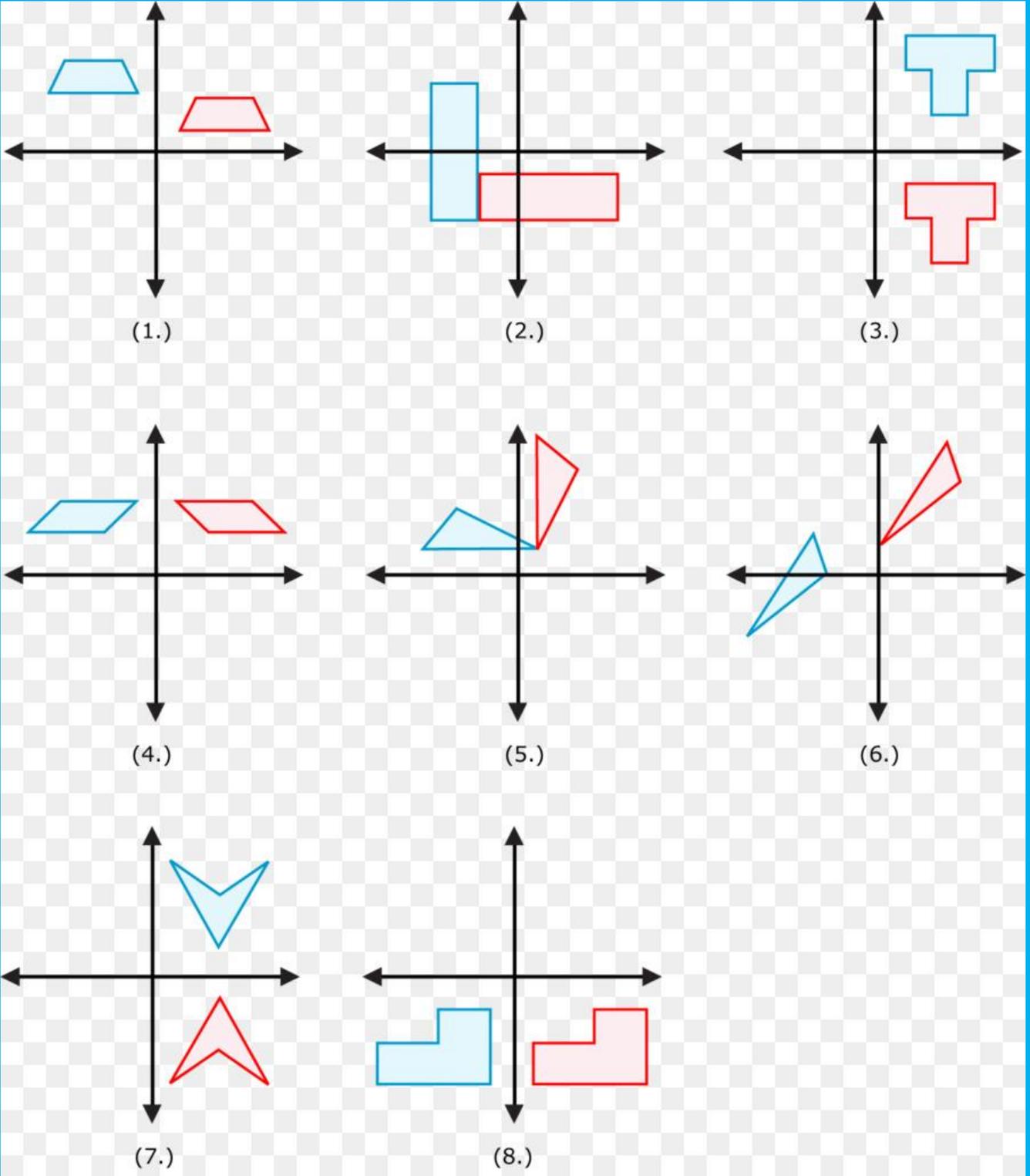


MATEMATIKA

TRANSFORMASI GEOMETRI



KOMPETENSI INTI

1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya
2. Menghargai dan menghayati perilaku jujur, disiplin, tanggungjawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri, dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya
3. Memahami pengetahuan (faktual, konseptual, dan prosedural) berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya terkait fenomena dan kejadian tampak mata
4. Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret (menggunakan, mengurai, merangkai, memodifikasi, dan membuat) dan ranah abstrak (menulis, membaca, menghitung, menggambar, dan mengarang) sesuai dengan yang dipelajari di sekolah dan sumber lain yang sama dalam sudut pandang/teori.

