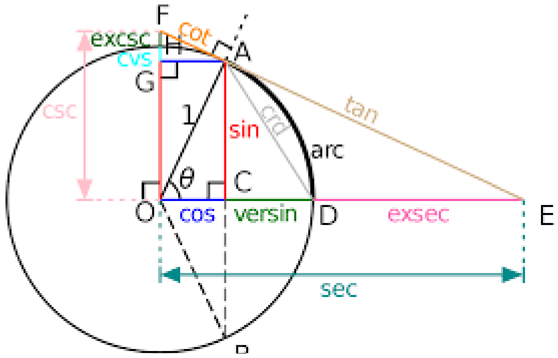
BAHAN AJAR

XI IPA



RUMUS TRIGONOMETRI

Jumlah dan Selisih Sudut

Oleh:

Novi Arum Sari

SISTEMATIKA BAHAN AJAR

Sistematika dari bahan ajar rumus trigonometri ini adalah sebagai berikut :

1. Kompetensi Dasar Indikator Pencapaian Kompetensi dan tujuan pembelajaran yang harus dicapai oleh peserta didik
2. Apersepsi akan mengawali pemebalajaran yang dekat dengan lingkungan sekitar yang melibatkan ***wawasan***
3. Aktivitas belajar yang berisi penjelasan materi dalam bahasa yang mudah dipahami dan bagian yang harus dilengkapi peserta didik untuk lebih memahami materi
4. Contoh soal untuk memperjelas konsep yang dipelajari
5. **TPACK**, pada bagian ini berisi tautan yang mengajak peserta didik membuka laman yang akan menambah wawasan peserta didik. Tautan yang dimaksud juga berupa link yang menunjang pembelajaran
6. Latihan soal berisi soal – soal untuk menguji kemampuan peserta didik dalam memahami materi yang dipelajari, soal latihan dilengkapi soal **HOTS** untuk mengasah kemampuan peserta didik
7. Kunci Jawaban untuk mengecek jawaban peserta didik

PETUNJUK PENGGUNAAN BAHAN AJAR

Berikut ini adalah langkah –langkah yang disarankan bagi peserta didik dalam menggunakan bahan ajar ini :

1. Berdoalah sebelum menggunakan bahan ajar ini
2. Bacalah terlebih dahulu kompetensi dasar dan indikator yang harus dicapai
3. Bacalah petunjuk dengan **cermat** dan **teliti**.
4. Pahami uraian materi dengan seksama dan perhatikan contoh soal yang diberikan dengan sebaik –baiknya
5. Kerjakan latihan soal yang ada dengan **teliti**
6. Bacalah kembali rangkuman yang ada di bagian setelah latihan soal
7. Kerjakan soal – soal evaluasi secara **mandiri**
8. Pada saat mengerjakan latihan soal, jangan melihat halaman kunci terlebih dahulu supaya dapat mengetahui sejauh mana pemahaman Anda
9. Maksimalkan penggunaan tautan pada bagian **TPACK** dengan selalu berhati – hati dan bijak dalam penggunaan internet
10. Mintalah bimbingan guru ketika menemukan permasalahan yang dirasa rumit

Kompetensi Inti

1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.
2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif, dan proaktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam interaksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.
3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
4. Mengolah, menalar, dan menyajikan dalam ranah konkret dan ranah abstarak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya diskeolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.

Kompetensi Dasar

3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

Indikator Pencapaian Kompetensi

3.2.1 Membuktikan dan menggunakan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut

3.2.2 Membuktikan dan menggunakan rumus cosinus jumlah dan selisih dua sudut

3.2.3 Membuktikan dan menggunakan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut

4.2.1 Memecahkan permasalahan berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut

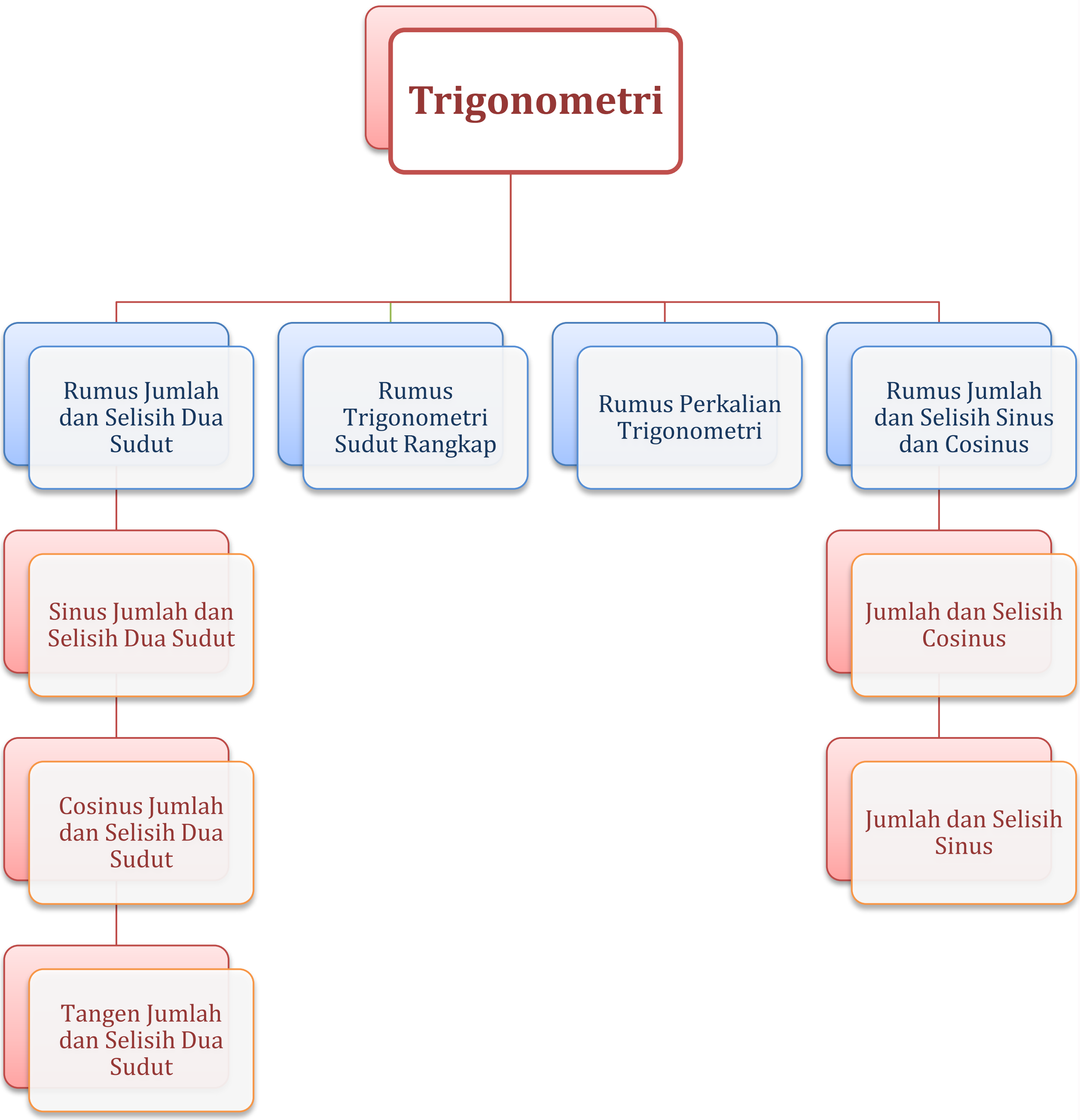
Tujuan Pembelajaran

1. Siswa dapat membuktikan dan menggunakan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut
2. Siswa dapat membuktikan dan menggunakan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut
3. Siswa dapat membuktikan dan menggunakan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut
4. Siswa dapat memecahkan permasalahan berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut

SUB POKOK MATERI

1. Trigonometri Penjumlahan atau Selisih Dua Sudut
2. Trigonometri Sudut Rangkap,
3. Trigonometri Sudut Pertengahan
4. Perkalian Trigonometri
5. Jumlah dan Selisih Sinus dan Kosinus,

PETA KONSEP

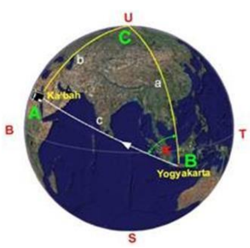


PENDAHULUAN

Trigonometri pada mulanya merupakan kajian tentang segitiga dan diterapkan sebagai tambahan kepraktisan pada astronomi, survey dan navigasi. Peninggalan berupa tablet dari tanah liat bangsa Babilonia dan batang papyrus dari Bangsa Mesir yang menunjukkan tahun sekitar 1600 SM menunjukkan bukti-bukti pemecahan masalah praktis dengan menggunakan pengukuran segitiga.

