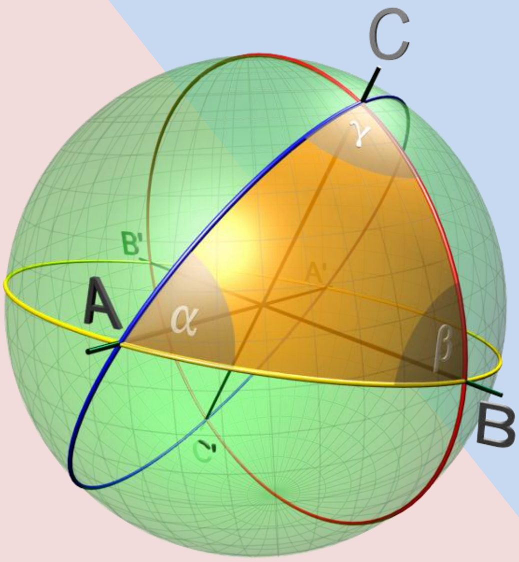
Bahan Ajar

Trigonometri 2

Matematika Peminatan SMA/MA

Kelas XI



Oleh:

Anang Wibowo, S.Pd

Mahasiswa PPG Dalam Jabatan 2020 Angkatan 1

LPTK Universitas PGRI Madiun (UNIPMA)

Bahan Ajar

Trigonometri Analitik

Sekolah	: SMA N 1 PONOROGO
Mata Pelajaran	: Matematika Peminatan
Kelas/Semester	: XI/Ganjil

A. Kompetensi Inti (KI)

KI-3 : Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

B. Kompetensi Dasar dan Indikator

3.1 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan kosinus.

Indikator:

- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih dua sudut.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus sudut ganda dan sudut setengah.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian trigonometri.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih trigonometri.

C. Petunjuk Penggunaan

Pelajari dan pahami materi dengan cermat, terutama pada proses penurunan rumus, kemudian proses bagaimana menyenyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut. Perbanyaklah latihan soal, kita bisa karena terbiasa.

"Witing Iso Jalaran Soko Kulino"

(https://s.id/matikzone)

D. Deskripsi

Pada kesempatan ini kita akan mempelajari materi tentang rumus-rumus trigonometri analitik yang terdiri dari rumus jumlah dan selisih dua sudut, rumus sudut rangkap dan tengahan, rumus perkalian trigonometri dan rumus jumlah dan selisih trigonometri. Materi ini adalah lanjutan dari materi trigonometri yang pernah kalian pelajari di kelas X. Agar lancar dan tidak kesulitan dalam mempelajarinya, maka kalian harus sudah memahami dengan baik materi trigonometri yang pernah kalian pelajari di kelas X. Jika dirasa perlu, silakan buka kembali materi tersebut.

E. Materi Pelajaran

Materi Pendukung

Materi pendukung adalah materi trigonometri yang pernah kalian dipelajari di kelas X yang akan kita gunakan sebagai pijakan dalam mempelajari dan menemukan rumus-rumus jumlah dan selisih sudut, diantaranya adalah sebagai berikut:

- Nilai perbandingan sudut-sudut istimewa
- Sudut berelasi
- Grafik fungsi trigonometri

Berikut beberapa links untuk mengingat kembali materi yang pernah kalian pelajari di kelas X. Banyak-banyaklah membaca dan berlatih soal, InsyaAlloh bisa.

- https://www.slideshare.net/pramithasari27/bahan-ajar-trigonometri
- https://www.academia.edu/11995956/Modul_Matematika_Kelas_X_Trigonometri
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLOBaZOkdgOIqoES54zX5U5rtW7CQxSaxE
- https://geogebra.org/m/rqumnu9q
- https://s.id/relasi

Materi Utama

- **Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut**

Dulu di kelas X kalian sudah mempelajari nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran I. Dengan rumus sudut berelasi ataupun bantuan grafik, juga sudah bisa menentukan nilai trigonometri sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV.

Ada pertanyaan, apakah ada sudut-sudut lainnya selain sudut-sudut istimewa 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, dan 90^0 yang bisa kita cari nilai trigonomertinya tanpa menggunakan alat bantu semisal tabel trigonometri dan kalkulator? Bisakah kita menentukan nilai trigonometri untuk sudut 15^0, 22.5^0, dan yang lainnya?

Pada materi ini kita akan mempelajari bagaimana menemukan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut kemudian menggunakan rumus tersebut dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan jumlah dan selisih dua sudut.

