



SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN

TUNAS MUDA

KARANGANYAR

anilsetyo@gmail.com

PROGRAM LINEAR

KOMPETENSI INTI

KI 3 Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah

KI 4 Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan

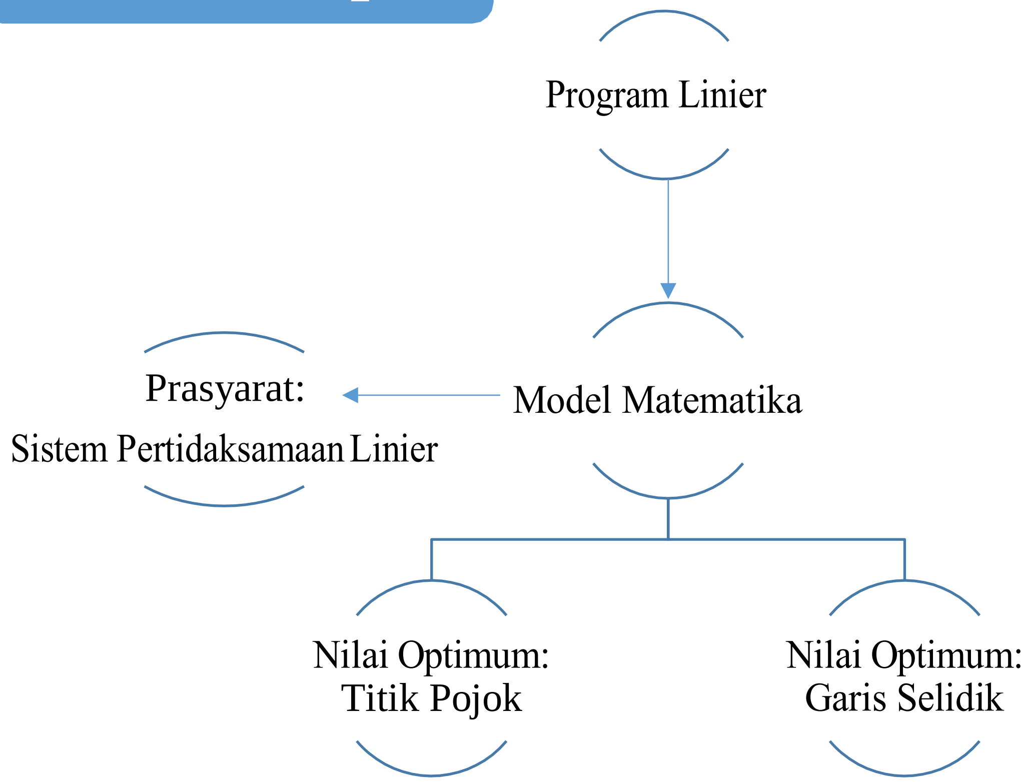
KOMPETENSI DASAR

KOMPETENSI DASAR		INDIKATOR
3.5	Menentukan nilai maksimum dan minimum permasalahan kontekstual yang berkaitan dengan program linear dua variabel	1. Menjelaskan konsep Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel 2. Menentukan daerah penyelesaian dari Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel 3. Menentukan model matematika dari soal cerita (kalimat verbal) 4. Menentukan nilai maksimum dari Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel dengan teliti 5. Menentukan nilai maksimum dari Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel dengan teliti 6. Menyajikan permasalahan yang berkaitan dengan program linear dua variabel dengan cermat 7. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan program linear dua variabel dengan cermat
4.5	Menyajikan penyelesaian masalah kontekstual yang berkaitan dengan program linear dua variabel	

TUJUAN PEMBELAJARAN

Melalui pembelajaran STEAM dengan menggunakan model Problem Based Learning secara daring, peserta didik diharapkan mampu belajar menangkap makna secara kontekstual terkait menyajikan dan menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan program linear dua variable dengan kreatif, kritis, kolaboratif dan komunikatif.

Peta Konsep



Program Linier
Model Matematika
Prasyarat:
Sistem Pertidaksamaan Linier
Nilai Optimum:
Titik Pojok
Nilai Optimum:
Garis Selidik

MATERI PRASYARAT

A. PERTIDAKSAMAAN LINIER

Pada pertemuan sebelumnya, kamu telah mempelajari pertidaksamaan linier baik yang menggunakan satu variabel maupun dua variabel. Kali ini akan kita bahas kembali mengenai pertidaksamaan linier secara lebih detail dengan ditambah grafik daerah penyelesaiannya.

Dalam kehidupan sehari-hari, sering kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus, lowogan pekerjaan yang mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas kecepatan maksimal kendaraan pada jalan raya dan sebagainya. Perhatikan masalah berikut!

Masalah 1.1

Harga motor Andi lebih mahal daripada harga motor Doni, tetapi lebih murah disbanding harga motor Roni. Harga motor Budi lebih mahal daripada harga motor Doni. Harga motor Budi lebih murah daripada motor Andi. Anton berencana mengurutkan harga motor Andi, Budi, dan Roni berdasarkan harga motor yang lebih mahal. Dapatkah kamu membantu Anton dalam mengatasi permasalahan tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Pertama, kamu dapat memisalkan variabel-variabelnya sebagai berikut: Harga motor Andi = A Harga motor Doni = D

Harga motor Budi = B Harga motor Roni = R

Dari penjelasan permasalahan di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

a. Motor Andi lebih mahal dibanding motor Doni = A > D atau D < A
b. Motor Andi lebih murah daripada motor Roni = A < R atau R > A
c. Motor Budi lebih mahal daripada harga motor Doni = B > D atau D < B
d. Motor Budi lebih murah daripada motor Andi = B < A atau A > B

Dengan mengamati pola di atas, yaitu A > D, R > A, B > D, dan A > B atau D < A, A < R, D < B dan B < A

Urutan harga motor mereka dari termahal ke termurah adalah R > A > B > D.

Jadi, kesimpulannya adalah motor roni lebih mahal dibanding motor Andi, motor Andi lebih mahal daripada motor Budi dan motor Budi lebih mahal disbanding motor Doni.

Diskusi 1

Diskusikan masalah urutan berikut menggunakan caramu sendiri!

Pak Anto, Pak Yusuf, dan Pak Doni gemar memancing. Mereka selalu memancing ikan disungai setiap sabtu. Suatu hari, setelah mereka memancing, mereka menghitung banyak ikan mereka masing-masing. Banyak ikan yang ditangkap Pak Anto ternyata lebih daripada banyak daripada ikan yang ditangkap Pak Yusuf. Walaupun banyak ikan yang ditangkap Pak Anto dikali dua juga masih lebih sedikit disbanding dengan tangkapan pak Yusuf dan Pak Doni. Berdasarkan cerita di atas, dapatkah kamu menentukan urutan mereka berdasarkan banyak ikan yang mereka tangkap?

Ingat Kembali

Pertidaksamaan Linier adalah kalimat terbuka yang variabelnya berderajat satu dengan menggunakan tanda hubung " $<, >, \leq, \geq$ ".