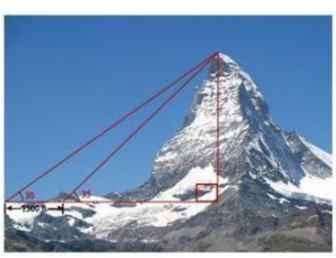
Ahli Astronomi bangsa Yunani telah berusaha menghilangkan perbandingan π di surga ketika mereka sedang menghitung panjang lintasan (orbit) yang dilalui oleh bintang-bintang. Dengann demikian, kajian mereka dalam bidang trigonometri secara praktiknya adalah menggunakan table tali busur perhitungan periode dan orbit. Hiparcus (140 SM) yang dikenal sebagai Bapak Trigonometri telah menulis 12 buku tentang perhitungan dari tali busur yang berkaitan dengan sudut pusat yang dipotong oleh tali busur itu. Sebagai fakta nyata, ketika mereka berkecimpung dengan masalah-masalah pada ruang dimensi tiga, apa yang mereka bangun biasanya dirujuk sebagai trigonometri bola, ketimbang sebagai trigonometri bidang.

KENAPA HARUS BELAJAR TRIGONOMETRI



Ka’bah di makkah adalah tempat suci sebagai kiblat arah patokan beribadah seluruh umat muslim di dunia. Dengan menggunakan konsep trigonometri kita bisa menentukan arah kiblat dari tempat kita berasal dengan tepat

Pernah mendengar salah satu keajaiban dunia berupa menara pissa yang miring di italia? Jikalau ada pertanyaan berapa kemiringan menara tersebut? Maka dengan konsep trigonometri ini kita bisa melihat seberapa kemiringan menara pissa tersebut



Pernah mendengar tentang puncak gunung tertinggi didunia? Jika pernah berapa tingginya? Cara mengukur tinggi puncak tertinggi ini bisa dihitung menggunakan konsep trigonometri juga lho

MATERI PRASYARAT

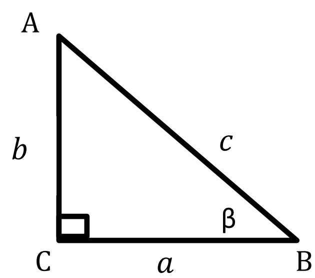
A. PERBANDINGAN TRIGONOMETRI PADA SEGITIGA SIKU-SIKU

Sebelum membahas rumus cosinus untuk jumlah dan selisih dua sudut, perlu kamu ingat kembali pelajaran di kelas X. Dalam segitiga siku-siku ABC berlaku:

$$\sin\beta = \frac{\text{sisi di depan sudut B}}{\text{sisi miring}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{sisi di dekat sudut B}}{\text{sisi miring}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\beta = \frac{\text{sisi di depan sudut B}}{\text{sisi di dekat sudut B}} = \frac{AC}{BC}$$



B. SUDUT BERELASI/TRIGONOMETRI DIBERBAGAI KUADRAN

Sebelum melangkah lebih jauh ke dalam rumus-rumus trigonometri, mari terlebih dahulu kita mengingat tentang rumus-rumus trigonometri diberbagai kuadran di kelas X sebagai berikut !

$$\sin\ (90^0 - \alpha) = \cos\ \alpha$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\ (90^0 - \alpha) = \text{cotan}\ \alpha$$

C. SUDUT NEGATIF

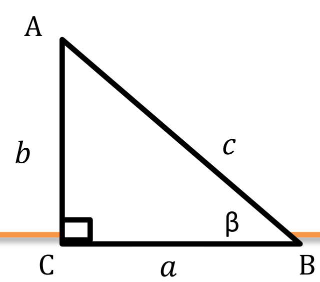
Sebelum melangkah lebih jauh ke dalam rumus-rumus trigonometri, mari terlebih dahulu kita mengingat tentang rumus-rumus trigonometri sudut negatif di kelas X sebagai berikut !

$$\sin\ (-\alpha) = -\sin\ \alpha$$

$$\cos\ (-\alpha) = \cos\ \alpha$$

$$\tan\ (-\alpha) = -\tan\ \alpha$$

D. LUAS SEGITIGA ABC

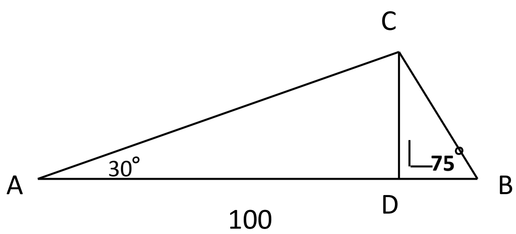


$$\text{Luas } ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times sin\beta$$

Trigonometri Penjumlahan dan Selisih Dua Sudut.

Dalam permasalahan sehari-hari, trigonometri sering digunakan untuk menentukan tinggi pohon atau tinggi gedung. Tahukah Anda, trigonometri juga dapat digunakan untuk menentukan jarak antara pantai dan satu tempat dipulau seberang pantai? Perhatikan permasalahan berikut.

Sekelompok pemuda ingin memajukan daerah wisata pantai. Mereka ingin membuat sebuah jembatan yang menghubungkan pantai dengan pulau karang kecil yang dipisahkan oleh laut. Dalam tahap perencanaan, mereka harus menentukan jarak minimal antara kedua tiang jembatan di pantai dan di pulau karang kecil. Mereka membuat segitiga seperti pada gambar disamping. Dari segitiga tersebut diperoleh hubungan :



$\tan 30° = \frac{CD}{AD}$ dan $\tan 75° = \frac{CD}{BD} \Leftrightarrow \tan 75° = \frac{CD}{100-AD}$

Dari kedua perbandingan trigonometri di peroleh

$$CD = AD\ \tan 30° = (100 - \mathrm{AD})\tan 75°$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut, Anda akan menemukan nilai AD. Gunakan nilai AD untuk menentukan nilai CD sehingga panjang jembatan minimal dapat diketahui.

Perhatikan bentuk trigonometri $tan75°$. Dapatkah Anda menentukan nilai $tan75°$ tanpa menggunakan kalkulator? Apakah $\tan(30° + 45°) = \tan 30° + \tan 45°$? Untuk mengetahuinya. Simak subbab berikut.

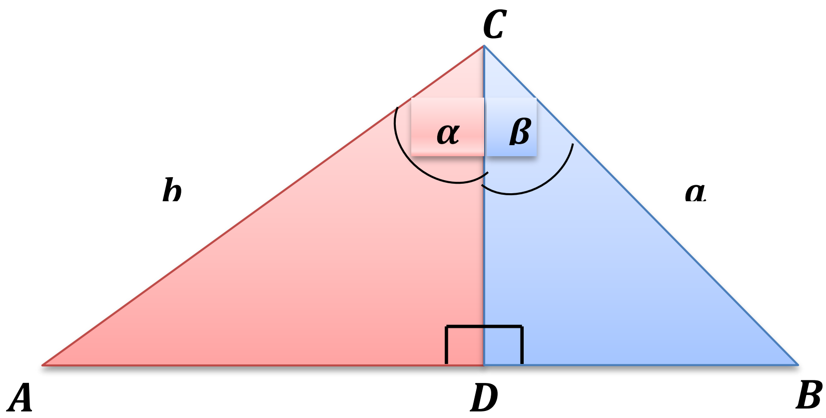
Dalam subbab ini kita akan menguraikan atau menurunkan rumus rasio trigonometri dasar, $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$, dan $\tan(\alpha-\beta)$

Untuk mempermudah pembahasan di sini, kita akan memulai dengan membahas rumus $\sin(\alpha+\beta)$.

https://www.youtube.com/watch?v=3HRSOLnpZKA

A. Identitas Sinus Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Untuk menentukan rumus jumlah dan selisih trigonometri untuk sinus dapat menggunakan konsep luas segitiga