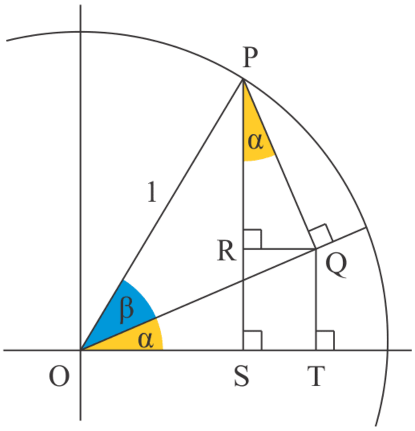
Penguasaan materi perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku dan perbandingan trigonometri sudut berelasi akan sangat membantu dalam mempelajari materi ini.

Berikut beberapa sudut relasi yang digunakan :
sin (90° - θ) = cos θ
cos (90° - θ) = sin θ
sin (180° - θ) = cos θ
cos (180° - θ) = - sin θ
sin (-θ) = - sin θ
cos (-θ) = cos θ

sin (α + β) dan sin (α - β)

Diberikan sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Titik P terletak pada lingkaran sehingga OP = 1.
$\angle POS$ = α + β
$\angle QOT$ = $\angle OQR$ = $\angle QPR$ = α

Untuk lebih detailnya, perhatikan diagram berikut



Dari segitiga OPS diperoleh

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{PS}{1}=PS$$

PS = RS + PR dan RS = QT, dapat kita tulis
PS = QT + PR, akibatnya
sin (α + β) = QT + PR ....(1)

Dari segitiga OPQ diperoleh
PQ = sin β
OQ = cos β

Dari segitiga OQT dipeoleh

$$\sin\alpha = \frac{QT}{OQ}$$

QT = sin α . OQ

QT = sin α . cos β ....(2)

Dari segitiga PQR diperoleh

$$\cos\alpha = \frac{PR}{PQ}$$

PR = cos α . PQ

PR = cos α . sin β ....(3)

Dari (1), (2) dan (3) kita dapatkan

sin (α + β) = QT + PR

= sin α cos β + cos α sin β

Jika β diganti dengan -β, maka

sin (α + (-β)) = sin α cos (-β) + cos α sin (-β)

= sin α cos β + cos α (-sin β)

= sin α cos β - cos α sin β

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi sinus sebagai berikut :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

cos (α + β) dan cos (α - β)

Rumus cos (α + β) dan cos (α - β) dapat kita tentukan dengan cara yang hampir sama seperti rumus sinus diatas. Namun, karena rumus sinus sudah kita peroleh, akan lebih mudah jika kita gunakan konsep sudut relasi kuadran I.

cos (α + β) = sin (90° - (α + β))

= sin ((90° - α) - β)

= sin (90° - α) cos β - cos (90° - α) sin β

= cos α cos β - sin α sin β

Jika β diganti dengan -β, maka

cos (α + (-β)) = cos α cos (-β) - sin α sin (-β)

= cos α cos β - sin α (-sin β)

= cos α cos β + sin α sin β

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi cosinus sebagai berikut

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

tan (α + β) dan tan (α - β)

Berdasarkan identitas rasio $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, akibatnya

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

Jika β diganti dengan -β, maka

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+(-\beta)) &= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)} \\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

Dari uraian diatas, kita peroleh rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk fungsi tangen sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.

Penjabaran Sinus | Penjabaran Cosinus | Penjabaran Tangen | Soal-soal

Contoh Soal

1. Tentukan nilai eksak dari sin 75°

   Jawab :

   $$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(30° + 45°)\\ &= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}\\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

2. Tentukan nilai eksak dari cos 105°

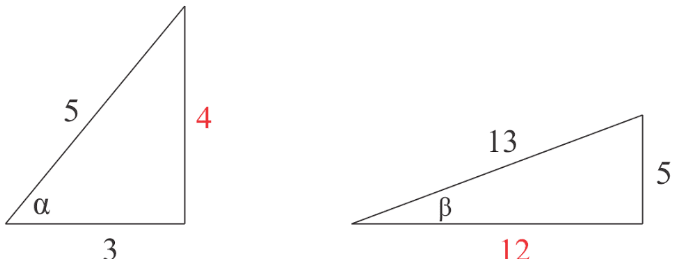
   Jawab :

   $$\begin{aligned}\cos 105° &= \cos(60° + 45°)\\ &= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}\\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

3. Diketahui $\mathbf{\cos\alpha} = \frac{3}{5}$ dan $\mathbf{\sin\beta} = \frac{5}{13}$. Jika α adalah sudut lancip dan β sudut tumpul, tentukan nilai dari **sin (α - β)** !