Catatan

Pertidaksamaan linier yang mengandung satu variabel yang tidak diketahui disebut dengan pertidaksamaan linier satu variabel. Sedangkan pertidaksamaan linier dua variabel adalah pertidaksamaan linier yang mengandung dua variabel yang tidak diketahui.

Masalah 1.2

Sandi berbelanja di toko peralatan sekolah dengan uang yang dimiliknya sebesar Rp 13.000,00. Harga setiap barang di toko tersebut telah tersedia di daftar harga barang sehingga Sandi dapat memperkirakan peralatan sekolah apa saja yang sanggup ia beli dengan uang yang dimilikinya. Berdasarkan daftar harga, jika Sandi membeli 2 pensil dan 5 buku tulis maka ia masih mendapatkan uang kembalian. Dapatkah kamu memodelkan harga belanjaan Sandi tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Dengan memisalkan harga satu pensil = *x* rupiah dan harga satu buku = *y* rupiah, sehingga jika Sandi membeli 2 pensil dan 5 buku dan mendapatkan uang kembalian, maka permasalahan di atas dapat dimodelkan menjadi $2x + 5y < 13.000$.

Kamu dapat menentukan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua variable tersebut menggunakan metode grafik, caranya adalah sebagai berikut.

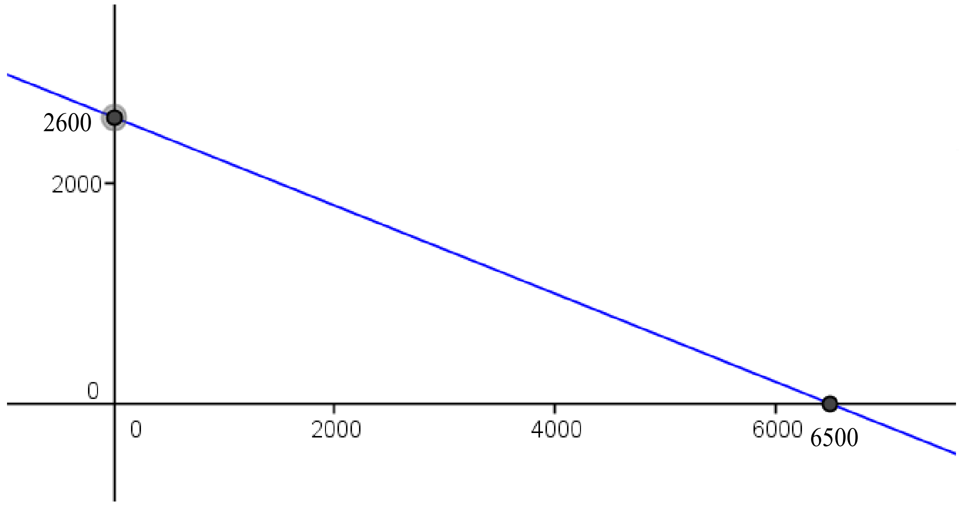
1. Gambarlah terlebih dahulu garis $2x + 5y < 13.000$ menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.
   a. Ubahlah pertidaksamaan $2x + 5y < 13.000$ menjadi $2x + 5y = 13.000$.
   b. Carilah titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y pada bidang koordinat kartesius, kamu akan mendapatkan titik (6.500,0) dan (0,2.600). Hubungkan kedua titik tersebut seperti pada gambar di bawah ini.

Ingat Kembali

Titik potong dengan sumbu x, syaratnya adalah $y = 0$. Titik potong dengan sumbu Y, syaratnya adalah $x = 0$.

x	0	2.600
y	6.500	0

Sehingga, titik potongnya adalah (0, 6.500) dan (2.600, 0)


2600
2000
0
0
2000
4000
6000
6500

2. Arsirlah daerah yang memenuhi pertidaksamaan tersebut. Gunakan beberapa titik uji untuk menentukannya. Daerah yang diarsir itulah daerah penyelesaiannya

Catatan

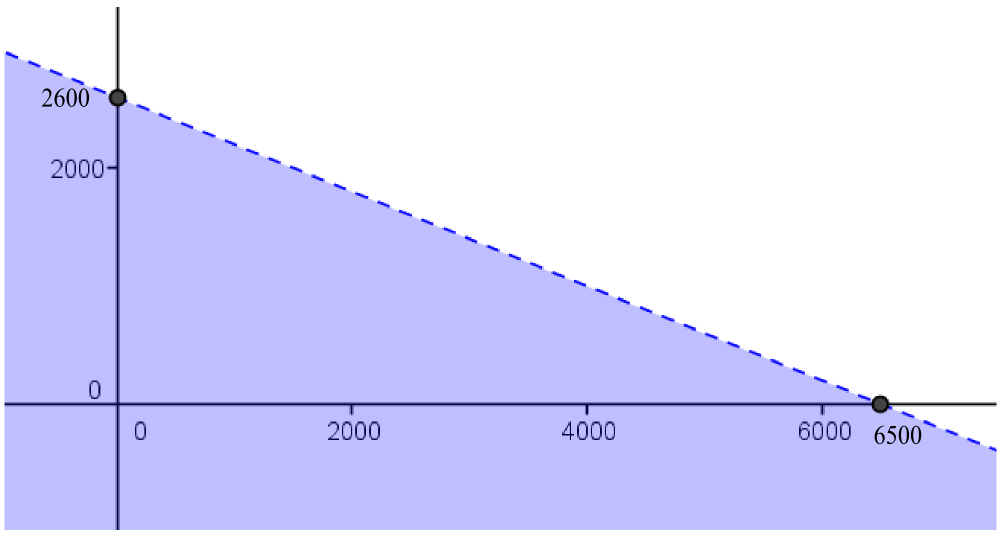
Akan lebih mudah jika kamu menggunakan (0,0) sebagai titik uji. Cobalah!

Subtitusikan titik (0,0) pada pertidaksamaan $2x + 5y < 13.000$.

$2(0) + 5(0) < 13.000$

$0 < 13.000$ (Benar)

Sehingga daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua varibel tersebut seperti terdapat pada gambar dibawah ini.



B. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINIER

.

Himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua peubah merupakan himpunan pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut. Himpunan penyelesaian SPtLDV berupa suatu daerah yang dibatasi garis pada sistem koordinat Kartesius. Untuk mencari DP suatu SPtLDV bisa digunakan cara sebagai berikut.

a. Daerah himpunan penyelesaian suatu PtLDV dapat dicari menggunakan metode uji titik. Berikut ini langkah-langkahnya.

   Misal PtLDV: $ax + by \leq c$

   1) Gambarlah grafik garis $ax + by = c$.

      Jika tanda ketaksamaan berupa $\leq$ atau $\geq$ maka garis pembatas digambar penuh.

      Jika tanda ketaksamaan berupa $<$ atau $>$ maka garis pembatas digambar putus-putus.

