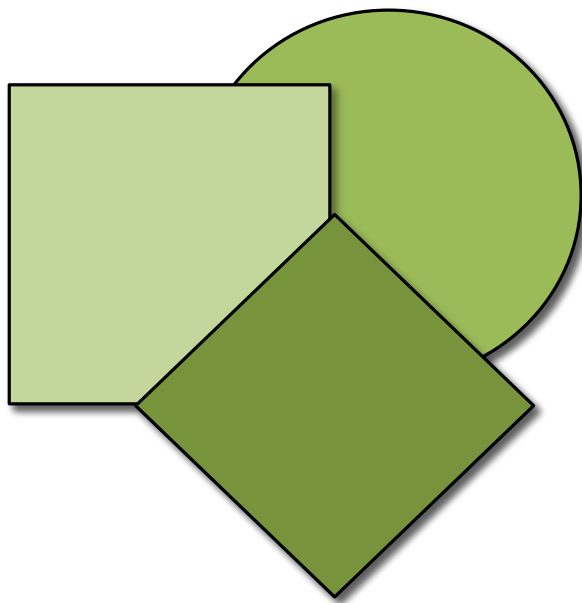


MATEMATIKA

MODUL 1 TURUNAN FUNGSI



**MATA PELAJARAN MATEMATIKA
KELAS XII SMK**

SEMESTER GASAL

Penyusun: Rismiyati S.Pd
Asal Sekolah: SMK Al Ihsan – Boyolali

TURUNAN FUNGSI

A. KOMPETENSI INTI (KI)

KI 3 : Memahami, menerapkan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI 4 : Mengolah, menalar, menyaji dan mencipta dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan

B. KOMPETENSI DASAR

1. Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva.
2. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan turunan pertama fungsi aljabar

C. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

- 3.32.1. Menentukan gradien persamaan garis singgung kurva.
- 3.32.2. Menentukan persamaan garis singgung kurva yang sejajar dan tegak lurus.
- 4.32.1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan garis singgung kurva.
- 4.32.2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan garis singgung kurva yang sejajar dan tegak lurus.

D. TUJUAN PEMBELAJARAN

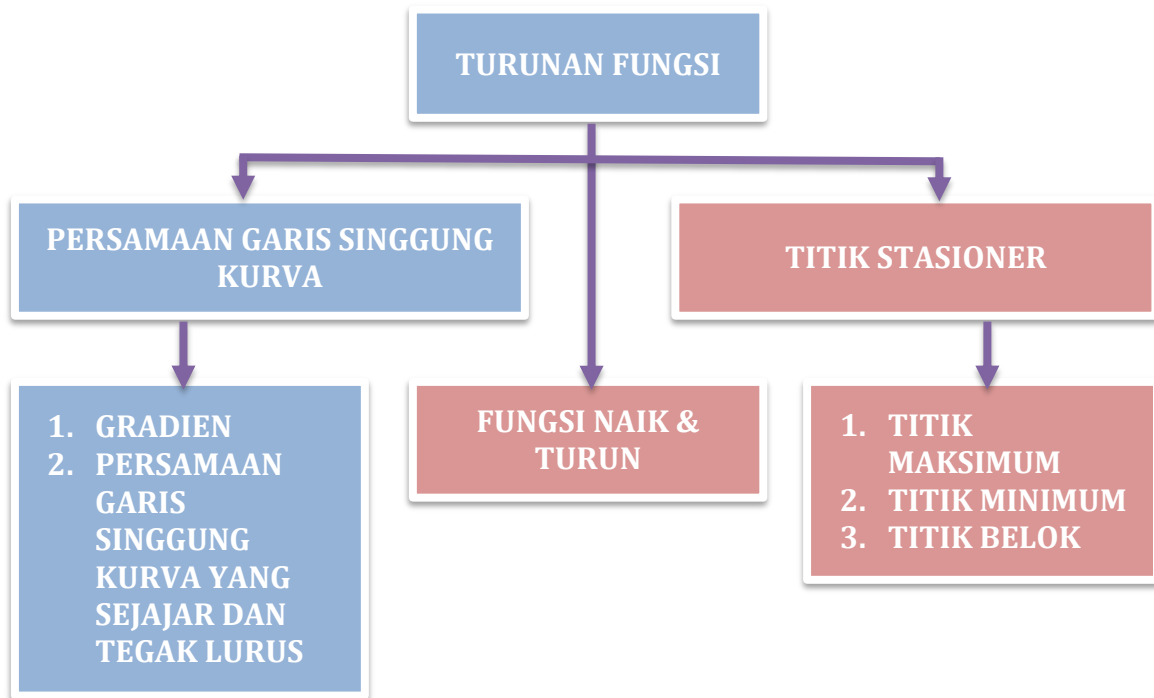
Melalui media pembelajaran problem based learning (PBL) dan aplikasi *google classroom* diharapkan siswa dapat:

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan garis singgung kurva dengan menggunakan turunan fungsi aljabar.
2. Menyelesaikan masalah kontekstual HOTS berkaitan dengan persamaan garis singgung kurva dengan menggunakan turunan fungsi aljabar.