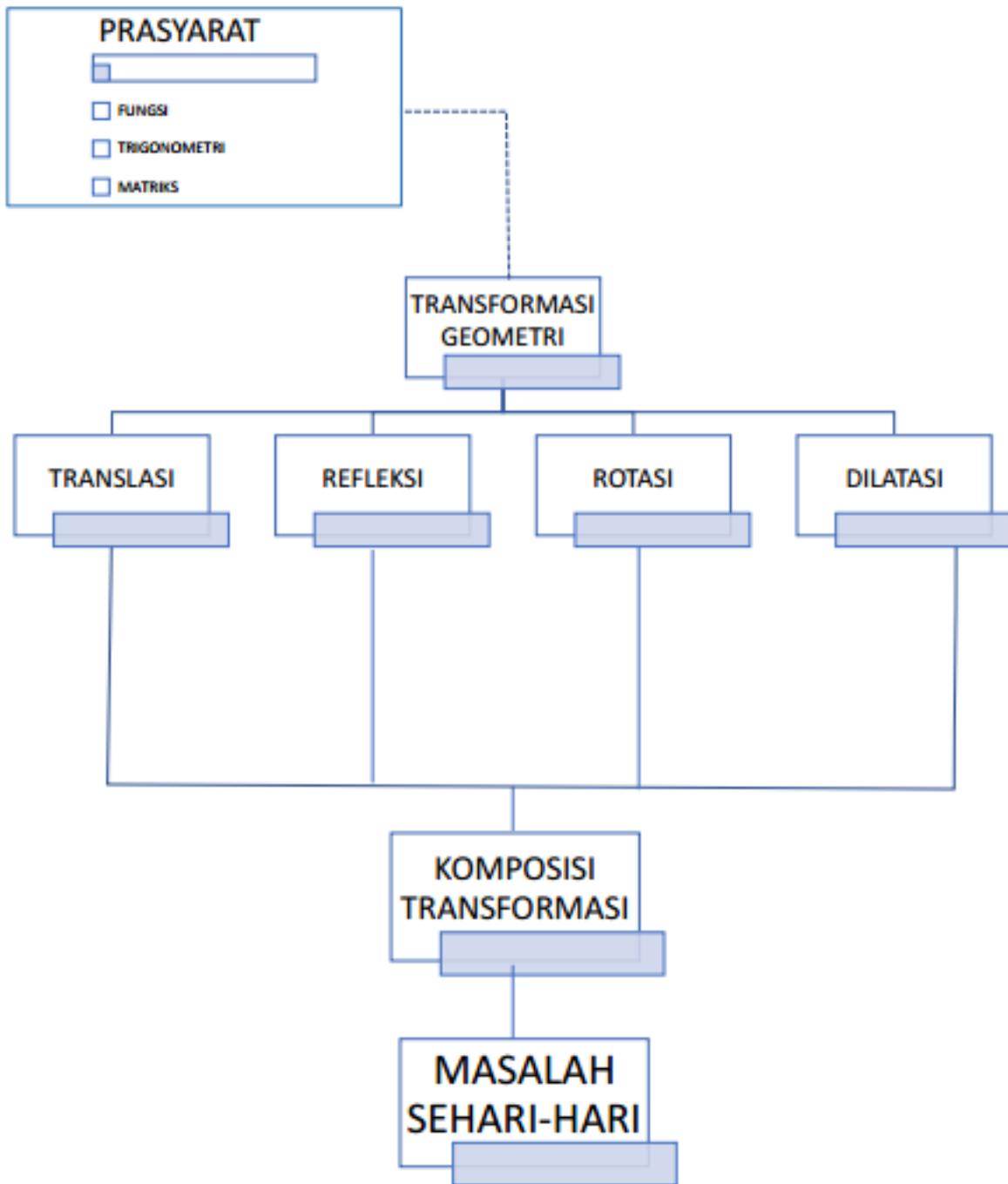
KOMPETENSI DASAR

- 3.5 Menjelaskan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi) yang dihubungkan dengan masalah kontekstual.
- 4.5 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi).

INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

- 3.5.1 Menemukan sifat-sifat translasi berdasarkan pengamatan pada masalah kontekstual dan pengamatan objek pada bidang koordinat (konseptual)
- 3.5.2 Menentukan bayangan hasil transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks
- 4.5.1 Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)

PETA KONSEP



TRANSLASI

Ayo Kita Amati

Pernahkah kalian bermain/melewati bandara Adi Sumarmo yang berjarak 1 km dari sekolahan kita? Selain pesawat terbang, alat transportasi apa yang berada disekitarnya?

Perhatikan gambar dibawah ini!



<https://www.solopos.com/ke-korea-selatan-akan-langsung-dari-bandara-adi-soemarmo-solo-897340tiketnya>



<https://travel.tempo.co/read/1313677/kereta-bandara-solo-tak-lagi-gratis-berapa-tiketnya>

Gambar diatas merupakan gambar pesawat terbang, kereta api dan mobil yang berada disekitar bandara Adi Sumarmo. Seperti yang kita ketahui ada jalur kereta api dan jalan tol yang langsung terhubung ke Bandara.

Bayangkan ketika kamu melihat pesawat terbang yang sedang lepas landas. Bagaimakah pergerakan pesawat terbang tersebut? Bayangkan ketika kamu melihat kereta api yang sedang menuju ke Bandara. Bagaimanakah pergerakan kereta api tersebut? Apakah bentuk pesawat terbang dan kereta api tersebut berubah? Bagaimana dengan arah pesawat terbang dan kereta api tersebut? Apakah ukuran pesawat dan kereta api tersebut berubah? Pergerakan pesawat dan kereta api ini merupakan penerapan dari materi yang akan kita bahas pada bab ini, yaitu translasi.

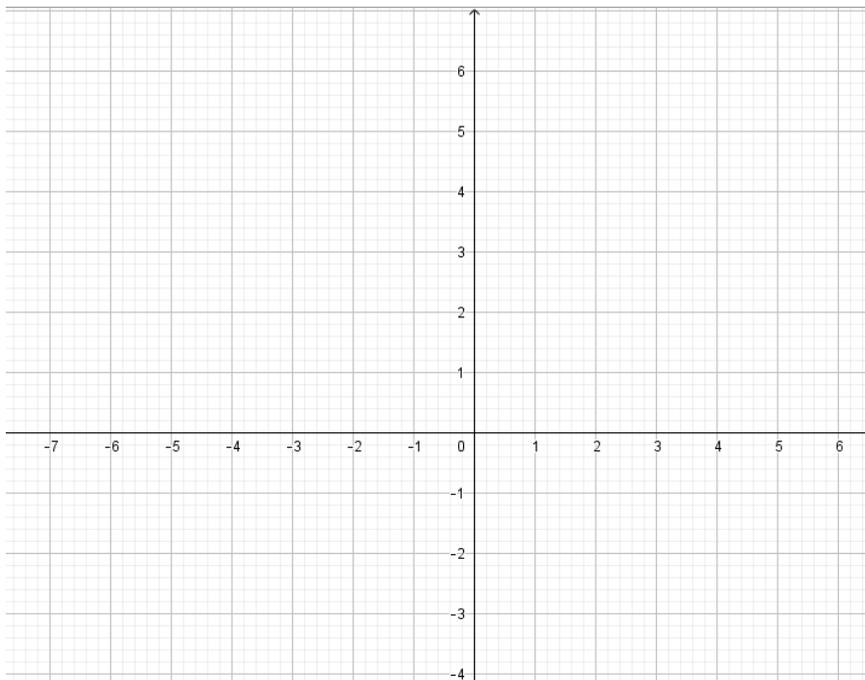
Sekarang kita akan membahas pergerakan obyek tersebut dengan pendekatan koordinat.