   2) Uji titik

      Ambil suatu titik sembarang, misal (x_1, y_1), yang tidak terletak pada garis $ax + by = c$. Substitusikan titik tersebut ke dalam pertidaksamaan $ax + by \leq c$. Ada dua kemungkinan sebagai berikut.

      a) Apabila pertidaksamaan $ax_1 + by_1 \leq c$ bernilai benar, maka daerah himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (x_1, y_1) dengan batas garis $ax + by = c$.

      b) Apabila pertidaksamaan $ax_1 + by_1 \leq c$ bernilai salah, maka daerah himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang tidak memuat titik $(x_1, y_1 0$ dengan batas garis $ax + by = c$.

b. Daerah himpunan penyelesaian suatu PtLDV juga dapat dicari menggunakan cara berikut.

   Daerah himpunan penyelesaian PtLDV dapat ditentukan berada di kanan atau kiri garis pembatas dengan cara memperhatikan tanda ketaksamaan. Berikut ini langkah-langkahnya.

   1. Pastikan koefisien x dari PtLDV tersebut positif. Jika tidak positif, kalikan PtLDV dengan -1.
   2. Jika koefisien x dari PtLDV sudah positif, perhatikan tanda ketaksamaan.

      Jika tanda ketaksamaan $\leq$ maka daerah penyelesaian terletak di sebelah kiri garis pembatas.

      Jika tanda ketaksamaan $\geq$ maka daerah penyelesaian terletak di sebelah kanan garis pembatas.

MODEL MATEMATIKA

PENDAHULUAN

MENGENAL PESAWAT BOEING 737

Sumber : https://www.idntimes.com/ https://id.m.wikipedia.org/wiki/

Pertama, mari berkenalan dengan Boeing 737. Tipe pesawat ini sering digunakan untuk rute pendek hingga menengah. Boeing 737 sendiri masih dibagi menjadi beberapa sub-tipe, yakni Original (737-100 dan 737-200), Classic (737-300, 737-400 dan 737-500), Next Generation (737-600, 737-700, 737-800 dan 737-900) dan tipe MAX (737 MAX 7, 737 MAX 8 dan 737 MAX 9).

Kapasitasnya beragam, mulai dari 85 hingga 215 orang. Bisa dibilang, Boeing 737 adalah tipe pesawat terlaris sepanjang sejarah. Boeing 737 pertama kali diproduksi pada tahun 1967 dan pada 13 Maret 2018 telah terjual hingga 10.000 unit!

Di Indonesia, perusahaan penerbangan yang menggunakan Boeing 737 adalah Garuda Indonesia, Lion Air dan Sriwijaya Air. Sementara, maskapai penerbangan luar negeri yang menggunakan Boeing 737 adalah China Southern Airlines, Egypt Air, Malaysia Airlines dan Korean Air.

Pernahkah kamu membayangkan berapa penghasilan perusahaan penerbangan setiap sekali terbang? Bagaimana cara menentukannya?

KONSEP MODEL MATEMATIKA

MODEL MATEMATIKA DAN MENGGAMBAR GRAFIK PROGRAM LINEAR

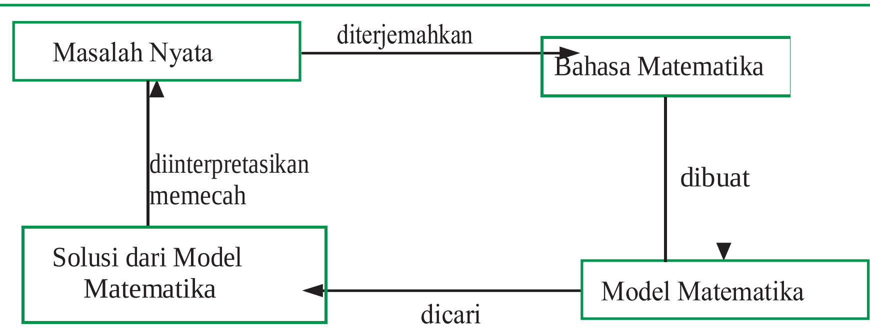
Model matematika adalah suatu cara sederhana untuk menerjemahkan suatu masalah ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan atau fungsi.

Model matematika pada persoalan program linier pada umumnya membahas beberapa hal yaitu :

a. Model matematika berbentuk sistem persamaan atau pertidaksamaan linier dua peubah yang merupakan bagian kendala-kendala yang harus dipenuhi oleh peubah itu sendiri.
b. Model matematika yang berkaitan dengan fungsi sasaran yang hendak dioptimalkan (minimal atau maksimalkan).

Langkah-langkah dalam menyusun model matematika adalah sebagai berikut:

1. Menetapkan besaran masalah sebagai variabel-variabel.
2. Merumuskan hubungan atau ekspresi matematika sesuai dengan ketentuan-ketentuan yang ada dalam soal.



Proses Pemodelan Matematika

Masalah 1

Dalam suatu pesawat terdapat 48 tempat duduk penumpang. Setiap penumpang kelas utama maksimum membawa 60 kg bagasi, sedangkan penumpang kelas ekonomi hanya diperbolehkan membawa bagasi maksimal 20 kg. Pesawat tersebut hanya mampu menampung total bagasi penumpang maksimum 1440 kg. Buatlah model matematikanya!

Alternatif Penyelesaian :

Misalkan variabel-variabel kendala dimisalkan sebagai berikut.

x : banyaknya penumpang kelas utama
y : banyaknya penumpang kelas ekonomi

Data dari soal diatas dapat dituliskan dalam bentuk tabel berikut :

Jenis Kelas	Tempat Duduk	Bagasi
Kelas Utama (x)	X	60 kg
Kelas ekonomi (y)	Y	20 kg
Tersedia	48	1440 kg

Dalam menyelesaikan masalah program linear, kamu harus merubah data tersebut menjadi bentuk pertidaksamaan, sebgai berikut:

- Jumlah tempat duduk tidak lebih dari 48 tempat duduk., maka dapat dinyatakan menjadi $x + y \leq 48$….(1)
- Jumlah kapasitas bagasi yang tersedia tidak lebih dari 1.440 kg, sedangkan kapasitas bagasi kelas utama dan kelas ekonomi masing-masing 60 kg dan 20 kg, maka dapat dinyatakan menjadi $3x + y \leq 720$….(2)
- x dan y menyatakan banyaknya rumah yang dibangun, sehingga nilainya tidak mungkin negative, maka dapat dinyatakan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. …. (3)

Dari (1), (2) dan (3) dapat disimpulkan menjadi model matematika untuk permasalahan di atas adalah:

$$x + y \leq 48;\ 3x + y \leq 720;\ x \geq 0;\ y \geq 0.$$

Masalah 2

Seorang pengusaha akan mendirikan beberapa rumah untuk disewkan yang terdiri dari 2 macam, yaitu tipe I dan tipe II. Tiap rumah tipe I menggunakan tanah sebesar $100m^2$, sedangkan tiap rumah tipe II menggunakan tanah sebesar $200m^2$. Rumah tipe I dibuat bertingkat dan menghabiskan biaya Rp. 300.0000.000,00 per rumah, sedangkan rumah tipe II dibuat tidak bertingkat dan menghabiskan Rp 200.000.000,00 per rumah. Ia mempunyai modal Rp. 3.600.000.000,00 tanah seluas $2.000m^2$. tarif sewa rumah akan dibuat sama, yaitu Rp 1.000.000,00 per bulan. Buatlah model matematikanya!