Perhatikan ΔABC

Berlaku $\sin\beta = \frac{BD}{BC}$

$\sin\beta = \frac{BD}{a}$ sehingga $BD = a.\sin\beta$

Segitiga ABC terbentuk oleh segitiga ACD dan segitiga BCD

Perhatikan ΔACD,

dengan CD dilihat dari sisi a dan sudut β sehingga $CD = a\cos\beta$

Luas $\Delta ACD = \frac{1}{2}.AD.CD = \frac{1}{2}.b\sin\alpha\,.\,a\cos\beta$

Perhatikan ΔBCD,

dengan CD dilihat dari sisi b dan sudut α sehingga $CD = b\cos\alpha$

Luas $\Delta BCD = \frac{1}{2}.BD.CD = \frac{1}{2}.a\sin\beta\,.\,b\cos\alpha$

Sehingga

Luas ΔABC = Luas ΔACD + Luas ΔBCD

$$\frac{1}{2}.a.b\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}.b\sin\alpha\,.\,a\cos\beta + \frac{1}{2}.a\sin\beta\,.\,b\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}.a.b\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}.a.b\,(\sin\alpha\,.\cos\beta + \sin\beta\,.\cos\alpha)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,.\cos\beta + \sin\beta\,.\cos\alpha$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,.\,cos\beta + \cos a\,.\sin\beta}$$

Rumus $\sin(\alpha - \beta)$ dapat diperoleh dari rumus $\sin(\alpha + \beta)$ dengan mengubah β menjadi $-\beta$ sebagai berikut :

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,.\cos(-\beta) + \sin(-\beta).\cos a$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,.\cos\beta - \sin\beta.\cos a$

$$\sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha\,.\,cos\beta - \cos a\,.\sin\beta\,)$$

Ayo Kita Simpulkan

Berdasarkan uraian di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

Rumus $\sin(\alpha + \beta)$ dan $sin(\alpha - \beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = (\sin\alpha\,.\,cos\beta + \cos a\,.\sin\beta\,)}$$
$$\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha\,.\,cos\beta - \cos a\,.\sin\beta\,)}$$

Contoh 1 :

Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator atau table, nilai dari :

a. $\sin 75°$ b. $\sin 80°.\cos 20° - \cos 80° \sin 20°.$

Jawab :

a. $\sin 75° = \sin(45 + 30)°$

$= \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

b. $\sin 80°.\cos 20° - \cos 80° \sin 20° = \sin(80° - 20°)$

$= \sin 60°$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Contoh 2:

Diberikan $sin\ \alpha = \frac{5}{13}$ dan $cos\ \beta = \frac{4}{5}$ untuk α, β sudut lancip.

Hitunglah :

a. $\sin(\alpha + \beta)$

b. $\sin(\alpha - \beta)$

Jawab:
Pandang $sin^2 A + cos^2 A = 1$, maka :

$$sin\ \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - sin^2\ \alpha}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{25}{169}}$$
$$= \sqrt{\frac{144}{169}}$$
$$cos\ \alpha\ = \frac{12}{13}$$

$$cos\ \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow sin\ \beta = \sqrt{1 - cos^2\ \beta}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$sin\ \beta\ = \frac{3}{5}$$

Sehingga

a. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,.\,cos\beta + \sin\beta.\cos a$
$$= \frac{5}{13}.\frac{4}{5} + \frac{12}{13}.\frac{3}{5}$$
$$= \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$$

b. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,.\,cos\beta - \sin\beta.\cos a$
$$= \frac{5}{13}.\frac{4}{5} - \frac{12}{13}.\frac{3}{5}$$
$$= \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}$$

Contoh 3:

Buktikan bahwa $sin(\alpha + \beta)\ sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

Jawab:

$$sin(\alpha + \beta)\ sin(\alpha - \beta) = (sin\ \alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(sin\ \alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= sin^2\ \alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta$$
$$= sin^2\ \alpha\ (1 - \sin^2\beta) - (1 - \sin^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$= sin^2\ \alpha - sin^2\ \alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$= sin^2\ \alpha - \sin^2\beta \quad (terbukti)$$

Ayo Belajar Dan Aktivitas

B. Identitas Cosinus Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Untuk mendapatkan rumus $cos\ (\alpha\ +\ \beta)$ dapat diperoleh dengan menggunakan rumus- rumus yang pernah diperlajari sebelumnya, yakni :

$$\sin\,(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,.\,cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha$$

Ingat juga

$\cos(90^0 - \alpha)\ = \sin\alpha$ dan $\sin\ (90^0 - \alpha) =\ \cos\ \alpha$

Sehingga diperoleh :

$\cos(\alpha+\beta)\ = \sin[90^0 - (\alpha\ +\ \beta)]$

$\cos(\alpha+\beta)\ = \sin[90^0 - \alpha - \ \beta]$

$\cos(\alpha+\beta)\ = \sin[(90^0 - \alpha) - \ \beta]$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)\ &= \sin(90^0 - \ \alpha)\,.\,cos(-\beta)+\cos(90^0 - \ \alpha)\,.\sin(-\,\beta)\\ &= \cos\alpha\,.\cos\beta+\sin\alpha\,.-\sin\ \beta\\ &= \cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\ \beta\end{aligned}$$

$$\cos\,(\alpha+\beta)=(\cos\alpha\ cos\ \beta-\sin\alpha\ sin\ \beta)$$

Rumus $\cos\ (\alpha-\beta)$ dapat diperoleh dari rumus $\cos\ (\alpha+\beta)$ dengan cara mengubah β dengan $-\beta$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\cos\ (\alpha-\beta) &= \cos\ (\alpha+(-\beta))\\ &= \cos\alpha\ cos\ (-\beta)-\sin\alpha\ sin\ (-\beta)\\ &= \cos\alpha\ cos\ \beta+\sin\alpha\ sin\ \beta\end{aligned}$$

$$\cos\,(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\ cos\ \beta+\sin\alpha\ sin\ \beta)$$

Berdasarkan uraian di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

Rumus $\cos\ (\alpha+\beta)$ dan $cos(\alpha-\beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\mathbf{\cos\,(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\cos\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta}-\sin\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta})}$$

$$\mathbf{\cos\,(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\cos\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta}+\sin\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta})}$$

Contoh 1 :

Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator atau table, nilai dari :

b. $\cos 75°$ b. $\cos 80°.\cos 20° + \sin 80° \sin 20°$.

Jawab :

a. $$\begin{aligned}\cos 75° &= \cos(45+30)°\\ &= \cos 45°\cos 30° - \sin 45° \sin 30°\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\cos 80°.\cos 20° + \sin 80° \sin 20° &= \cos\ (80° - 20°)\\ &= \cos 60°\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Contoh 2 :

Buktikan bahwa $cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

Jawab :

Ruas Kiri

$$\begin{aligned} cos\frac{2}{3}\pi &= cos\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\right)\\ &= cos\frac{1}{3}\pi.cos\frac{1}{3}\pi - sin\frac{1}{3}\pi.sin\frac{1}{3}\pi\\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ &= \frac{1}{4}.-\frac{3}{4}\\ &= -\frac{2}{4}\end{aligned}$$

$$cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\ \ (terbukti)$$

Ayo Belajar Dan Aktivitas

C. Identitas Tangen Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Penentuan rumus tan $(\alpha+\beta)$ dapat diperoleh dengan menggunakan rumus dasar $tan\ A\ = \frac{sinA}{cosA}$ dan rumus sin $(\alpha+\beta)$ serta cos $(\alpha+\beta)$ seperti berikut ini.