   Jawab :

   α lancip berarti α berada di kuadran I dan β tumpul berarti β berada di kuadran II.



$\mathbf{\cos\alpha} = \frac{3}{5} \;\rightarrow\; \mathbf{\sin\alpha} = \frac{4}{5}$

sin α bernilai positif karena α berada di kuadran I.

$\mathbf{\sin\beta} = \frac{5}{13} \;\rightarrow\; \mathbf{\cos\beta} = -\frac{12}{13}$

cos β bernilai negatif karena β berada di kuadran II.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\\ &= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65}\\ &= -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

4. Segitiga PQR siku-siku di P. Jika **cos (P + Q) =** $\frac{2}{3}$, tentukan nilai **sin Q + cos R** !

   Jawab :

   Karena sudut P siku-siku, maka P = 90°

$$\begin{aligned}\cos(P + Q) &= \frac{2}{3}\\ \cos(90^\circ + Q) &= \frac{2}{3}\\ \cos 90^\circ\cos Q - \sin 90^\circ\sin Q &= \frac{2}{3}\\ 0\cdot\cos Q - 1\cdot\sin Q &= \frac{2}{3}\\ 0 - \sin Q &= \frac{2}{3}\\ \sin Q &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

   P + Q + R = 180°
   90° + Q + R = 180°
   R = 90° - Q

   cos R = cos (90° - Q) = sin Q

   diperoleh cos R = sin Q = $-\frac{2}{3}$

   Jadi, sin Q + cos R = $-\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

5. Diketahui **A - B = 30°** dengan sudut A dan B lancip. Jika **sin A cos B =** $\frac{7}{10}$, tentukan nilai **sin (A + B)** !

   Jawab :

Karena A - B = 30°, maka sin (A - B) = sin 30° = $\frac{1}{2}$

sin (A - B) = sin A cos B - cos A sin B

$\frac{1}{2} = \frac{7}{10}$ - cos A sin B

cos A sin B = $\frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B

$= \frac{7}{10} + \frac{1}{5}$

$= \frac{9}{10}$

Jadi, sin (A + B) = $\frac{9}{10}$

• Rumus Sudut Ganda dan Sudut Setengah

Sudut ganda atau sudut rangkap dua biasa dinyatakan dalam sudut 2α. Perbandingan trigonometri untuk sudut ganda, yaitu **sin 2α**, **cos 2α** dan **tan 2α** dapat kita nyatakan dalam perbandingan trigonometri sudut tunggalnya, yaitu sudut α. Ekspresi trigonometri yang melibatkan sudut 2α dan sudut α inilah yang nantinya kita sebut dengan rumus trigonometri sudut ganda.

Rumus sudut ganda dapat dengan mudah kita turunkan dari rumus jumlah dan selisih dua sudut, dalam hal ini sin (α + β), cos (α + β) dan tan (α + β).

Penurunan Rumus Sinus Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus sin (α + β).

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Jika α = β, maka rumus diatas menjadi sin (α + α) = sin α cos α + cos α sin α

Karena α + α = 2α dan sin α cos α = cos α sin α, maka persamaan diatas menjadi

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Penurunan Rumus Cosinus Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus cos (α + β).

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Jika α = β, maka rumus diatas menjadi cos (α + α) = cos α cos α - sin α sin α, atau dapat kita tulis

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Jika kita substitusikan $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Jika kita substitusikan $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ pada persamaan diatas kemudian kita sederhanakan, maka akan diperoleh

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Penurunan Rumus Tangen Sudut Ganda

Coba perhatikan kembali rumus $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

Jika α = β, maka rumus diatas menjadi $\tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha}$

atau dapat kita tulis

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Rumus trigonometri sudut ganda akan sangat berguna dalam menyederhanakan ekspresi-ekspresi trigonometri nantinya, khususnya pada pokok bahasan yang melibatkan fungsi trigonometri seperti limit, turunan, integral dan persamaan trigonometri.