Alternatif Penyelesaian :

Persoalan di atas dapat dinyatakan dengan tabel sebagai berikut.

Jenis Rumah	Luas Tanah	Produksi (unit)
Tipe I	*100*	300
Tipe II	*200*	*200*
Jumlah	≤ 2000	≤ 3.600

Dalam menyelesaikan masalah program linear, kamu harus merubah data tersebut menjadi bentuk pertidaksamaan, sebgai berikut:

- Luas tanah yang dimiliki tidak lebih dari $2.000m^2$. sementara Rumah Tipe I dan Tipe II masing-masing membutuhkan tanah seluas 100 m^2 dan 200 m^2, maka dapat dinyatakan menjadi $100x + 200y \leq 2.000$….(1)

- Modal yang dimiliki untuk membangun rumah-rumah tersebut adalah

  Rp. 3.600.000.000,00, dengan biaya pembangunan rumah tipe I dan tipe II masing-masing Rp. 300.0000.000,00 dan Rp. 200.0000.000,00, maka dapat dinyatakan menjadi $300x + 200y \leq 3.600$….(2)

- X dan y menyatakan banyaknya rumah yang dibangun, sehingga nilainya tidak mungkin negative, maka dapat dinyatakan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. …. (3)

Dari(1),(2)dan(3)dapatdisimpulkanmenjadimodelmatematikauntukpermasalahandi atas adalah:

$$100x + 200y \leq 2.000;\ 300x + 200y \leq 3.600;\ x \geq 0;\ y \geq 0.$$

KESIMPULAN

Berdasarkan penjelasan pada masalah-masalah apa yang dapat kamu simpulkan mengenai model matematika. Bagaimana langkah menentukan model matematika?

DISKUSIKAN

Diskusikan dengan teman sebangkumu untuk melengkapi permasalahan berikut!

Seorang peternak mengahadapi suatu masalah sebagai berikut.
Agar sehat setiap hari sapi harus diberi makan yang mengandung paling sedikit 27, 21, dan 30 satuan unsur nutrisi jenis A, B dan C setiap harinya. Dua jenis makanan N dan M diberikan kepada sapi tersebut. satu kg jenis makanan N mengandung unsur nutrisi jenis A, B dan C masing-masing sebesar 3, 1, dan 1 satuan. Sedangkan satu kg jenis makanan M mengandung unsur nutrisi jenis A, B dan C masing-masing 1, 1, dan 2 satuan. Buatlah model matematikanya.

Nutrisi	Jenis Makanan		Kebutuhan (satuan)
	N (satuan)	M (satuan)	
A	3	1	27
B	1	1	21
C	1	2	30

Berdasarkan informasi yang kamu amati, tentukan :

Perbandingan nutrisi A pada makanan N dan M adalah ...

Kandungan vitamin A yang dibutuhkan paling sedikit … satuan

Perbandingan nutrisi B pada makanan N dan M adalah …

Kandungan vitamin B yang dibutuhkan paling sedikit… satuan

Perbandingan nutrisi C pada makanan N dan M adalah …

Kandungan vitamin C yang dibutuhkan paling sedikit … satuan

TANTANGAN

Carilah contoh mengenai penerapan model matematika dalam kehidupan sehari-hari dan buatlah permasalahan kontekstual berdasarkan contoh tersebut!

KEGIATAN SISWA

Perhatikan permasalahan berikut!

Seorang pedagang sepatu berencana membeli dua jenis sepatu, sepatu pria dan sepatu wanita. Tiap sepatu terdiri atas 2 merk, merk A dan merk B. Harga beli sepatu ditampilkan pada tabel berikut. Ia akan membelanjakan uangnya paling banyak Rp2.000.000,00 untuk sepatu merk A dan Rp1.800.000,00 untuk sepatu merk B.

	Harga (Rp)		Modal (Rp)
Merk	Sepatu Pria	Sepatu Wanita	
A	200.000	160.000	2.000.000
B	150.000	200.000	1.800.000

Berdasarkan informasi yang kamu peroleh, tentukan:

Berdasarkan informasi yang kamu peoleh, tentukan :

Perbandingan harga antara sepatu pria dan wanita yang bermerk-A adalah …

Modal untuk membeli sepatu merk A paling banyak adalah ….

Perbandingan harga antara sepatu pria dan wanita yang bermerk-B adalah …

Modal untuk membeli sepatu merk B paling banyak adalah ….

LATIHAN SOAL

1. Suatu perusahaan merencanakan membangun rumah untuk 600 orang. Banyaknya rumah yang akan dibangun tidak lebih dari 120 buah. Rumah jenis I biaya sewanya Rp. 100.000,- tiap bulan dan ditempati 4 orang, rumah jenis II biaya sewanya Rp. 125.000,- tiap bulan dan ditempati oleh 6 orang. Buatlah model matematikanya.
2. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang dan sepatu wanita paling sedikit 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan setiap pasang sepatu laki-laki Rp10.000,00 dan setiap pasang sepatu wanita Rp5.000,00. Jika banyaknya sepatu laki-laki tidak boleh melibihi150 pasang, tentukan model matematikanya!
3. Roti A yang harga belinya Rp10.000,00 dijual dengan harga Rp11.000,00 per bungkus. Sedangkan roti B yang harga belinya Rp15.000,00 dijual dengan harga Rp17.000,00 per bungkus. Seorang pedagang roti yang mempunyai modal Rp3.000.000,00 dan kiosnya dapat menampung paling banyak 250 bungkus roti akan mencari keuntungan sebesar- besarnya. Tuliskan model matematika dari persoalan itu!
4. Pemilik perusahaan swasta mempunyai 3 jenis bahan mentah. Misalnya bahan mentah I, II dan III masing-masing tersedia 100 satuan, 160 satuan, dan 280 satuan. Dari ketiga bahan mentah itu akan dibuat 2 macam barang produksi, yaitu barang A dan B. Satu satuan barang A memerlukan bahan mentah I, II dan III masing-masing sebesar 2, 2 dan 6 satuan. Satu satuan barang B memerlukan bahan mentah I, II dan III masing-masing sebesar 2, 4, dan 4 satuan. Jika barang A dan B dijual masing-masing laku Rp8.000,00 dan Rp6.000,00 persatuan, buatlah model matematikanya!

NILAI OPTIMUM

PENDAHULUAN

Pada pertemuan sebelumnya, kamu telah mempelajari secara rinci tentang daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linier dan menentukan model matematika dari permasalahan program linier. Hal ini merupakan syarat mutlak dalam penentuan nilai optimum fungsi objektif dari permasalahan program linier. Menentukan nilai optimum fungsi objektif secara grafik dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: metode titik pojok dan metode garis selidik. Sekarang, kamu akan belajar menentukan nilai optimum fungsi objektif dari permasalahan program linier menggunakan metode titik pojok.