Masalah 3.1

Titik A(4,-3), B (6,-2) dan C(5,0) bergerak kekiri 6 langkah dan ke atas 5 langkah. Coba kamu sketsa pergerakan titik tersebut pada bidang koordinat kartesius. Dapatkah kamu temukan proses pergerakan titik tersebut?

Kita asumsikan bahwa pergerakan ke arah sumbu x positif adalah ke kanan, pergerakan ke arah sumbu x negatif adalah ke kiri, pergerakan ke arah sumbu y positif adalah ke atas, dan pergerakan ke arah sumbu y negatif adalah ke bawah

Ayo Kita Mencoba



Untuk bisa mengerjakan masalah 3.1, ikuti langkah-langkah berikut ini

1. Gambarlah titik A (4,-3), B(6,-2) dan C(5,0) pada koordinat kartesius
2. Pada pergeseran 1. Titik A(4,-3) bergerak ke kiri sejauh 6 langkah, dan ke atas sejauh 5 langkah, kemudian beri nama titik tersebut A'
3. Lakukan langkah yang sama untuk titik B dan C

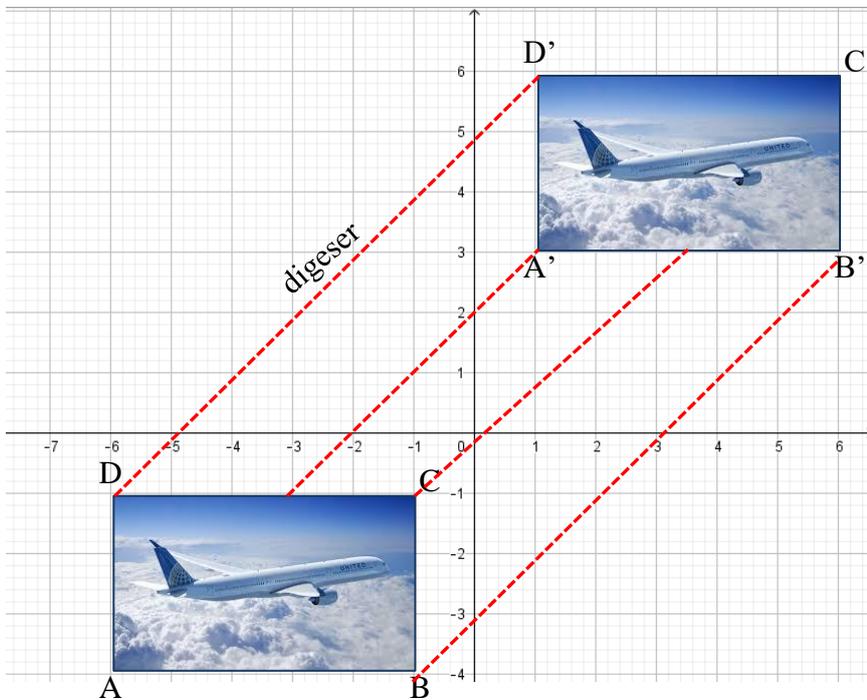
Setelah kamu melakukan aktivitas diatas, coba kamu lengkapi Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 3.1 Koordinat Bayangan Hasil Translasi Segi tiga ABC

Titik awal	Translasi	Proses titik awal + translasi	Titik Akhir
$A(4, -3)$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$A'(-2, 2)$
$B(6, -2)$	$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$B'(\dots, \dots)$
$C(5, 0)$	$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$C'(\dots, \dots)$

Masalah 3.2

Perhatikan gambar dibawah ini, Sebuah lukisan pesawat terbang digeser pada bidang koordinat kartesius. Dapatkah kamu tentukan arah dan besar pergeserannya?



Untuk mengerjakan masalah 3.2, kita menggunakan tabel 3.2

Tabel 3.2 Koordinat Bayangan Hasil Translasi lukisan pesawat terbang $ABCD$

Titik awal	Titik Akhir	Proses titik awal + translasi	Translasi
$A (... , ...)$	$A' (... , ...)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$
$B (... , ...)$	$B' (... , ...)$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$
$C (... , ...)$	$C' (... , ...)$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$
$D (... , ...)$	$D' (... , ...)$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Berdasarkan pengamatan pada pergeseran pesawat terbang, kereta api dan obyek-obyek disekitar kita dan pergeseran obyek-obyek dibidang kartesius (masalah 3.1 dan masalah 3.2) dapat disimpulkan sifat translasi sebagai berikut

Sifat Translasi

Bangun yang digeser/translasi tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran

Berdasarkan pengamatan tabel, secara umum diperoleh konsep

Titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh $T(a,b)$ menghasilkan bayangan $A'(x',y')$, ditulis dengan :

$$A(x,y) \xrightarrow{T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Materi Esensi 3.2

✚ Pengertian Translasi

Translasi atau Pergeseran adalah Suatu Transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu. Dimana jarak atau arah tertentu dapat diwakili dengan ruas garis berarah atau suatu pasangan bilangan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

✚ Perhatikan Penjelasan Berikut ini !