Untuk sudut setengah atau tengahan, kita bisa menurunkannya dari rumus sudut ganda cosinus, yaitu sebagai berikut:

Penurunan Rumus Sinus Sudut Setengah

Coba perhatikan kembali rumus cos 2α.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Jika kita mengubah bentuk menjadi sin α, kita dapatkan

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \sin \alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

Jika $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ maka

$$\boxed{\sin \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}$$

Penurunan Rumus Cosinus Sudut Setengah

Coba perhatikan kembali rumus cos 2α.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Jika kita mengubah bentuk menjadi cos α, kita dapatkan

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Jika $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ maka

$$\boxed{\cos \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}}$$

Penurunan Rumus Tangen Sudut Setengah

Karena $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ dan $\tan \frac{1}{2}\theta = \dfrac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta}$ maka

$$\tan\frac{1}{2}\theta = \pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \quad \text{atau} \quad \tan\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

Jika masing-masing pembilang dan penyebut dalam akar kita kalikan dengan $1-\cos\theta$ akan kita dapatkan $\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ dan

Jika masing-masing pembilang dan penyebut dalam akar kita kalikan dengan $1+\cos\theta$ akan kita dapatkan $\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ dan

Berikut contoh-contoh soal yang dapat kita jadikan latihan dalam menggunakan dan memanipulasi rumus-rumus sudut ganda menjadi bentuk-bentuk lain yang masih tetap ekuivalen.

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.

Sudut Ganda | Soal-soal | Sudut Tengahan | Soal-soal

Contoh Soal

1. Tentukan nilai dari sin 2α, cos 2α dan tan 2α jika diketahui sin α = $\frac{3}{5}$, dengan α lancip!

   Jawab :

   Diketahui sin α = $\frac{3}{5}$. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku akan diperoleh cos α = $\frac{4}{5}$ dan tan α = $\frac{3}{4}$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

2. Diketahui sin α = p dan cos β = q.

   Nyatakan $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$ dalam p dan q.

   Jawab :

   $$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \frac{1}{2}\left(\left(1-2\sin^2\alpha\right) + \left(2\cos^2\beta - 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha\right) = q^2 - p^2$$

3. Diketahui segitiga sama kaki ABC dengan ∠A = ∠B = α dan ∠C = θ. Jika cos α = $\frac{4}{5}$, maka tan θ = ...

   Jawab :

   Diketahui cos α = $\frac{4}{5}$. Dengan menggunakan perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku akan diperoleh tan α = $\frac{3}{4}$.

   ∠A + ∠B + ∠C = 180°
   α + α + θ = 180°
   ⇒ θ = 180° - 2α

   tan θ = tan (180° - 2α)
   = -tan 2α

   $$= -\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

   $$= -\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = -\frac{\frac{24}{16}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}$$

4. Gunakan rumus sinus sudut ganda untuk menyederhanakan bentuk-bentuk berikut!

(a) $8\sin 3x \cos 3x$ (b) $\cos 5x \sin 5x$ (c) $(\sin 4x - \cos 4x)^2 = 1 - \sin 8x$

Jawab :

a) $8\sin 3x \cos 3x = 4 \,.\, 2\sin 3x \cos 3x$

$= 4 \,.\, \sin 2(3x)$

$= 4\sin 6x$

b) $\cos 5x \sin 5x = \frac{1}{2} \,.\, 2\sin 5x \cos 5x$

$= \frac{1}{2} \,.\, \sin 2(5x)$

$= \frac{1}{2} \sin 10x$

c) $(\sin 4x - \cos 4x)^2 = (\sin 4x - \cos 4x)(\sin 4x - \cos 4x)$

$= \sin^2 4x + \cos^2 4x - 2\sin 4x \cos 4x$

$= 1 - \sin 2(4x)$

$= 1 - \sin 8x$

5. Tunjukkan bahwa: $1 - \cos nx = 2 \sin^2 \left(\frac{nx}{2}\right)$, n konstan.

Jawab :

$1 - \cos nx = 1 - \cos 2\left(\frac{nx}{2}\right)$

Misalkan $\left(\frac{nx}{2}\right) = \alpha$, sehingga persamaan diatas menjadi

$1 - \cos nx = 1 - \cos 2\alpha$

$= 1 - (1 - 2\sin^2\alpha)$

$= 1 - 1 + 2\sin^2\alpha$

$= 2\sin^2\alpha$

Substitusikan kembali $\alpha = \left(\frac{nx}{2}\right)$ sehingga diperoleh

$1 - \cos nx = 2\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$

6. Untuk $0 < x < 2\pi$, tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

Jawab :

$$
\begin{aligned}
\cos 2x - 3\sin x + 1 &= 0 \\
(1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 1 &= 0 \\
-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 &= 0 \\
2\sin^2 x + 3\sin x - 2 &= 0 \\
(\sin x + 2)(2\sin x - 1) &= 0 \\
\sin x = -2 \quad \text{atau} \quad \sin x &= 1/2
\end{aligned}
$$