Definisi

Fungsi objektif merupakan fungsi yang menjelaskan tujuan (meminimumkan atau memaksimumkan) berdasarkan batasan yang ada. Nilai bentuk objektif f(x, y) = ax + by tergantung dari nilai-nilai x dan y yang memenuhi sistem pertidaksamaan. Nilai optimum bentuk objektif dapat ditentukan dengan garis selidik (isoprofit) atau metode titik sudut (titik ekstrim).

- Metode Titik Sudut (titik ekstrim).

Langkah-langkah menentukan nilai optimum bentuk objektif menggunakan metode titik sudut adalah :

1. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
2. Tentukan koordinat titik-titik sudut daerah himpunan penyelesaian tersebut.
3. Tentukan nilai bentuk objektif f(x, y) = ax + by untuk setiap titik sudut tersebut.
4. Tentukan nilai optimum fungsi objektif.

Jika memaksimumkan fungsi objektif, pilih nilai f(x, y) yang terbesar. Jika meminimumkan fungsi objektif, pilih nilai f(x, y) yang terkecil.

MASALAH 1

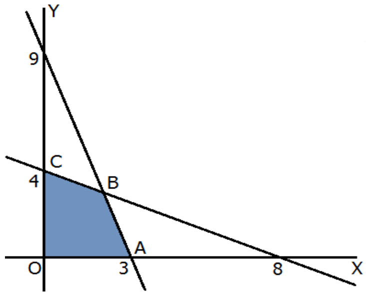
Tentukan nilai maksimum dari F(x,y) = 2x + 3y pada himpunan penyelesaian system pertidaksamaan, $3x + y \leq 9$, $x + 2y \leq 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$!

Alternatif penyelesaian:

Mula-mula kita menentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan tersebut :

3x + y = 9		
x	0	3
y	9	0
Titik	(0, 9)	(3, 0)

x + 2y = 8		
x	0	4
y	4	0
Titik	(0, 4)	(4, 0)



Daerah Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan diatas adalah daerah yang diarsir yaitu daerah OABC dengan O(0,0), A(3,0) dan C(0,4). Langkah berikutnya menentukan koordinat titik B. Titik B adalah perpotongan garis 3x + y = 9 dan x + 2y = 8. Dengan eliminasi diperoleh :

$3x + y = 9 \; .2 \quad \Big| \quad 6x + 2y = 18$

$x + 2y = 8 \; .1 \quad \Big| \quad \underline{x + 2y = 8} \; \_$

$5x = 10 \rightarrow x$

$=2 \; x = 2 \rightarrow x + 2y = 8$

$2 + 2y = 8 \rightarrow y = 3$

Jadi koordinat titik B(2,3).

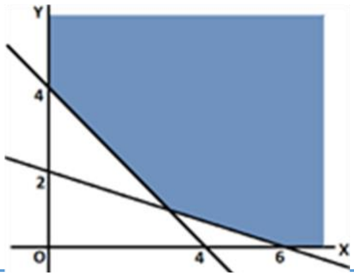
Selanjutnya subtitusikan koordinat titik sudut OABC ke fungsi obyektif F(x,y) = 2x + 3y, diperoleh :

Titik	F(x,y) = 2x + 3y
O(0,0)	F(0,0) = 2.0 + 3.0 = 0
A(3,0)	F(3,0) = 2.3 + 3.0 = 6
B(2,3)	F(2,3) = 2.2 + 3.3 = 13
C(0,4)	F(0,4) = 2.0 + 3.4 = 12

Jadi nilai maksimumnya adalah **F = 13** di titik B(2,3)

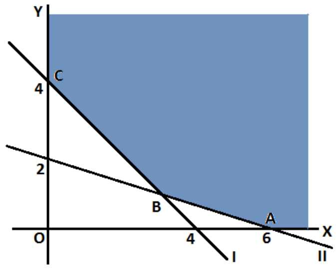
Masalah 2

Tentukan Nilai Minimum f(x,y) = x + 2y dari daerah penyelesaian yang diarsir berikut!



Alternatif Penilaian :

Misalkan titik sudut Daerah Penyelesaian tersebut adalah ABC dengan A(6,0), C(0,4) dan titik B adalah perpotongan garis I yang melalui titik (0,4) dan (4,0) dengan garis II yang melalui (0,2)



dan (6,0).

Persamaan garis I : $4x + 4y = 16 \rightarrow x + y = 4$ Persamaan garis II : $2x + 6y = 12 \rightarrow x + 3y = 6$

Eliminasi persamaan garis I dan garis II untuk mendapatkan koordinat titik B.

$x + y = 4$

$\underline{x + 3y = 6}$ _

$-2y = -2 \rightarrow y = 1 \rightarrow x + y = 4$ maka $x = 3$ Jadi koordinat titik B(3, 1).

Selanjutnya subtitusi koordinat titik sudut daerah penyelesaian ke fungsi obyektif :

Titik	F(x,y) = x + 2y
A(6,0)	F(6,0) = 6 + 2.0 = 6
B(3,1)	F(3,1) = 3 + 2.1 = 5
C(0,4)	F(0,4) = 0 + 2.4 = 8

Jadi nilai minimumnya adalah 5 dicapai di $x = 3$ dan $y = 1$.

Apa yang kamu ketahui mengenai fungsi objektif dari permasalahan di atas? Dapatkah kamu menentukan nilai optimum dari permasalahan tersebut?.

DISKUSIKAN

Coba kamu diskusikan dengan teman sebangkumu. Tulislah langkah-langkah mencari nilai optimum

TANTANGAN

Carilah contoh penerapan nilai optimum dalam kehidupan sehari-hari dan buatlah permasalahan kontekstual berdasarkan masalah tersebut

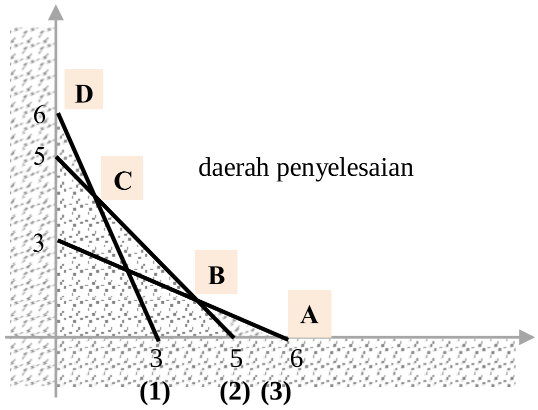
KEGIATAN SISWA

Aktivitas Kelas Nilai optimum.

Indikator: Nilai optimum ditentukan berdasarkan fungsi objektif dalam soal. Nilai optimum dari permasalahan program linier ditentukan melalui titik pojok,

Ayo Mengamati

Tentukan nilai minimum dari 500x + 400y pada daerah penyelesaian dibawah ini!



Ayo Menanya

Berfikirlah kritis dan ajukan pertanyaan-pertanyaan yang ada dalam pikiranmu mengenai permasalahan tersebut!

Jawab:

Ayo Mencoba

Buatlah pertidaksamaan dari permasalahan tersebut!