E. DISKRIPSI SINGKAT

Dalam modul ini akan mempelajari tentang menentukan nilai gradien persamaan garis singgung kurva dan menentukan persamaan garis singgung kurva yang sejajar dan tegak lurus.

F. PETA KONSEP



G. MATERI

A. Ayo mengamati

Mari kita amati permasalahan berikut ini!

Seorang pemain SKI meluncur kencang dipermukaan bukit es. Dia meluncur turun, kemudian naik mengikuti lekukan permukaan air es sehingga disuatu saat, dia melayang ke udara dan turun kembali ke permukaan. Perhatikan gambar disamping.



Sumber: <https://www.piqsels.com/id/public-domain-photo-jodcw>

Permasalahan

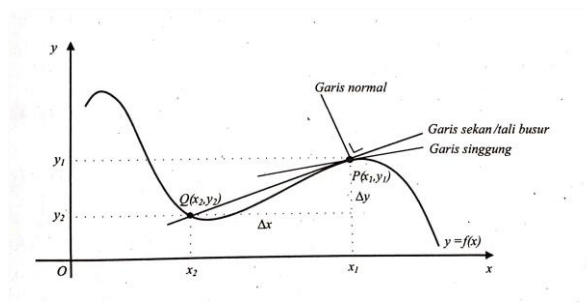
Secara analitik, misalkan bahwa bukit es diasumsikan sebagai kurva, pemain ski diasumsikan sebagai garis yang tegak lurus ke papan ski serta papan ski adalah sebuah garis lurus lainnya. Dapatkah kamu tunjukkan hubungan kedua garis tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Coba kamu amati gambar dibawah ini. Misalkan permasalahan diatas ditampilkan dalam bentuk gambar berikut.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar di bawah ini!



Posisi tegak pemain terhadap papan ski adalah sebuah garis yang disebut garis normal. Papan ski yang menyinggung permukaan bukit es disaat melayang ke udara adalah sebuah garis yang menyinggung kurva disebut garis singgung. Jadi garis singgung tegak lurus dengan garis normal. Bagaimana hubungan garis singgung dengan garis kurva.

Misalkan pemain ski bergerak dari titik $Q(x_2, y_2)$ dan melayang ke udara pada titik $P(x_1, y_1)$ sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P . Semua garis yang menghubungkan titik Q dan P disebut tali busur atau garis sekan dengan gradien

$$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{ingat konsep garis lurus})$$

Sehingga persamaan garis singgung pada kurva dititik Q adalah (x_2, y_2) adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Untuk memperjelas pemahaman, kalian dapat melihat video pembelajaran berikut:

<https://youtube/Kwggkfnq83s> (Persamaan Garis Singgung Kurva)

Latihan Soal:

1. Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 2x^2 - 3x$ pada $x = 2$

Jawab

$$m = y' = 4x - 3$$

masukkan $x = 2$ pada y'

$$y' = 4 \cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

Jadi $m = 5$

2. Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = 6x^2 + 4x - 5$ pada $x = -1$

Jawab

$$m = f'(x) = 12x + 4$$

masukkan $x = -1$ pada $f'(x)$

$$f'(x) = 12(-1) + 4 = -12 + 4 = -8$$

Jadi $m = -8$

3. Diketahui kurva $y = x^2 - 3x + 4$ dan titik A (3, 4)

- Tentukan gradien garis singgung di titik A.
- Tentukan persamaan garis singgung di titik A.