Translasi oleh $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ditulis dengan $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dimana a = jarak perpindahan secara horizontal
 b = jarak perpindahan secara Vertikal.

Jika Titik $P(x, y)$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ maka diperoleh $P'(x', y')$. $x' = x + a$ dan $y' = y + b$ (P' bisa disebut sebagai bayangan dari titik P)

Hitungan diatas dapat dituliskan :

$$P(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x', y') = (x+a, y+b).$$

✚ Contoh permasalahan

1. Jika persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di translasikan oleh titik $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. Jika titik persamaan lingkaran tersebut melalui titik $M(4, 3)$ di translasikan oleh titik $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, tentukan bayangan oleh titik M .

$$M(4,3) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} M'(x', y') = (4-1, 3+3) \\ M' = (3,9) \end{matrix}$$

b. Tentukan bayangan dari persamaan lingkaran tersebut!

Penyelesaian :

Karena $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka diperoleh $x' = x + (-1)$ dan $y' = y + 3$

$x' = x + (-1)$ maka $x = x' + 1$

$y' = y + 3$ maka $y = y' - 3$

Substitusikan x dan y ke persamaan lingkaran :

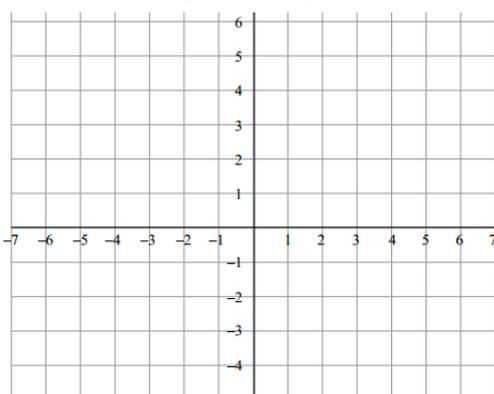
$$(x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = 25$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

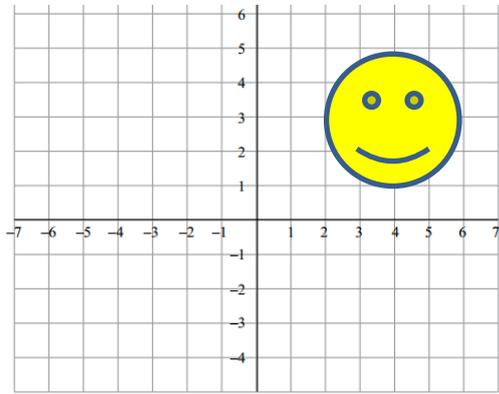
Jadi bayangan dari persamaan lingkaran tersebut adalah $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Latihan 3.1

1. Gambar dan tentukan koordinat hasil translasi dari bangun datar di bawah ini.
 - a. Translasikan segi lima sejauh 5 satuan ke kanan dan 2 satuan ke bawah.



b. Translasikan segi lima sejauh 7 satuan ke kiri dan 4 satuan ke bawah.



2. Segitiga ABC ditranslasi sehingga menghasilkan bayangan $\Delta A'B'C'$. Diketahui koordinat $A(3, 9)$, $B(-1, 4)$, $A'(4, 2)$, dan $C'(6, -3)$, tentukan koordinat C dan B' . Tentukan pula translasinya.



Kerjakan soal di bawah ini dengan benar.

1. Lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ digeser ke kanan sejauh 2 satuan searah dengan sumbu-X dan digeser ke bawah sejauh 3 satuan searah sumbu-Y. Tentukan
 - a. bayangan lingkaran
 - b. pusat bayangan lingkaran
 - c. perbandingan luas lingkaran dan bayangan lingkaran

REFLEKSI

Ayo Kita Amati

Pernahkah kalian bermain ke Waduk cengklik yang berjarak 1,5 km dari sekolah kita?

Pernahkah kalian memperhatikan bayangan pohon yang berada di tengah waduk cengklik?

Perhatikan gambar dibawah ini!



Pemandangan waduk cengklik Boyolali di sore hari

Waduk cengklik merupakan tempat wisata di daerah Ngemplak Boyolali, berjarak 1,5 km dari SMA N 1 Ngemplak Boyolali. Air waduk Cengklik digunakan untuk perikanan dan perairan sawah. Setiap hari banyak orang berkunjung kesana.