Jawab:

Tentukan titik pembatas dari permasalahan tersebut!

Jawab:

Carilah nilai optimum dari permasalahan tersebut!

Jawab:

Ayo Mengasosiasi

Dari aktivitas yang kamu lakukan, buatlah kesimpulan menggunakan kata-katamu sendiri, bagaimana langkah-langkah menetukan nilai optimum dari permasalahan tersebut!

Jawab:

Ayo mengkomunikasikan

Presentasikan dan diskusikan hasil yang kamu dapatkan di depan kelas!

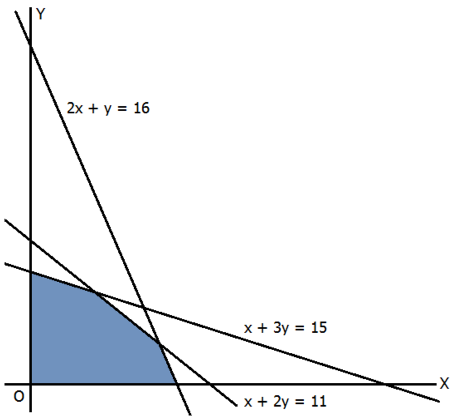
LATIHAN SOAL

1. Tentukan nilai maksimum dari Z = 8x + 6y dengan batas 4x + 2y $\leq$ 60, 2x + 4y $\leq$ 48, x $\geq$ 0, dan y $\geq$ 0 !

   b. Tentukan nilai minimum dari F = 2x + 5y dengan syarat x $\geq$ 0, y $\geq$ 0, x + y $\geq$ 12 dan x + 2y $\geq$ 16.

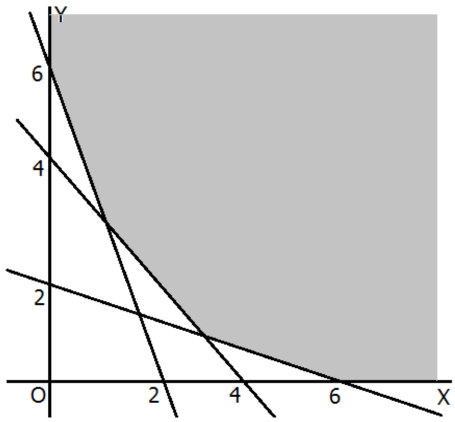
2. Tentukan nilai optimum (maksimum dan minimum) dari fungsi obyektif setiap model matematika berikut !
   a. 4x + 2y $\geq$ 8, x + y $\leq$ 4, y $\geq$ 2, 2x – y $\geq$ –2 dengan fungsi obyektif f(x,y) = 3x + 6y
   b. x $\geq$ 0, 2x + 4y $\geq$ 8, 2x + y $\leq$ 8, y $\leq$ 4 dengan fungsi obyektif Z = 2x + 6y
3. Tentukan nilai maksimum/minimum fungsi obyektif dari daerah penyelesaian yang diarsir berikut !

a.



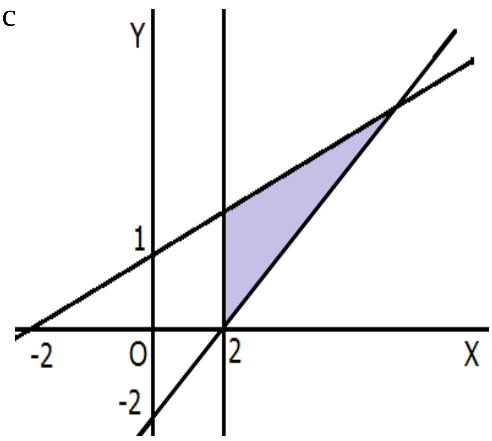
Fungsi obyektif :
Maksimumkan Z = 30x + 50y

b.



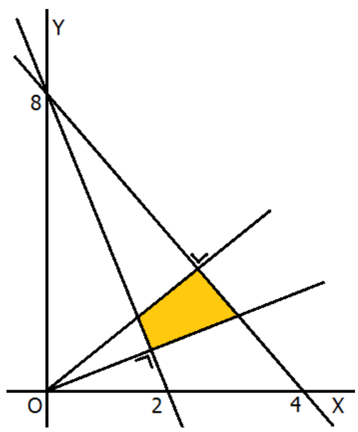
Fungsi obyektif :
Minimumkan Z = 32y + 40x

c



Fungsi obyektif :
Maksimumkan F = x – y

d.



Fungsi obyektif :
Minimumkan P= 4y + 3x

PENDAHULUAN

Membuat Kue Bagea

Sumber : https://id.wikipedia.org

Bagea adalah kue tradisional khas Maluku, Maluku Utara, dan Kota Palopo, Sulawesi Selatan, Indonesia. Bagea biasanya berbentuk bulat dan warnanya cokelat pucat. Bagea sifatnya keras, dan susah dimakan, orang yang tak terbiasa memakannya akan kesulitan. Bagea adalah salah satu olahan dari sagu. Biasanya Bagea disantap dengan teh atau kopi. Di Ternate, Bagea biasanya ditambahkan dengan biji kenari. Bahan-bahan untuk membuat Bagea adalah gula halus, biji kenari yang telah dicincang, tepung sagu, minyak sayur, tepung terigu yang telah diayak, kacang tanah yang dicincang halus, kayu manis bubuk, dan cengkih bubuk.

Seoang ibu rumah tangga di Kendari ingin membuka usaha toko roti yang salah satu jajanan andalannya adalah kue bagea. Bagaimana cara ibu tersebut merancang usahanya agar memperoleh laba maksimum? Apa yang yang harus dilakukan oleh ibu tersebut?

KONSEP PROGRAM LINEAR

Program Linier

Dalam kegiatan produksi dan perdagangan, baik industri skala besar maupun kecil tidak terlepas dari masalah laba yang harus diperoleh oleh perusahan tersebut. Tujuan utamanya adalah untuk memperoleh pendapatan yang sebesar-besarnya dengan meminimumkan pengeluarannya (Optimasi).

Untuk tujuan utama tersebut, tentunya pihak perusahaan membuat beberapa kemungkinan strategi yang harus ditempuh untuk mencapainya.

Misalnya, pedagang buah-buahan, pedagang hendak membeli buah kelengkeng dan buah papaya karena dua jenis buah tersebut persediaanya menipis. Tentunya pedagang buah akan mengeluarkan biaya untuk membeli dua jenis buah tersebut dengan memperhitungkan keuntungan sebesar-besarnya yang mungkin dapat diperoleh dari masing-masing buah dalam kg dan sebagainya.

Untuk menyesaikan masalah tersebut digunakan program linier. Program linier diartikan sebagai cara untuk menyelesaikan suatu persoalan (penyelesaian optimum) dengan menggunakan metode matematik yang dirumuskan dalam bentuk persamaan-persamaan atau pertidaksamaan linier.

DEFINISI 1.1

Program Linear adalah suatu program untuk menyelesaikan permasalahan yang batasan-batasannya berbentuk pertidaksamaan linear.