Jawab

$$y = x^2 - 3x + 4$$

$$y' = 2x - 3$$

- Gradien di titik A (3, 4)

$$m = y'_{x=3} = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$$

- Persamaan garis singgung di titik A (3, 4)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 3(x - 3)$$

$$y - 4 = 3x - 9$$

$$y = 3x - 5$$

B. Persamaan Garis Singgung Kurva yang Sejajar dan Tegak Lurus

- Misalkan garis $g \equiv y = m_1x + n_1$ sejajar dengan garis $h \equiv y = m_2x + n_2$ maka gradient garis g sama dengan garis h atau $m_g = m_h$. Karena $m_g = m_1$ dan $m_h = m_2$, maka g sejajar h jika

$$m_1 = m_2$$

- Misalkan garis $g \equiv y = m_1x + n_1$ tegak lurus dengan garis $h \equiv y = m_2x + n_2$ maka hasil kali gradient garis g dengan gradient garis h sama dengan -1 atau $m_g \cdot m_h = -1$. Karena

$$m_g = m_1 \text{ dan } m_h = m_2, \text{ maka tegak lurus } h \text{ jika}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Untuk memperjelas pemahaman, kalian dapat melihat video pembelajaran berikut:
<https://youtube/GluHCqSRHp0> (Persamaan Garis Singgung yang Sejajar dan Tegak Lurus)

Latihan Soal :

1. Pada kurva $y = 2x^2 - 6x + 1$, tentukan:

- Persamaan garis singgung yang sejajar dengan garis $y = -2x + 1$
- Persamaan garis singgung yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 3 = 0$

Jawab:

a. $y = 2x^2 - 6x + 1$

$$y = f'(x) = 4x - 6$$

$$y = -2x + 1 \text{ mempunyai gradient } m = -2$$

Gradient garis singgung yang sejajar dengan garis $y = -2x + 1$ adalah $n = -2$

(ingat: dua garis sejajar berlaku $m = n$)

$$\text{Sehingga: } 4x - 6 = -2$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2(1)^2 - 6(1) + 1 = -3$$

Titik singgungnya $(1, -3)$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -2(x - 1)$$

$$y + 3 = -2x + 2$$

$$y = -2x - 1$$

b. $x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = -x - 3$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ mempunyai gradien } m = -\frac{1}{2}$$

Gradien garis singgung yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 3 = 0$ adalah $n = 2$

(ingat: dua garis tegak lurus berlaku $m \cdot n = -1$)

$$\text{Sehingga: } 4x - 6 = 2$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \rightarrow y = 2(2)^2 - 6(2) + 1 = -3$$

Titik singgungnya $(2, -3)$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = 2(x - 2)$$

$$y + 3 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 7$$

2. Garis singgung di titik $(2, p)$ pada kurva $y = 2\sqrt{x+2}$ memotong sumbu x di titik... (contoh soal HOTS)

Jawab

Titik singgung $(2, p)$ berada di kurva $y = 2\sqrt{x+2}$

Maka: $p = 2\sqrt{(2)+2} = 2(2) = 4$

Jadi, koordinat titik singgungnya di $(2, 4)$

Adapun gradien garis singgung di titik $(2, 4)$

$$\Leftrightarrow m = f(x)' = 2(x+2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow m = f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2}$$

Maka, persamaan garis singgung kurva di $(2, 4)$:

$$\Leftrightarrow y - 4 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

Karena memotong sumbu $x \rightarrow y = 0$, maka:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 2) = -4 \Leftrightarrow x - 2 = -8 \Leftrightarrow x = -6$$

Jadi, titik potong garis terhadap sumbu x di $(-6, 0)$

H. RANGKUMAN

1. Gradien garis singgung $m = f'(x)$
2. Persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik (x, y) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$
3. Dua garis yang saling sejajar $m_1 = m_2$
4. Dua garis yang saling tegak lurus $m_1 \cdot m_2 = -1$

I. LATIHAN SOAL

1. Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 4x^2 - 6x + 3$ pada $x = -1$
2. Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ di titik $(1, 1)$
3. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 6x^2 + 2x$ di titik $(-2, 20)$
4. Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = 4x^3 - 5x^2$ di titik dengan absis 3
5. Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$ di titik $(0, 5)$
6. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = 3 + 2x - x^2$ sejajar dengan garis $4x + y = 3$
7. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 4x + 5$ yang tegak lurus garis $y = -2x + 3$
8. Diketahui kurva $y = (x^2 + 2)^2$ yang melalui titik $(1, 9)$. Tentukan titik sumbu y !

J. DAFTAR PUSTAKA

- Kasmina. Toali dkk. Matematika kelas XII, Erlangga, Jakarta, 2008
- Kasmina. X-Press UN 2019 untuk SMK/MAK Matematika, Erlangga, Jakarta, 2019
- Fitri K dan Sherly R. Modul Matematika XII, Aktual, Karanganyar, 2019
- Buku Matematika Pegangan Siswa kelas XII, Kemendikbud RI 2015