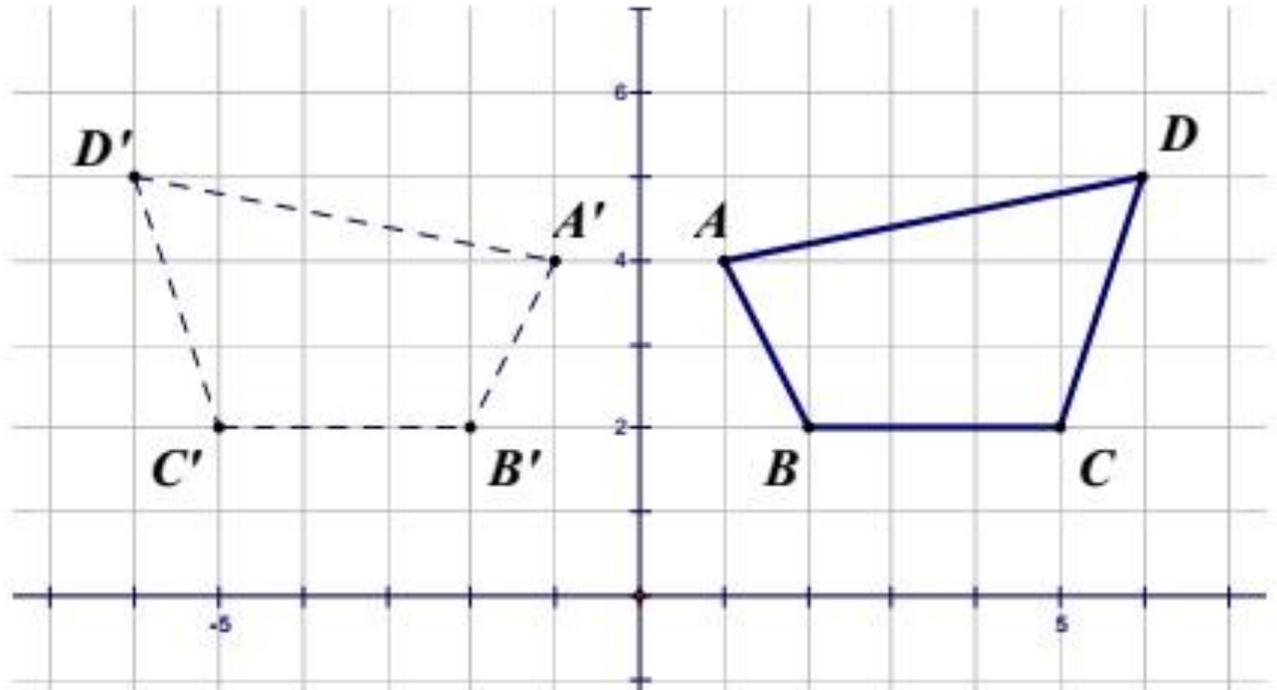
Pemandangan pada gambar tersebut merupakan pemandangan dari waduk cengklik dengan refleksi pada permukaan air. Bayangkan ketika kamu melihat pemandangan tersebut, identifikasi apakah ukuran bayangan dari pohon yang berada di tengah waduk tersebut sama dengan ukuran pohon yang asli? Bagaimana dengan bentuk bayangan tersebut? Bagaimana dengan posisi bayangan terhadap pohon asli tersebut? Proses pembentukan bayangan pohon tersebut akan dibahas lebih lanjut pada pembahasan di bab ini.

Konsep Refleksi

Bayangkan ketika kamu berada di tepi waduk cengklik. Ketika kamu melihat pada air waduk, akan tampak pantulan bayangan dirimu di air tersebut. Perhatikan pantulan bayangan yang terbentuk pada air. Ukuran bayangan pada air tersebut sama dengan ukuran tubuhmu yang asli. Posisi bagian tubuhmu sebelah kanan akan berada pada posisi di sebelah kiri pada pantulan bayanganmu di air. Selain itu jarak antara kamu dan air akan sama dengan jarak pantulan bayanganmu dari air. Hal ini merupakan salah satu contoh dari refleksi. Jika dilihat dengan menggunakan pendekatan koordinat Kartesius, objek dicerminkan atau direfleksikan pada sumbu X atau pada sumbu Y . Sumbu koordinat ini diasumsikan sebagai cermin pada bidang koordinat Kartesius.

Masalah 3.3

Perhatikan gambar berikut! Coba kamu amati obyek yang dicerminkan terhadap sumbu Y pada bidang kartesius. Kamu terfokus pada jarak obyek ke cermin dan jarak bayangan ke cermin serta bentuk/ukuran obyek dan bayangan



Lengkapi tabel berikut

Koordinat obyek	Jarak titik terhadap sumbu Y	Koordinat bayangan	Jarak titik terhadap sumbu Y
A (1,4)	1 satuan	A'(-1,4)	... satuan
B(...,...)	... satuan	B'(...,...)	... satuan
C(...,...)	... satuan	C'(...,...)	... satuan
D(...,...)	... satuan	D'(...,...)	... satuan

Diskusikan

Berdasarkan tabel yang telah kamu lengkapi, apakah yang dapat kamu simpulkan?

1. Bagaimana letak koordinat titik pada objek dan letak koordinat titik bayangan dari objek tersebut yang di refleksikan terhadap sumbu Y?
2. Bagaimana jarak titik pada objek dan jarak titik bayangan dari objek terhadap sumbu Y?
3. Bagaimana bentuk obyek dan bayangan?
4. Bagaimana ukuran obyek dan bayangan?

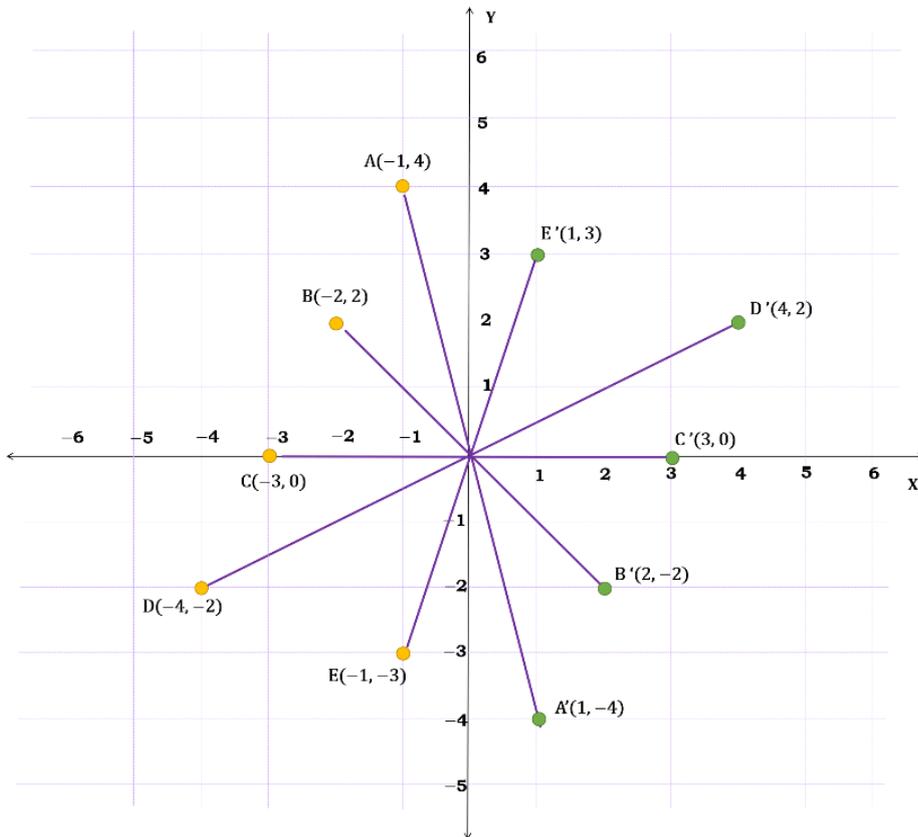
Sifat Refleksi

Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut

Pencerminan terhadap titik O(0,0)