MASALAH 1

Seorang pengusaha pembuat kue bagea mempunyai 8.000 gr tepung sagu dan 2.000 gr gula pasir. Ia ingin membuat dua macam kue bagea yang berbeda rasa yaitu kue bagea A dan kue bagea B. Untuk membuat kue bagea A dibutuhkan 10 gram gula pasir dan 20 gram tepung sagu sedangkan untuk membuat sebuah kue Bagea B dibutuhkan 5 gram gula pasir dan 50 gram tepung sagu . Jika kue bagea A dijual dengan harga Rp 300,00/buah dan kue bagea B dijual dengan harga Rp 500,00/buah, tentukanlah pendapatan maksimum yang dapat diperoleh pembuat kue tersebut.

Alternatif Penyelesaian :

Untuk mengetahui pendapatan maksimum, maka terlebih dahulu kita menyusun sistem pertidaksamaan dan fungsi tujuan dari soal cerita tersebut. Karena yang ditanya pendapatan maksimum, maka tentu harga jual kue merupakan fungsi tujuan pada soal ini. Untuk menyusun sistem pertidaksamaan, yang perlu kita lakukan adalah menentukan variabel dan koefisiennya.

Bahan yang tersedia:

Tepung sagu = 8 kg = 8000 g
Gula = 2 kg = 2000 g

Misalkan :

Jumlah kue bagea A = x
Jumlah kue bagea B = y

Maka jumlah tepung sagu, gula, dan harga jual merupakan koefisien. Agar lebih mudah, kita dapat memasukkan data yang ada pada soal ke dalam bentuk tabel seperti berikut :

Bahan	Tepung	Gula	Harga
Kue A	20	10	Rp 300,00
Kue B	50	5	Rp 500,00
Persediaan	8000	2000	

Dari tabel di atas dapat disusun sistem pertidaksamaan sebagai berikut :

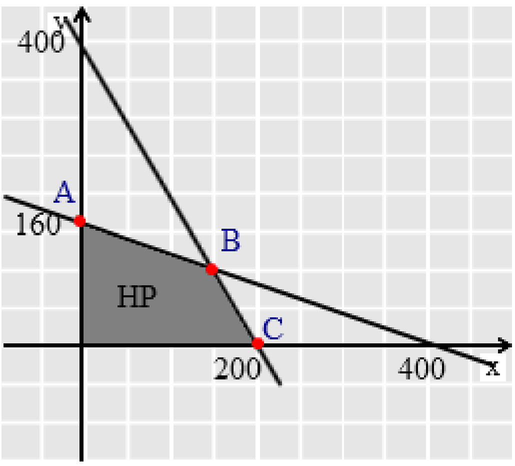
$20x + 50y = 800$ ---> $2x + 5y \leq 800$
$10x + 5y = 2000$ ---> $2x + y \leq 400$
$x \geq 0$ dan $y \geq 0$

dengan fungsi objektif $f(x,y) = 300x + 500y$

Kemudian gambarkan sistem pertidaksamaan yang sudah disusun dalam grafik.

Untuk garis $2x + 5y = 800$
$x = 0$, $y = 160$ ---> $(0, 160)$
$y = 0$, $x = 400$ ---> $(400, 0)$

Untuk garis $2x + y = 400$
$x = 0$, $y = 400$ ---> $(0, 400)$
$y = 0$, $x = 200$ ---> $(200, 0)$



Sistem pertidaksamaan linear

Titik B merupakan titik potong garis $2x + 5y = 800$ dengan garis $2x + y = 400$

$$
\begin{array}{rr}
2x + 5y = 800 & \\
2x + \;\; y = 400 & - \\
\hline
4y = 400 & \\
y = 100 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{l}
2x + y = 400 \\
2x = 400 - 100 \\
x = 150 \\
\text{jadi titik } B(100, 150)
\end{array}
$$

Selanjutnya substitusikan titik A, B, dan C ke fungsi objektif :

A(0, 160) ---> F(x,y) = 300(0) + 500(160) = 80.000

B(100, 150) ---> F(x,y) = 300(100) + 500(150) = 105.000

C(200, 0) ---> F(x,y) = 300(200) + 500(0) = 60.000

Jadi, pendapatan maksimum yang bisa diperoleh pedagang kue itu adalah Rp 105.000,00.

MASALAH 2

Seorang pedagang membeli melon dan jeruk dari seorang petani dengan harga Rp 10.000,00 untuk 1 kg melon dan Rp 4.000,00 untuk 1 kg jeruk. Modal yang dimiliki pedagang tersebut tidak lebih dari Rp 2.500.000,00. Buah tersebut akan diletakkan di toko yang hanya dapat menampung tidak lebih dari 400 Kg. Jika keuntungan yang didapatkan dari menjual melon dan jeruk masing-masing adalah Rp2.000,00 tiap kg dan Rp1.000,00 tiap kg, berapa keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pedagang tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Pertama, ingatlah kembali tentang permodelan matematika yang sudah kamu pelajari. Misal x = banyaknya melon dan y = banyaknya jeruk, permasalahan tersebut dapat dinyatakan dalam tabel sebagai berikut.

Jenis buah	Banyaknya	Harga	Keuntungan
Melon (kg)	X	10.000	2.000
Jeruk (kg)	Y	4.000	1.000
Kapasitas / jumlah	400	2.500.000	

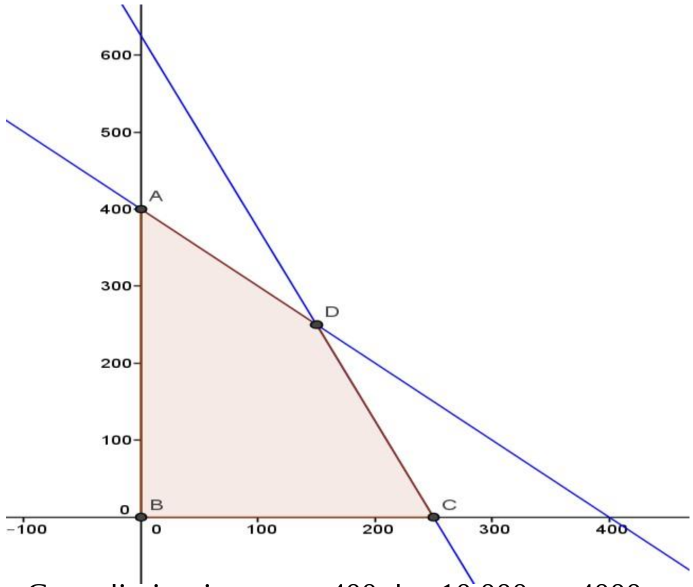
Sehingga model matematika dari permasalahan tersebut adalah:

$x + y \leq 400$

$10.000x + 4.000y \leq 2.500.000$

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Kedua, fungsi objektif dari permasalahan di atas dapat ditentukan dari keuntungan yang diperoleh pedagang tersebut, sehingga fungsi objektif dari permasalahan diatas adalah $f(x, y) = 2.000x + 1.000y$ Ketiga, tentukanlah daerah penyelesaian dari permasalahan tersebut seperti pada gambar di bawah ini.