Perhatikan

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta}{cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta} \times \frac{\frac{1}{cos\alpha\ cos\beta}}{\frac{1}{cos\alpha\ cos\beta}}$$

$$= \frac{\frac{sin\alpha\ cos\beta}{cos\alpha\ cos\beta} + \frac{cos\alpha\ sin\beta}{cos\alpha\ cos\beta}}{\frac{cos\alpha\ cos\beta}{cos\alpha\ cos\beta} - \frac{sin\alpha\ sin\beta}{cos\alpha\ cos\beta}}$$

$$= \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$$

Rumus $\tan(\alpha - \beta)$ dapat diperoleh dari rumus $\tan(\alpha + \beta)$ dengan mengubah β diganti dengan $-\beta$ sebagai berikut

$$tan\ (\alpha - \beta) = tan\ (\alpha + (-\beta))$$

$$= \frac{tan\ \alpha + tan(-\beta)}{1 - tan\alpha\ tan(-\beta)}$$

$$= \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha\ tan\beta}$$

Berdasarkan uraian di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

Rumus $\tan(\alpha + \beta)$ dan $tan\ (\alpha - \beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\boldsymbol{tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}}$$

$$\boldsymbol{tan\ (\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha\ tan\beta}}$$

Contoh :

Tentukan nilai eksak dari tan 15°

Jawab :

tan 15° = tan (60° - 45°)

$$= \frac{tan 60° - \tan 45°}{1 + tan 60° \tan 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-3-1+\sqrt{3}1}{1-3}$$

$$= \frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

Latihan Soal

1. Diketahui $cos\,\alpha = \frac{3}{5}$ dan $sin\,\beta = \frac{5}{13}$. Jika α adalah sudut lancip dan β sudut tumpul, tentukan nilai dari $sin\,(\alpha - \beta)$!
2. Diketahui A, B dan C adalah sudut-sudut suatu segitiga. Jika tan A = 1/3 dan sin B = 1/2, tentukan nilai dari cos C !
3. Segitiga PQR siku-siku di P. Jika cos (P + Q) = 2/3, tentukan nilai dari sin Q + cos R !
4. Diketahui A - B = 30° dengan sudut A dan B lancip. Jika sin A cos B = 7/10, tentukan nilai sin (A + B) !
5. Diketahui α, β dan γ adalah sudut-sudut suatu segitiga. Jika cos γ = -4/√65 dan tan α + tan β = 7/6, tentukan tan α tan β !

TEST FORMATIF

Kerjakan soal berikut kenudian pilihlah jawaban yang tepat

1. Nilai dari $\sin 15° = ...$

   A. $\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$

   B. $\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

   C. $\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}$

   D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

   E. $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

2. Nilai dari $\sin 165° = ...$

   A. $\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$

   B. $\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

   C. $\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}$

   D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

   E. $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

3. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini

   i) $2(\sin(x+y)+\sin(x-y)) = \sin x \cos y$

   ii) $\frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin(x-y)) = \sin x \cos y$

   iii) $\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y)) = \cos x \cos y$

   iv) $\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)) = \cos x \cos y$

   v) $-\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)) = \cos x \cos y$

   Pernyataan yang benar adalah

   A. i)

   B. ii)

   C. iii)

   D. iv)

   E. v)

4. Jika $\sin A = \frac{4}{5}$ dan $\sin B = \frac{7}{25}$, A sudut lancip dan B sudut tumpul maka nilai $\cos(A-B) = ...$

   A. $-\frac{117}{125}$

B. $-\frac{100}{125}$

C. $-\frac{75}{125}$

D. $-\frac{44}{125}$

E. $-\frac{21}{125}$

5. Diketahui $A+B=\frac{\pi}{3}$ dan $sinA.sinB=\frac{1}{4}$ dengan A dan B adalah sudut lancip. Nilai $\cos(A-B)=\cdots$

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

E. 1

6. Jika α dan β sudut lancip, $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{1}{5}$ dan $\cos\alpha\cos\beta=\frac{20}{65}$, maka nilai $\sin(\alpha-\beta)$ adalah ....

A. $\frac{25}{13}$

B. $\frac{20}{13}$

C. $\frac{4}{13}$

D. $\frac{7}{65}$

E. $\frac{4}{65}$

(SOALHOTS)

7. Seorang pengamat mengamati puncak gedung dengan jarak 10 meter. Jika pengamat mengamati puncak gedung dengan sudut elevasi 75^0 dan tinggi pengamat 1 meter. Tinggi gedung adalah ... meter

A. $71+40\sqrt{3}$

B. $70+40\sqrt{3}$

C. $70+20\sqrt{3}$

D. $71-40\sqrt{3}$

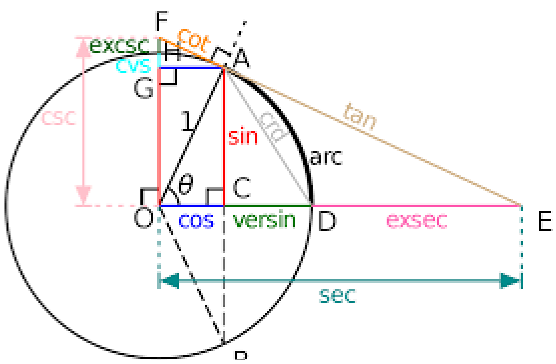
E. $71-20\sqrt{3}$

KUNCI JAWABAN TEST FORMATIF

1. B
2. B
3. D
4. C
5. E
6. A
7. A

BAHAN AJAR

RUMUS TRIGONOMETRI



Sudut Rangkap

Oleh:

Novi Arum Sari

SISTEMATIKA BAHAN AJAR

Sistematika dari bahan ajar rumus trigonometri ini adalah sebagai berikut :

1. Kompetensi Dasar Indikator Pencapaian Kompetensi dan tujuan pembelajaran yang harus dicapai oleh peserta didik
2. Apersepsi akan mengawali pemebalajaran yang dekat dengan lingkungan sekitar yang melibatkan ***wawasan***
3. Aktivitas belajar yang berisi penjelasan materi dalam bahasa yang mudah dipahami dan bagian yang harus dilengkapi peserta didik untuk lebih memahami materi
4. Contoh soal untuk memperjelas konsep yang dipelajari
5. **TPACK**, pada bagian ini berisi tautan yang mengajak peserta didik membuka laman yang akan menambah wawasan peserta didik. Tautan yang dimaksud juga berupa link yang menunjang pembelajaran
6. Latihan soal berisi soal – soal untuk menguji kemampuan peserta didik dalam memahami materi yang dipelajari, soal latihan dilengkapi soal **HOTS** untuk mengasah kemampuan peserta didik
7. Kunci Jawaban untuk mengecek jawaban peserta didik

PETUNJUK PENGGUNAAN BAHAN AJAR

Berikut ini adalah langkah –langkah yang disarankan bagi peserta didik dalam menggunakan bahan ajar ini :

1. Berdoalah sebelum menggunakan bahan ajar ini
2. Bacalah terlebih dahulu kompetensi dasar dan indikator yang harus dicapai
3. Bacalah petunjuk dengan **cermat** dan **teliti**.
4. Pahami uraian materi dengan seksama dan perhatikan contoh soal yang diberikan dengan sebaik –baiknya
5. Kerjakan latihan soal yang ada dengan **teliti**
6. Bacalah kembali rangkuman yang ada di bagian setelah latihan soal
7. Kerjakan soal – soal evaluasi secara **mandiri**
8. Pada saat mengerjakan latihan soal, jangan melihat halaman kunci terlebih dahulu supaya dapat mengetahui sejauh mana pemahaman Anda
9. Maksimalkan penggunaan tautan pada bagian **TPACK** dengan selalu berhati – hati dan bijak dalam penggunaan internet
10. Mintalah bimbingan guru ketika menemukan permasalahan yang dirasa rumit

Kompetensi Inti

1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.
2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif, dan proaktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam interaksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.
3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
4. Mengolah, menalar, dan menyajikan dalam ranah konkret dan ranah abstarak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya diskeolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.