Masalah 3.4

Amati gambar berikut! Identifikasi hasil pengamatanmu mengenai obyek yang dicerminkan terhadap titik O(0,0). Bagaimanakah bayangan dari obyek tersebut?



Lengkapi tabel berikut

Koordinat Obyek	Koordinat bayangan
A(.....)	A'(.....)
B(.....)	B'(.....)
C(.....)	C'(.....)
D(.....)	D'(.....)
E(.....)	E'(.....)

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik A(x,y) dicerminkan terhadap titik O(0,0) akan mempunyai koordinat bayangan A'(-x, -y) bukan?

Ayo Kita Mencoba

Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap titik O(0,0). Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(-x, -y)$$

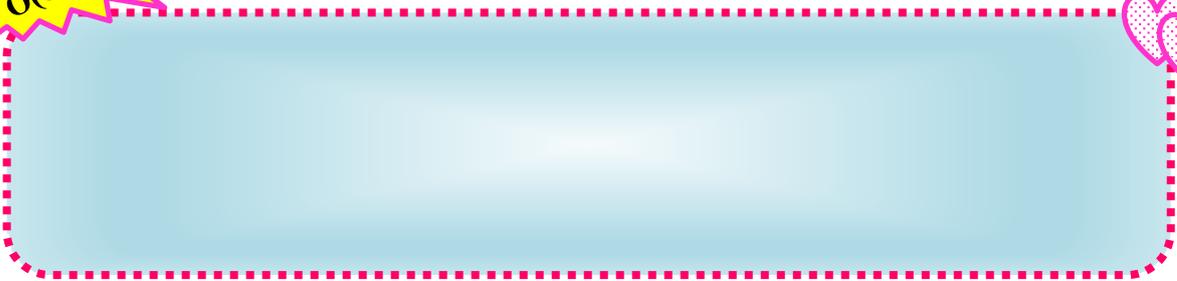
$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks

$$-x = ax + by \Leftrightarrow a = -1 \text{ dan } b = 0$$

$$-y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0 \text{ dan } d = -1$$

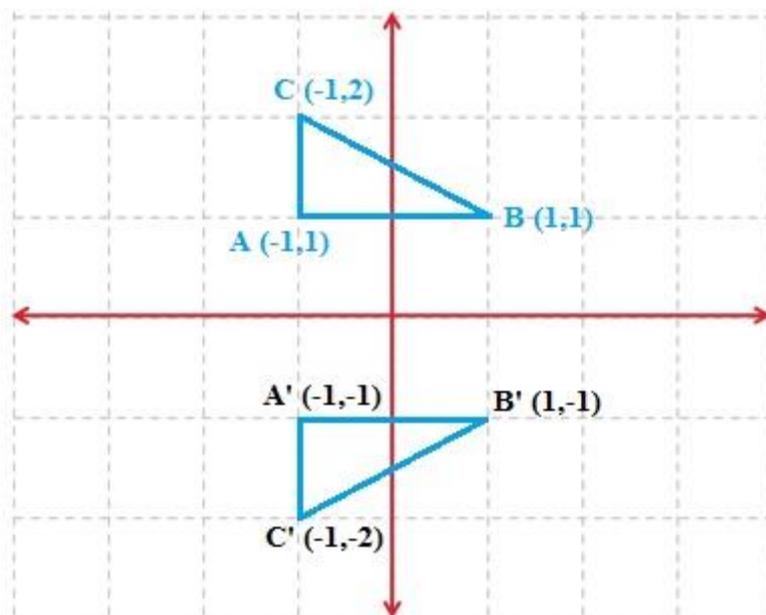
Dapat disimpulkan matriks pencerminan terhadap titik $O(0,0)$ adalah



Pencerminan terhadap sumbu x

Masalah 3.5

Amati gambar berikut! Identifikasi hasil pengamatanmu mengenai obyek yang dicerminkan terhadap sumbu X. Bagaimanakah bayangan dari obyek tersebut?



Lengkapi tabel berikut

Koordinat Obyek	Koordinat bayangan
A(.....,.....)	A'(.....,.....)
B(.....,.....)	B'(.....,.....)
C(.....,.....)	C'(.....,.....)

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap sumbu X akan mempunyai koordinat bayangan $A'(x, -y)$ bukan?