Keempat, carilah titik-titik pojok dari daerah penyelesaian permasalahan tersebut.

Titik pojok:

A(0,400); B(0,0); C(250,0).

Karena titik pojok D merupakan titik potong antara persamaan garis

x + y = 400 dan

10.000x + 4000y = 2.500.000

maka kamu dapat menggunakan cara eliminasi dan subtitusi.

Cara eliminasi: x + y = 400 dan 10.000x + 4000y = 2.500.000

x + y = 400 →10.000x + 10.000y = 2.500.00

10.000x + 4.000y = 2.500.000 →10.000x + 4.000y= 2.500.000

6.000y = 1.500.000

y = 250

Subtitusikan y = 250 ke persamaan garis x + y = 400. Kamu dapatkan x = 150. Jadi D(150,250).

Kelima, subtitusikan nilai titik pojok yang kamu dapatkan ke fungsi objektif f(x, y) = 2.000x + 1.000y.

Titik pojok (x, y)	Fx(x, y) = 2.000x + 1.000y.	Optimum
A(0,400)	2.000(0) + 1.000(400)	400.000
B(0,0)	2.000(0) + 1.000(0)	0
C(250,0)	2.000(250) + 1.000(0)	500.000
D(150,250)	2.000(150) + 1.000(250)	550.000

Nilai optimum (maksimum) dari permasalahan tersebut adalah Rp 550.000,00 pada titik D(150,250).

Jadi, keuntungan maksimum dari permasalahan tersebut adalah sebesar Rp 550.000,00 dari penjualan 150 kg melon dan 250 kg jeruk.

Apa yang kamu ketahui mengenai fungsi objektif dari permasalahan di atas? Dapatkah kamu menentukan nilai optimum dari permasalahan tersebut?.

DISKUSIKAN

Coba kamu diskusikan dengan teman sebangkumu. Tulislah langkah-langkah mencari nilai optimum dari permasalahan program linear

TANTANGAN

Carilah contoh penerapan nilai optimum dalam kehidupan sehari-hari dan buatlah permasalahan kontekstual berdasarkan masalah tersebut

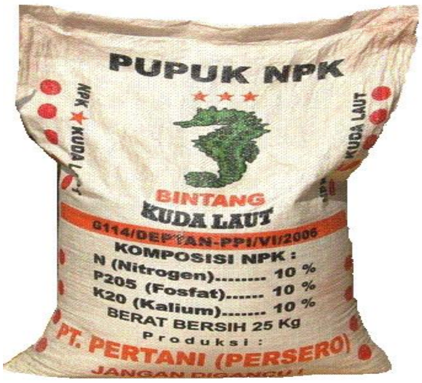
KOMUNIKASIKAN

Berdasarkan penyelesaian masalah-masalah program linier, susunlah langkah-langkah penyelesaian masalah program linier!

KEGIATAN SISWA

Aktivitas Kelas Nilai optimum.
Indikator: Nilai optimum ditentukan berdasarkan fungsi objektif dalam soal. Nilai optimum dari permasalahan program linier ditentukan melalui titik pojok.

Ayo Mengamati



Seorang petani sedang membeli pupuk NPK yang mengandung tiga unsur utama Nitrogen (N), Fosfat (P205) dan Kalium (K20). Kebutuhan minimum yang dibutuhkan pak Tani adalah 160 satuan Nitrogen, 200 satuan Fosfat, dan 80 satuan Kalium. Petani menggunakan dua merek pupuk. Merek Kuda Laut harga Rp. 4000,00 per kantong mengandung 3 satuan N, 5 satuan P205, dan 1 satuan K20. Merek Berlian, ia beli dengan harga Rp.3000,00 per kantong, mengandung 2 satuan untuk ketiga unsur utama dari NPK. Jika pak Tani ingin meminimalkan biaya dengan kebutuhan unsur utama tetap terjaga, berapa banyak kantong dari setiap merek yang harus dibeli?

Ayo Menanya

Berfikirlah kritis dan ajukan pertanyaan-pertanyaan yang ada dalam pikiranmu mengenai permasalahan tersebut!

Jawab:

Ayo Mencoba

Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut!

Jawab:

Tentukan daerah penyelesaian dari permasalahan tersebut!

Jawab:

Carilah nilai optimum dari permasalahan tersebut!
Jawab:

Ayo Mengasosiasi

Dari aktivitas yang kamu lakukan, buatlah kesimpulan menggunakan kata-katamu sendiri, bagaimana langkah-langkah menetukan nilai optimum dari permasalahan tersebut!
Jawab:

Ayo Mengkomunikasikan

Presentasikan dan diskusikan hasil yang kamu dapatkan di depan kelas!

LATIHAN SOAL

1. Sebuah pabrik roti mempunyai bahan A, B dan C dengan banyak yang tersedia berturut-turut 300 unit, 180 unit, dan 300 unit. Dengan bahan yang tersedia, pabrik roti tersebut membuat dua macam roti sesuai dengan pesanan langganan. Alumni Tata Boga menetapkan keperluan bahan

Jenis Roti	Bahan A	Bahan B	Bahan C
I	2	2	4
II	10	4	2

   Harga roti I sebesar Rp. 350,00 dan ke II Rp. 800,00. Berapa banyak tiap macam harus dibuat untuk memperoleh hasil penjualan terbanyak? Berapa rupiah jumlah terbesar yang diperoleh pabrik roti tersebut.

2. Pemilik suatu perusahaan mempunyai bahan mentah I, II dan III, masing2 tersedia 100 satuan, 160 satuan dan 280 satuan. Dari ke tiga bahan mentah itu akan dibuat 2 macam barang produksi yaitu barang A dan B. Satu satuan barang A memerlukan bahan mentah I, II, dan III masing2 sebesar 2, 2 dan 6 satuan . Satu satuan barang B memerlukan bahan mentah I, II, dan III masing2 sebesar 2,4 dan 4 satuan. Jika barang A dan B dijual dan masing2 laku Rp 8.000 dan Rp 6.000 per satuan, berapa besar jumlah produksi barang A dan B agar jumlah bahan mentah yg digunakan tdk melebihi persedian yg ada.
3. Seorang ahli gizi menyarankan orang yang kekurangan zat besi dan vitamin B untuk mengkonsumsi paling sedikit 2.400 mg besi, 2100 mg vitamin B1 dan 1500 mg vitamin B2. Untuk itu 2 tablet vitamin dipilih, yaitu merk A dan B. setiap tablet merk A hanya mengandung 40 mg zat besi, 10 mg vitamin B1, dan 5 mg vitamin B2 dengan harga Rp. 1.500,00. Setiap tablet merk B mengandung 10 mg zat besi, 15 mg vitamin B1 dan vitamin B2 dengan harga Rp. 1.700,00. Berapa banyak vitamin A dan B yang harus dibeli agar kebutuhan minimal zat besi dan vitamin B terpenuhi dengan biaya murah.