Kompetensi Dasar

3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

Indikator Pencapaian Kompetensi

3.2.4 Menentukan dan menggunakan nilai sinus dengan rumus sudut rangkap

3.2.5 Menentukan dan menggunakan nilai cosinus dengan rumus sudut rangkap

3.2.6 Menentukan dan menggunakan nilai tangen dengan rumus sudut rangkap

4.2.2 Memecahkan permasalahan berkaitan dengan rumus sudut rangkap

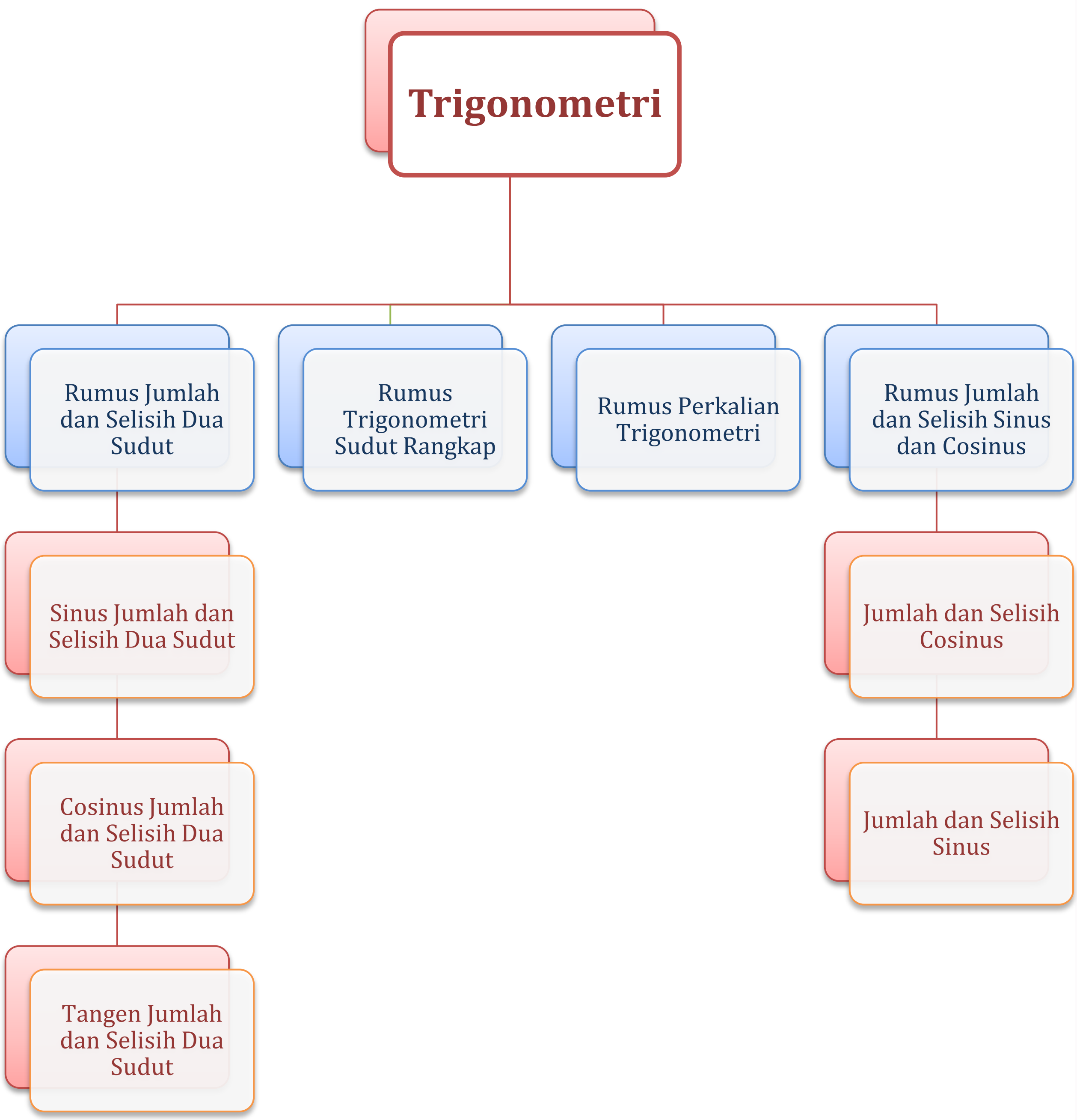
Tujuan Pembelajaran

1. Siswa dapat menentukan dan menggunakan nilai sinus dengan rumus sudut rangkap
2. Siswa dapat menentukan dan menggunakan nilai cosinus dengan rumus sudut rangkap
3. Siswa dapat menentukan dan menggunakan nilai tangen dengan rumus sudut rangkap
4. Siswa dapat memecahkan permasalahan berkaitan dengan rumus sudut rangkap

SUB POKOK MATERI

1. Trigonometri Penjumlahan atau Selisih Dua Sudut
2. Trigonometri Sudut Rangkap,
3. Trigonometri Sudut Pertengahan
4. Perkalian Trigonometri
5. Jumlah dan Selisih Sinus dan Kosinus,

PETA KONSEP

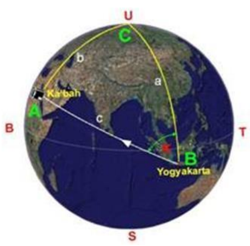


PENDAHULUAN

Trigonometri pada mulanya merupakan kajian tentang segitiga dan diterapkan sebagai tambahan kepraktisan pada astronomi, survey dan navigasi. Peninggalan berupa tablet dari tanah liat bangsa Babilonia dan batang papyrus dari Bangsa Mesir yang menunjukkan tahun sekitar 1600 SM menunjukkan bukti-bukti pemecahan masalah praktis dengan menggunakan pengukuran segitiga.

Ahli Astronomi bangsa Yunani telah berusaha menghilangkan perbandingan π di surga ketika mereka sedang menghitung panjang lintasan (orbit) yang dilalui oleh bintang-bintang. Dengann demikian, kajian mereka dalam bidang trigonometri secara praktiknya adalah menggunakan table tali busur perhitungan periode dan orbit. Hiparcus (140 SM) yang dikenal sebagai Bapak Trigonometri telah menulis 12 buku tentang perhitungan dari tali busur yang berkaitan dengan sudut pusat yang dipotong oleh tali busur itu. Sebagai fakta nyata, ketika mereka berkecimpung dengan masalah-masalah pada ruang dimensi tiga, apa yang mereka bangun biasanya dirujuk sebagai trigonometri bola, ketimbang sebagai trigonometri bidang.

KENAPA HARUS BELAJAR TRIGONOMETRI



Ka’bah di makkah adalah tempat suci sebagai kiblat arah patokan beribadah seluruh umat muslim di dunia. Dengan menggunakan konsep trigonometri kita bisa menentukan arah kiblat dari tempat kita berasal dengan tepat

Pernah mendengar salah satu keajaiban dunia berupa menara pissa yang miring di italia? Jikalau ada pertanyaan berapa kemiringan menara tersebut? Maka dengan konsep trigonometri ini kita bisa melihat seberapa kemiringan menara pissa tersebut

Pernah mendengar tentang puncak gunung tertinggi didunia? Jika pernah berapa tingginya? Cara mengukur tinggi puncak tertinggi ini bisa dihitung menggunakan konsep trigonometri juga lho

MATERI PRASYARAT

A. Identitas Sinus Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Rumus sin $(\alpha + \beta)$ dan $sin(\alpha - \beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\mathbf{sin}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{cos\beta} + \mathbf{cos}\ \boldsymbol{a} \,.\, \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\beta}\ )$$
$$\mathbf{sin}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{cos\beta} - \mathbf{cos}\ \boldsymbol{a} \,.\, \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\beta}\ )$$

B. Identitas Cosinus Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Rumus cos $(\alpha + \beta)$ dan $cos(\alpha - \beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

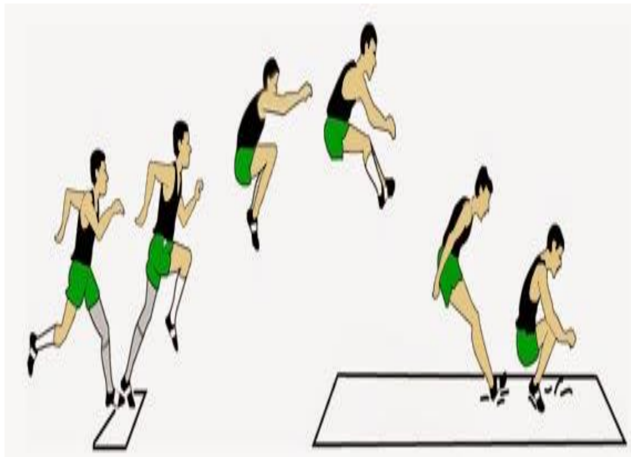
$$\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta} - \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta})$$
$$\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta} + \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta})$$

C. Identitas Tangen Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Rumus tan $(\alpha + \beta)$ dan $tan\ (\alpha - \beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\boldsymbol{tan}\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha} + \boldsymbol{tan\beta}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{tan\alpha}\ \boldsymbol{tan\beta}}$$
$$\boldsymbol{tan}\ (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha} - \boldsymbol{tan\beta}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{tan\alpha}\ \boldsymbol{tan\beta}}$$

Trigonometri untuk Sudut Rangkap.