Ayo Kita Mencoba

Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap sumbu X. Misalkan matriks transformasinya adalah

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ sehingga,}$$

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x, -y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks

$$x = ax + by \Leftrightarrow a = 1 \text{ dan } b = 0$$

$$-y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0 \text{ dan } d = -1$$

Dapat disimpulkan matriks pencerminan terhadap sumbu X adalah

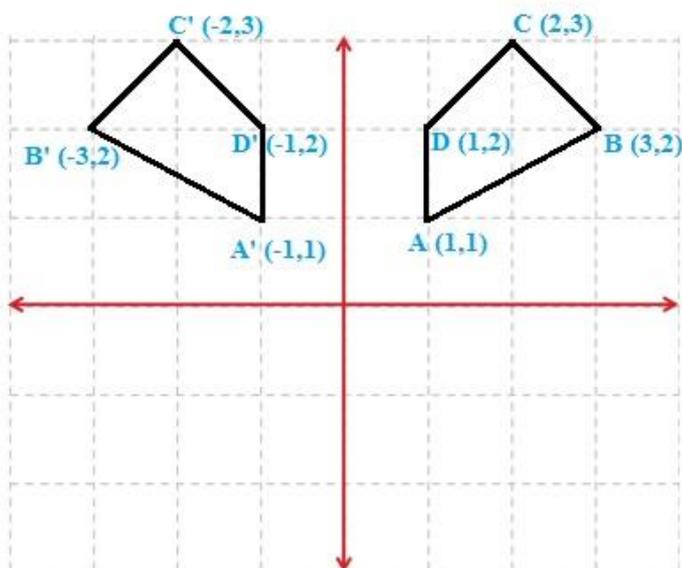
**Refleksi
sumbu X**



Pencerminan terhadap sumbu Y

Masalah 3.5

Amati gambar berikut! Identifikasi hasil pengamatanmu mengenai obyek yang dicerminkan terhadap sumbu Y. Bagaimanakah bayangan dari obyek tersebut?



Lengkapi tabel berikut

Koordinat Obyek	Koordinat bayangan
A(.....,.....)	A'(.....,.....)
B(.....,.....)	B'(.....,.....)
C(.....,.....)	C'(.....,.....)
D(.....,.....)	D'(.....,.....)

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik A(x,y) dicerminkan terhadap sumbu Y akan mempunyai koordinat bayangan A'(-x, y) bukan?

Ayo Kita Mencoba

Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap sumbu X. Misalkan matriks transformasinya adalah

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ sehingga,}$$

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(-x, y)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks

$$-x = ax + by \Leftrightarrow a = -1 \text{ dan } b = 0$$

$$y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0 \text{ dan } d = 1$$

Dapat disimpulkan matriks pencerminan terhadap sumbu X adalah

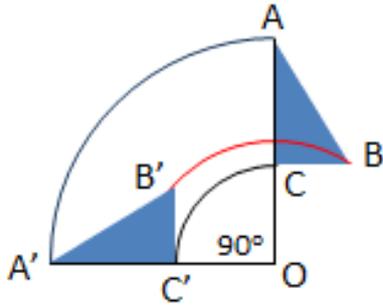
**Refleksi
sumbu Y**

Ayo Kita Menalar

Setelah kamu menyelesaikan masalah 3.3 - 3.5, dengan langkah yang sama carilah rumus matriks refleksi terhadap

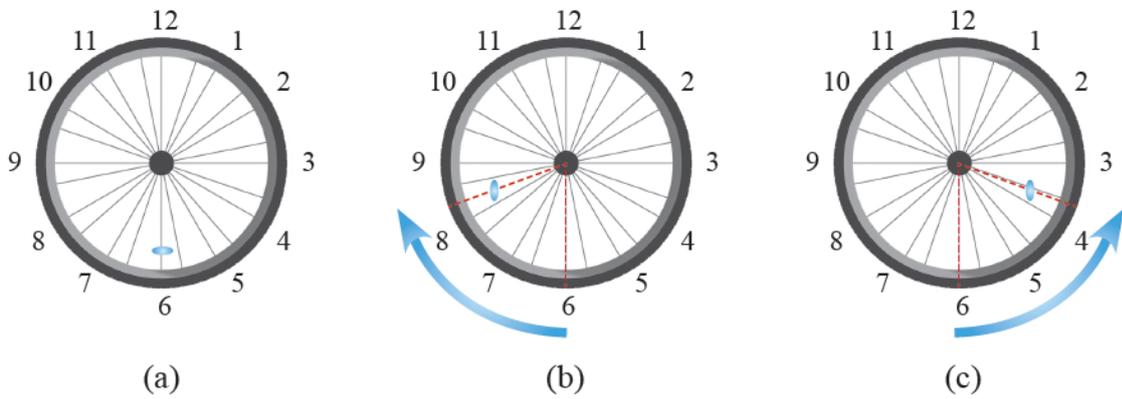
- Garis $y = x$
- Garis $y = -x$
- Garis $x = a$
- Garis $y = b$

ROTASI



Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut pusat rotasi. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan sudut rotasi