Jarak Kemampuan pada lompatan tergantung dari besar kecepatan dan besar sudut pada saat melompat di papan tolakan. Jarak lompatan dapat dihitung menggunakan rumus jarak terjauh maksimum yaitu :

$$x_{maks} = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\alpha$$

Jika diketahui $v_0 = 11m/detik$, $g = 10m/detik^2$, dan $\sin\alpha = 0{,}36$, berapakah jarak terjauh maksimum lompatan? Perhatikan unsur yang diketahui $\sin\alpha = 0{,}36$ dan akan digunakan untuk menentukan $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$? Jika tidak berlaku, bagaimana cara menentukan nilai $\sin 2\alpha$ dari nilai $\sin\alpha$ tertentu? Ayo, ikut uraikan dengan seksama!

Sudut rangkap atau sudut ganda biasa dinyatakan dalam sudut 2α. Perbandingan trigonometri untuk sudut rangkap, yaitu **sin 2α**, **cos 2α** dan **tan 2α** dapat kita nyatakan dalam perbandingan trigonometri sudut tunggalnya, yaitu sudut α. Ekspresi trigonometri yang melibatkan sudut 2α dan sudut α inilah yang nantinya kita sebut dengan rumus trigonometri sudut rangkap.

Rumus sudut ganda dapat dengan mudah kita turunkan dari rumus jumlah dan selisih dua sudut dalam hal ini *sin (α + β)*, *cos (α + β)* dan *tan (α + β).*

https://www.youtube.com/watch?v=nBPcbWfWDio

A. Penurunan Sinus Sudut Rangkap.

Coba perhatikan kembali rumus *sin (α + β).*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Jika $\alpha = \beta$, maka rumus diatas menjadi

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

Karena $\alpha + \alpha = 2\alpha$ dan $\sin\alpha\cos\alpha = \cos\alpha\sin\alpha$, maka persamaan diatas menjadi

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

B. Penurunan Cosinus Sudut Rangkap.

Coba perhatikan kembali rumus cos (α + β).

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Jika α = β, maka rumus diatas menjadi

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

atau dapat kita tulis

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Dalam identitas trigonometri, diketahui bahwa

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Persamaan tersebut dapat dinyatakan dengan

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

atau

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

Jika kita substitusikan $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Jika kita substitusikan $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Sehingga, rumus cosinus sudut rangkap diperloeh tiga bentuk, yakni

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}}$$

C. Penurunan Tangen Sudut Rangkap.

Coba perhatikan kembali rumus *tan (α + β).*

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Jika $\alpha = \beta$, maka rumus diatas menjadi

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$$

atau dapat kita tulis

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

Rumus trigonometri sudut ganda akan sangat berguna dalam menyederhanakan ekspresi-ekspresi trigonometri nantinya, khususnya pada pokok bahasan yang melibatkan fungsi trigonometri seperti limit, turunan, integral dan persamaan trigonometri.

Berikut contoh-contoh soal yang dapat kita jadikan latihan dalam menggunakan dan memanipulasi rumus-rumus sudut ganda menjadi bentuk-bentuk lain yang masih tetap ekuivalen.

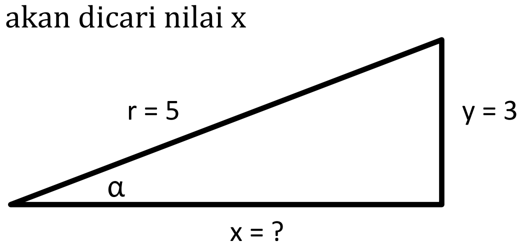
Contoh 1:

Tentukan nilai dari sin 2α, cos 2α dan tan 2α jika diketahui sin α = $\frac{3}{5}$, dengan α lancip!

Jawab :

Diketahui sin α = $\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$.

Dengan mengunakan rumus pythagores, akan dicari nilai x



$x^2 = r^2 - y^2$

$x^2 = 5^2 - 3^2$

$x^2 = 25 - 9$

$x^2 = 16$

x = 4 (dipilih x yang positif karena α lancip)

Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku akan diperoleh cos α = $\frac{4}{5}$ dan tan α = $\frac{3}{4}$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \,.\cos\alpha$$
$$= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$
$$= \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$$
$$= \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} \qquad = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}}$$
$$= \frac{24}{7}$$

Latihan Soal

1. Diketahui $\sin \alpha = p$ dan $\cos \beta = q$. Nyatakan $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$ dalam p dan q!
2. Jika $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dengan $45° < x < 90°$, maka tentukan nilai cos 2x!
3. Diketahui segitiga sama kaki ABC dengan $\angle A = \angle B = \alpha$ dan $\angle C = \theta$. Jika $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, maka tentukan nilai tan θ!
4. Gunakan rumus sinus sudut ganda untuk menyederhakankan bentuk-bentuk berikut!
   (a) $8\sin 3x \cos 3x$
   (b) $\cos 5x \sin 5x$
   (c) $(\sin 4x - \cos 4x)^2 = 1 - \sin 8x$
5. Tentukan nilai eksak dari
   (a) $\sin(\frac{3\pi}{8}) \cos(\frac{3\pi}{8})$
   (b) $4\cos^2 15° - 3$

TEST FORMATIF

1. Diketahui $sin\ x\ = \frac{1}{4}$, nilai dari $cos\ 2x$ adalah ...
   A. $\frac{3}{8}$
   B. $\frac{4}{8}$
   C. $\frac{5}{8}$
   D. $\frac{6}{8}$
   E. $\frac{7}{8}$

2. Diketahui A sudut lancip dengan cos 2A = 1/3. Nilai tan A = ...
   A. $1/3\,\sqrt{3}$
   B. ½ $\sqrt{2}$
   C. $1/3\,\sqrt{6}$
   D. $2/5\,\sqrt{5}$
   E. $2/3\,\sqrt{6}$

3. Diketahui α adalah sudut lancip dengan $\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5}$. Nilai dari $\cos\frac{1}{2}\alpha = \cdots$
   A. $\frac{1}{5}\sqrt{6}$
   B. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$
   C. $\frac{1}{5}\sqrt{15}$
   D. $\frac{1}{6}\sqrt{15}$
   E. $\frac{1}{6}30$

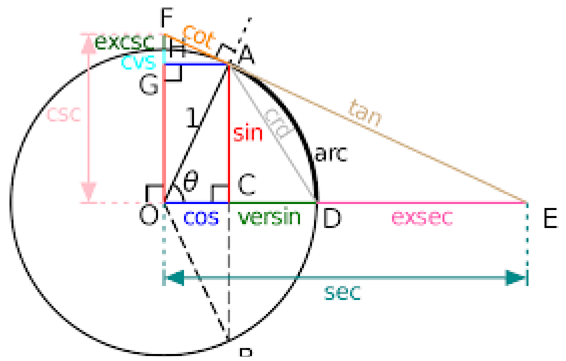
4. Jika $\sin x = -a$ dan x sudut di kaudran III, nilai $\sin 2x \cos 2x = ...$
   A. $(2a - 4a^3)\sqrt{1 - a^2}$
   B. $(2a - 4a^2)\sqrt{1 - a^2}$
   C. $(2a - 4a^3)\sqrt{1 + a^2}$
   D. $(a - a^2)\sqrt{1 - a^2}$
   E. $(a - a^2)\sqrt{1 + a^2}$

KUNCI JAWABAN

1. B
2. C
3. D
4. A

BAHAN AJAR

RUMUS TRIGONOMETRI



Perkalian SIN dan COS

Oleh:

Novi Arum Sari

SISTEMATIKA BAHAN AJAR

Sistematika dari bahan ajar rumus trigonometri ini adalah sebagai berikut :

1. Kompetensi Dasar Indikator Pencapaian Kompetensi dan tujuan pembelajaran yang harus dicapai oleh peserta didik
2. Apersepsi akan mengawali pemebalajaran yang dekat dengan lingkungan sekitar yang melibatkan ***wawasan***
3. Aktivitas belajar yang berisi penjelasan materi dalam bahasa yang mudah dipahami dan bagian yang harus dilengkapi peserta didik untuk lebih memahami materi
4. Contoh soal untuk memperjelas konsep yang dipelajari
5. **TPACK**, pada bagian ini berisi tautan yang mengajak peserta didik membuka laman yang akan menambah wawasan peserta didik. Tautan yang dimaksud juga berupa link yang menunjang pembelajaran
6. Latihan soal berisi soal – soal untuk menguji kemampuan peserta didik dalam memahami materi yang dipelajari, soal latihan dilengkapi soal **HOTS** untuk mengasah kemampuan peserta didik
7. Kunci Jawaban untuk mengecek jawaban peserta didik

PETUNJUK PENGGUNAAN BAHAN AJAR

Berikut ini adalah langkah –langkah yang disarankan bagi peserta didik dalam menggunakan bahan ajar ini :

1. Berdoalah sebelum menggunakan bahan ajar ini
2. Bacalah terlebih dahulu kompetensi dasar dan indikator yang harus dicapai
3. Bacalah petunjuk dengan **cermat** dan **teliti**.
4. Pahami uraian materi dengan seksama dan perhatikan contoh soal yang diberikan dengan sebaik –baiknya
5. Kerjakan latihan soal yang ada dengan **teliti**
6. Bacalah kembali rangkuman yang ada di bagian setelah latihan soal
7. Kerjakan soal – soal evaluasi secara **mandiri**
8. Pada saat mengerjakan latihan soal, jangan melihat halaman kunci terlebih dahulu supaya dapat mengetahui sejauh mana pemahaman Anda
9. Maksimalkan penggunaan tautan pada bagian **TPACK** dengan selalu berhati – hati dan bijak dalam penggunaan internet
10. Mintalah bimbingan guru ketika menemukan permasalahan yang dirasa rumit

Kompetensi Inti

1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.
2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif, dan proaktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam interaksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.
3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
4. Mengolah, menalar, dan menyajikan dalam ranah konkret dan ranah abstarak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya diskeolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.

Kompetensi Dasar

3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

Indikator Pencapaian Kompetensi

3.2.7 Menentukan dan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus

4.2.3 Memecahkan masalah yang berkaitan dengan perkalian sinus dan cosinus

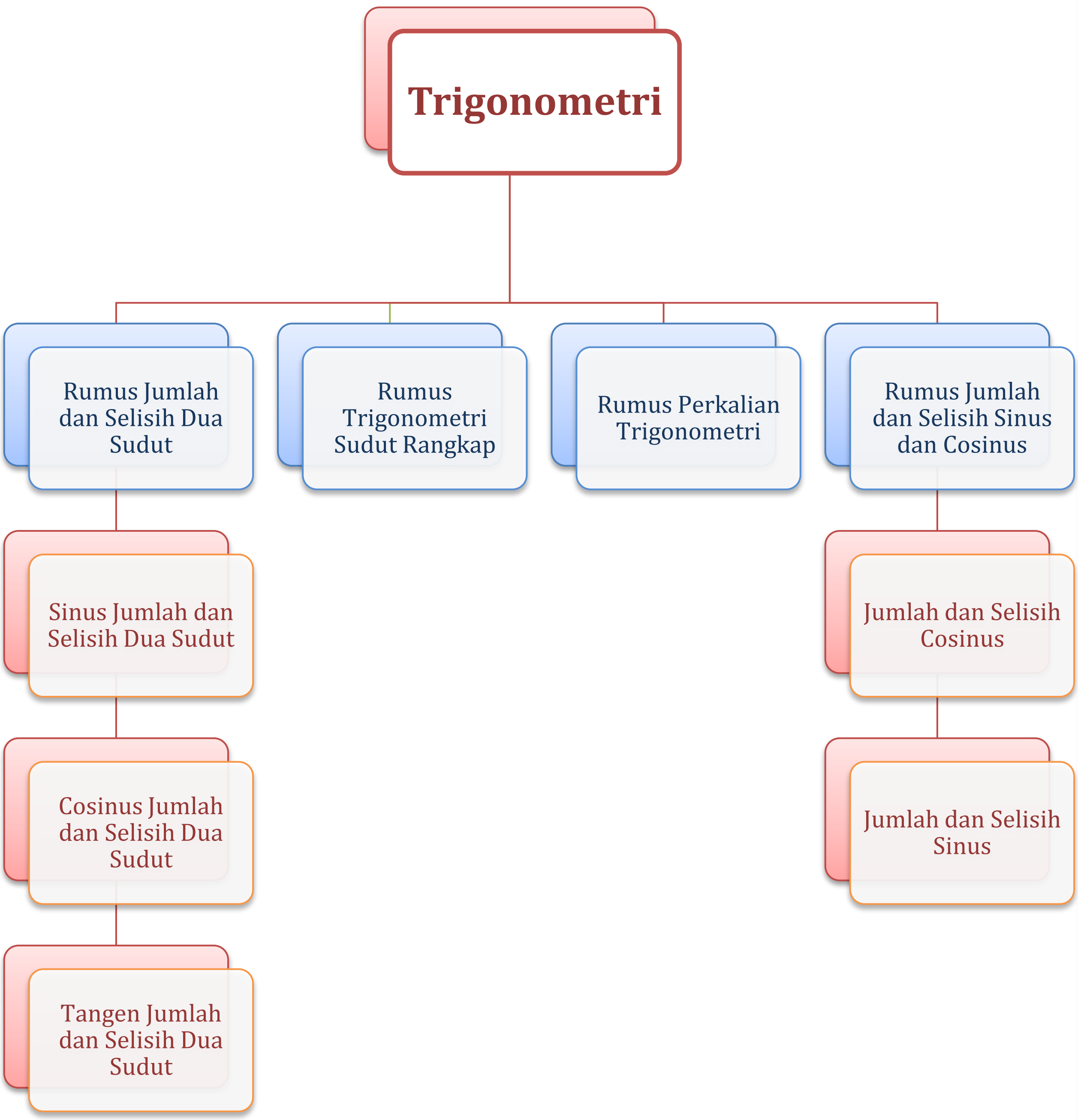
Tujuan Pembelajaran

1. Siswa dapat Menentukan dan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus
2. Siswa dapat memecahkan permasalahan berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus

SUB POKOK MATERI

1. Trigonometri Penjumlahan atau Selisih Dua Sudut
2. Trigonometri Sudut Rangkap,
3. Trigonometri Sudut Pertengahan
4. Perkalian Trigonometri
5. Jumlah dan Selisih Sinus dan Kosinus,

PETA KONSEP

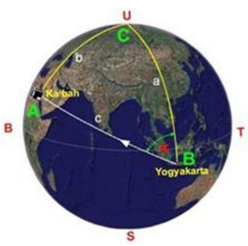


PENDAHULUAN

Trigonometri pada mulanya merupakan kajian tentang segitiga dan diterapkan sebagai tambahan kepraktisan pada astronomi, survey dan navigasi. Peninggalan berupa tablet dari tanah liat bangsa Babilonia dan batang papyrus dari Bangsa Mesir yang menunjukkan tahun sekitar 1600 SM menunjukkan bukti-bukti pemecahan masalah praktis dengan menggunakan pengukuran segitiga.

Ahli Astronomi bangsa Yunani telah berusaha menghilangkan perbandingan π di surga ketika mereka sedang menghitung panjang lintasan (orbit) yang dilalui oleh bintang-bintang. Dengann demikian, kajian mereka dalam bidang trigonometri secara praktiknya adalah menggunakan table tali busur perhitungan periode dan orbit. Hiparcus (140 SM) yang dikenal sebagai Bapak Trigonometri telah menulis 12 buku tentang perhitungan dari tali busur yang berkaitan dengan sudut pusat yang dipotong oleh tali busur itu. Sebagai fakta nyata, ketika mereka berkecimpung dengan masalah-masalah pada ruang dimensi tiga, apa yang mereka bangun biasanya dirujuk sebagai trigonometri bola, ketimbang sebagai trigonometri bidang.