Ayo Kita Amati



Sumber: Dokumen Kemendikbud
Gambar 3.3.2 Perputaran Roda

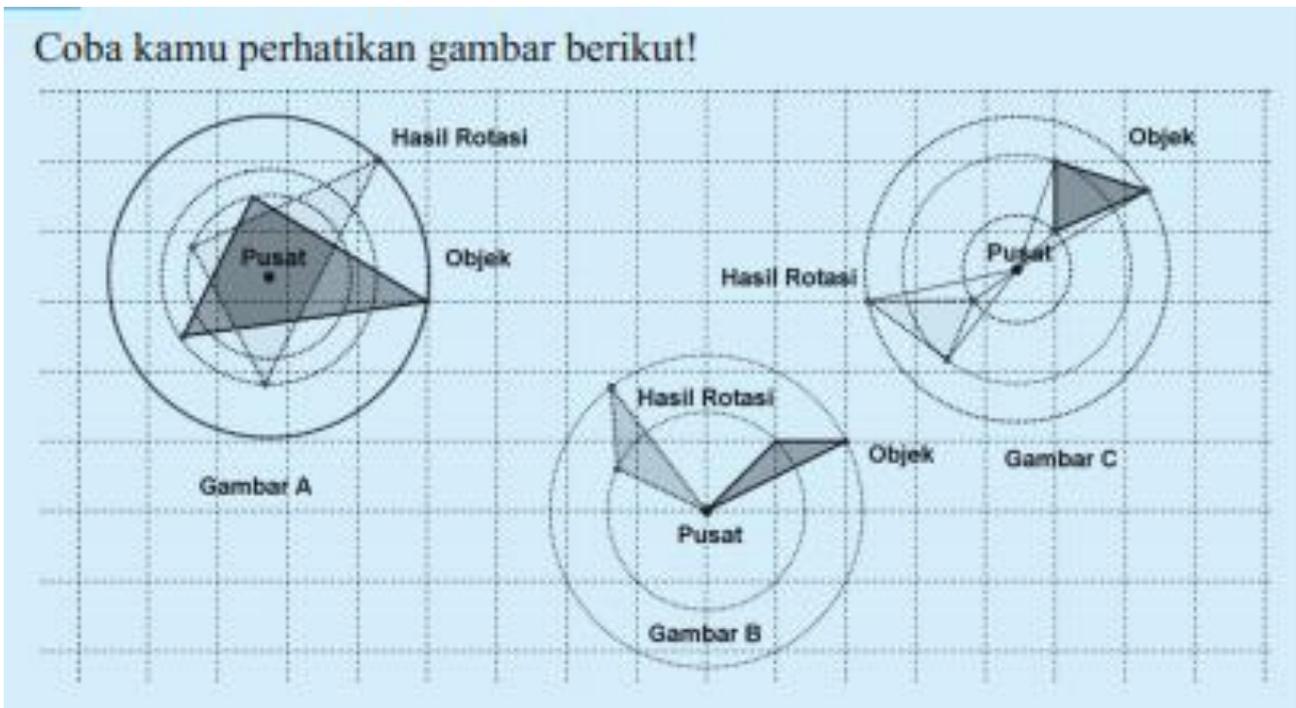
Coba perhatikan roda yang berputar pada *Gambar 3.3* di atas. Roda tersebut dapat diputar searah jarum jam seperti yang terlihat pada *Gambar 3.3 (b)* atau dapat diputar berlawanan arah jarum jam seperti yang terlihat pada *Gambar 3.3 (c)*. Gerakan putaran roda merupakan salah satu contoh dari rotasi. Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut pusat rotasi. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan sudut rotasi.

Sekarang kita akan membahas rotasi obyek tersebut dengan pendekatan koordinat.

Masalah 3.6

Perhatikan gambar berikut ini

Coba kamu perhatikan gambar berikut!



Sumber : buku paket siswa
 Gambar 3.3.3 rotasi obyek dengan pusat rotasi berbeda

Diskusikan

Diskusikan tentang perputaran setiap obyek tersebut

- a. Bagaimanakah hasil putaran pada gambar A?
- b. Bagaimanakah hasil putaran pada gambar B?
- c. Bagaimanakah hasil putaran pada gambar C?

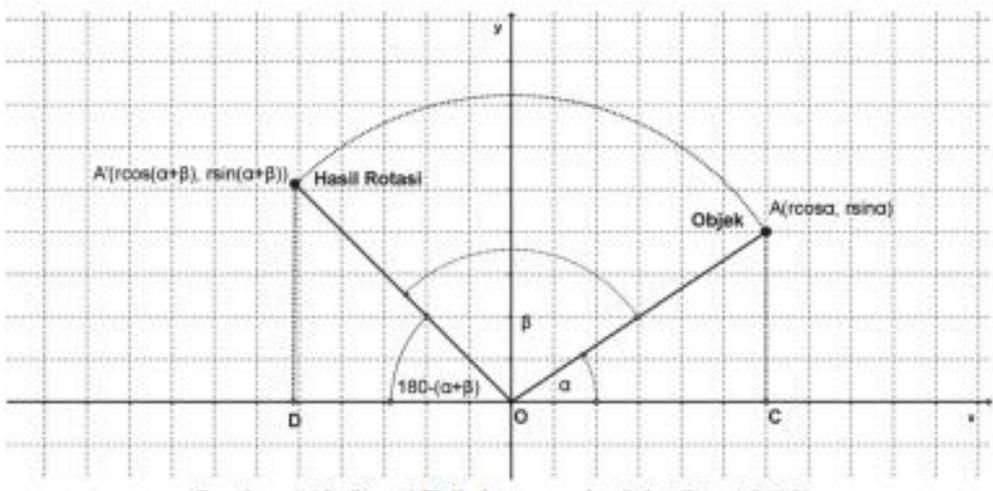
Apa yang dapat kalian simpulkan?

Sifat Rotasi



Konsep Rotasi

Perhatikan gambar ini



sumber : buku paket siswa

pada segitiga OAC diputar sebesar sudut β dan pusat $O(0,0)$ sehingga posisi obyek berada di A' . Misalkan matriks rotasi adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{\text{Rotasi}} A'(x', y')$$

$$A(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \xrightarrow{\text{Rotasi}} A'(r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta))$$

$$\begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \beta) \\ r \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar \cos \alpha + br \sin \alpha \\ cr \cos \alpha + dr \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ c \cos \alpha + d \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks, maka

$$a = \cos \beta, b = -\sin \beta$$

$$c = \sin \beta, d = \cos \beta$$

Dapat disimpulkan matriks rotasi dengan pusat $(0,0)$ adalah



Diskusikan

Bagaimana jika pusat rotasi dititik $P(p,q)$?

Latihan Soal

1. Tentukan matriks yang besesuaian dengan rotasi terhadap banyangan dari garis $3y+2x = 4$ setelah dirotasikan terhadap :
 - a. Pusat $(0,0)$ sebesar 90° berlawanan arah putaran jarum jam.
 - b. Tentukan bayangan dari titik $M(2,0)$ yang dirotasi terhadap Pusat $(-3, 1)$ sebesar 90° berlawanan arah jarum jam.