KENAPA HARUS BELAJAR TRIGONOMETRI



Ka'bah di makkah adalah tempat suci sebagai kiblat arah patokan beribadah seluruh umat muslim di dunia. Dengan menggunakan konsep trigonometri kita bisa menentukan arah kiblat dari tempat kita berasal dengan tepat

Pernah mendengar salah satu keajaiban dunia berupa menara pissa yang miring di italia? Jikalau ada pertanyaan berapa kemiringan menara tersebut? Maka dengan konsep trigonometri ini kita bisa melihat seberapa kemiringan menara pissa tersebut

Pernah mendengar tentang puncak gunung tertinggi didunia? Jika pernah berapa tingginya? Cara mengukur tinggi puncak tertinggi ini bisa dihitung menggunakan konsep trigonometri juga lho

MATERI PRASYARAT

A. Identitas Sinus Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Rumus sin $(\alpha+\beta)$ dan $sin(\alpha-\beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\mathbf{sin}\ (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} \, . \, \boldsymbol{cos\beta} + \mathbf{cos}\ \boldsymbol{a} \, . \, \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\beta}\ )$$
$$\mathbf{sin}\ (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} \, . \, \boldsymbol{cos\beta} - \mathbf{cos}\ \boldsymbol{a} \, . \, \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\beta}\ )$$

B. Identitas Cosinus Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Rumus cos $(\alpha+\beta)$ dan $cos(\alpha-\beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta} - \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta})$$
$$\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{\beta} + \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{sin}\ \boldsymbol{\beta})$$

C. Identitas Tangen Penjumlahan/ Selisih Dua Sudut

Rumus tan $(\alpha+\beta)$ dan $tan\ (\alpha-\beta)$ berlaku untuk tiap sudut α dan β dalam ukuran radian maupun ukuran derajat dan dituliskan sebagai :

$$\boldsymbol{tan}\ (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha}+\boldsymbol{tan\beta}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{tan\alpha}\ \boldsymbol{tan\beta}}$$
$$\boldsymbol{tan}\ (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha}-\boldsymbol{tan\beta}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{tan\alpha}\ \boldsymbol{tan\beta}}$$

Perkalian Trigonometri.

Sebuah Bis yang melaju di jalan raya membunyikan sirene dengan gelombang bunyi sebesar $y = A_0 \sin 2\pi f_1 t$. Tepat disamping mobil tersebut, ada Bis lain yang membunyikan sirene dengan gelombang bunyi $y = A_0 \sin 2\pi f_2 t$. Bunyi sirene yang didengar setiap orang di jalan raya tersebut makin kuat karena terjadi interferensi gelombang. Bentuk interferensi gelombang bunyi kedua sirene tersebut :

$y = A_0 \sin 2\pi f_1 t + A_0 \sin 2\pi f_2 t$

$y = A_0 (\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t)$

$Misalkan\ \alpha = 2\pi f_1 t$ dan $\beta = 2\pi f_2 t$

$y = A_0 (\sin\ \alpha + \sin \beta)$

Perhatikan bentuk $\sin \alpha + \sin \beta$ merupakan bentuk penjumlahan sinus. Pada subbab ini Anda akan belajar tentang identitas trigonometri penjumlahan/selisih sinus dan kosinus. Namun, sebelumnya Anda harus belajar identitas trigonometri perkalian sinus dan kosinus terlebih dahulu.

https://www.youtube.com/watch?v=M0ae8JcPUzI

A. Perkalian Trigonometri yang Berbeda.

Perkalian trigonometri yang berbeda ini meliputi perkalian sin A . cos B dan cos A . sin B. Adapun penurunan rumusnya diperoleh dari sinus jumlah dan selisih dua sudut.

Kita perhatikan kembali rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \ldots (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \ldots (2)$$

Persamaan (1) dan (2) akan dieliminasi *cos α sin β* :

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad + \\ \hline \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) & = & 2\sin\alpha\cos\beta \end{array}$$

Dari sini diperoleh

$$\boldsymbol{sin\alpha\ cos\beta} = \frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})}{\mathbf{2}}$$

Persamaan (1) dan (2) akan dieliminasi *sin α cos β* :

$$\begin{array}{rcr} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad - \\ \hline \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha\sin\beta \end{array}$$

Dari sini diperoleh

$$\boldsymbol{sin\alpha\ cos\beta} = \frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha\ sin\beta} = \frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})}{\mathbf{2}}$$

Contoh 1 :

Tentukan nilai 2 sin 75^0 cos 15^0!

Jawab:

2 sin 75^0 cos 15^0 = sin ($75^0 + 15^0$) + sin ($75^0 - 15^0$)

= sin 90^0 + sin 60^0

= $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Contoh 2 :

Segitiga ABC siku-siku di C. Jika sinA cosB = 1/3, maka tentukan nilai sin(A – B)!

Jawab:

C = 90^0

A + B + C = 180^0

A + B + 90^0 = 180^0

A + B = $180^0 - 90^0$

A + B = 90^0

Sehingga

sinA cosB = 1/3

2sinA cosB = 2/3

sin(A + B) + sin(A – B) = 2/3

sin 90^0 + sin(A – B) = 2/3

1 + sin(A – B) = 2/3

sin(A – B) = 2/3 – 1

sin(A – B) = -1/3

B. Perkalian Trigonometri yang Sejenis.

Perkalian trigonometri yang sejenis ini meliputi perkalian cos A . cos B dan sin A . sin B. Adapun penurunan rumusnya diperoleh dari cosinus jumlah dan selisih dua sudut.

Kita perhatikan kembali rumus cosinus jumlah dan selisih dua sudut

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ldots (1)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ldots (2)$$

Persamaan (1) dan (2) akan dieliminasi *sin α sin β* :

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad + \\ \hline \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

Dari sini diperoleh

$$\boxed{\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}}}$$

Persamaan (1) dan (2) akan dieliminasi *cos α cos β* :

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad - \\ \hline \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) & = & -2\sin\alpha\sin\beta \end{array}$$

Dari sini diperoleh

$$\boxed{\boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{-2}}}$$

Contoh 3:

Jika segitiga ABC adalah segitiga siku-siku, dengan siku-siku di C. Jika diketahui cosA cosB = $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, maka tentukan besar sudut A – B!

Jawab:

$C = 90^0$

$A + B + C = 180^0$

$A + B + 90^0 = 180^0$

$A + B = 180^0 - 90^0$

$A + B = 90^0$

Sehingga

$\cos A \cos B = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$2 \cos A \cos B = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos(A + B) + \cos(A - B) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 90^0 + \cos(A - B) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$0 + \cos(A - B) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$A - B = 60^0$

Latihan Soal

1. Tentukanlah nilai dari cos 75^0 cos 15^0!
2. Tentukanlah nilai -2 sin 15^0 sin 75^0!
3. Tentukanlah nilai dari 4 cos $67½^0$ sin $22 ½^0$!
4. Tentukanlah nilai dari sin 105^0 sin 15^0!
5. Tentukanlah bentuk sederhana dari 3 cos(x + y) cos (x – y)!

TEST FORMATIF

Kerjakan soal berikut, kemudian pilihlah jawabab yang benar

1. Nilai $\frac{1}{4}\sin 52{,}5^0 \, . \sin 7{,}5^0 =$ ....
   A. $\frac{1}{32}\left(\sqrt{2}-1\right)$
   B. $\frac{1}{16}\left(\sqrt{2}-1\right)$
   C. $\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$
   D. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$
   E. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

2. Diketahui p dan q adalah sudut lancip dan p – q = 30°. Jika cos p sin q= 61, maka nilai dari sin p cos q= ...
   A. $\frac{1}{6}$
   B. $\frac{2}{6}$
   C. $\frac{3}{6}$
   D. $\frac{4}{6}$
   E. $\frac{5}{6}$

3. Diketahui besar sudut $\alpha = 75°$ dan sudut $\beta = 15°$. Maka nilai $sin\ \alpha\ .\ sin\ \beta$ adalah ....
   A. $\frac{3}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{4}$
   D. $-\frac{1}{4}$
   E. $-\frac{3}{4}$

4. Jika $\sin x = -a$ dan x sudut di kaudran III, nilai $\sin 2x \cos 2x = \ldots$
   A. $(2a - 4a^3)\sqrt{1-a^2}$
   B. $(2a - 4a^2)\sqrt{1-a^2}$
   C. $(2a - 4a^3)\sqrt{1+a^2}$
   D. $(a - a^2)\sqrt{1-a^2}$
   E. $(a - a^2)\sqrt{1+a^2}$

KUNCI JAWABAN

1. B
2. C
3. D
4. A