$\sin x = -2 \ \rightarrow$ tidak mempunyai solusi
$\sin x = 1/2 \ \rightarrow \ x = \{30°, 150°\}$

Jadi, HP = $\{\pi/6, 5\pi/6\}$

- **Rumus Perkalian Trigonometri**

Dengan menjumlahkan atau mengurangkan rumus-rumus pada bagian pertama, kita akan mendapatkan rumus-rumus baru yaitu

$$
\begin{array}{rl}
\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \\
\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & + \\
\hline
\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta &
\end{array}
$$

$$\boxed{2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} \ .$$

$$
\begin{array}{rl}
\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \\
\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & - \\
\hline
\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta &
\end{array}
$$

$$\boxed{-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)} \ .$$

$$
\begin{array}{rl}
\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \\
\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & + \\
\hline
\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta &
\end{array}
$$

$$\boxed{2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)} \ .$$

$$
\begin{array}{rl}
\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \\
\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & - \\
\hline
\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta &
\end{array}
$$

$$\boxed{2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} \ .$$

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.

Perkalian Sudut | Soal-soal | Soal-soal

Contoh Soal

1. Hitunglah nilai dari $\sin 105^0 \cos 75^0$.

   Jawab:

$$\begin{aligned}\sin 105^0 \cos 75^0 &= \frac{1}{2} \cdot 2\sin 105^0 \cos 75^0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(105+75)^0 + \sin(105-75)^0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 180^0 + \sin 30^0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2. Nilai eksak dari $\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0$ adalah…

   Jawab:

$$\begin{aligned}\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 &= \left(\frac{1}{2}.2\cos 20^0 \cos 40^0\right)\cos 80^0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(\cos 60^0 + \cos 20^0\right)\right)\cos 80^0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 20^0\right)\right)\cos 80^0\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 20^0\right)\cos 80^0$$
$$= \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{2}\cos 20^0 \cos 80^0$$
$$= \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{4} 2\cos 20^0 \cos 80^0$$
$$= \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{4}\left(\cos 100^0 + \cos 60^0\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{4}\left(-\cos 80^0 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos 80^0 - \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{8}$$

• Rumus Jumlah dan Selisih Trigonometri

Dari rumus perkalian dia atas, kita bisa menurunkan rumus baru yaitu rumus jumlah dan selisih trigonometri. Caranya adalah dengan membuat suatu pemisalan, yaitu

Misalkan $\alpha + \beta = P$ dan $\alpha - \beta = Q$ maka

$$\begin{array}{rl} \alpha + \beta = P & \\ \alpha - \beta = Q & \\ \hline 2\alpha = P + Q & + \\ \alpha = \frac{1}{2}(P+Q) & \end{array} \quad \text{dan} \quad \begin{array}{rl} \alpha + \beta = P & \\ \alpha - \beta = Q & \\ \hline 2\beta = P - Q & - \\ \beta = \frac{1}{2}(P-Q) & \end{array}$$

Dengan mensubitusinya ke persamaan sebelumnya, diperoleh:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$
$$\Rightarrow \quad \cos\frac{1}{2}(P+Q)\cos\frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2}\cos P + \frac{1}{2}\cos Q$$
$$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{1}{2}(P+Q)\cos\frac{1}{2}(P-Q) = \cos P + \cos Q$$

$$\boxed{\cos P + \cos Q = 2\cos\frac{1}{2}(P+Q)\cos\frac{1}{2}(P-Q)\ .}$$

$$-\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad -\sin\frac{1}{2}(P+Q)\sin\frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2}\cos P - \frac{1}{2}\cos Q$$

$$\Rightarrow \quad -2\sin\frac{1}{2}(P+Q)\sin\frac{1}{2}(P-Q) = \cos P - \cos Q$$

$$\cos P - \cos Q = -2\sin\frac{1}{2}(P+Q)\sin\frac{1}{2}(P-Q)\ .$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{1}{2}(P+Q)\cos\frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2}\sin P + \frac{1}{2}\sin Q$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{1}{2}(P+Q)\cos\frac{1}{2}(P-Q) = \sin P + \sin Q$$

$$\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{1}{2}(P+Q)\cos\frac{1}{2}(P-Q)\ .$$

$$\cos\alpha\ \sin\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{1}{2}(P+Q)\sin\frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2}\sin P - \frac{1}{2}\sin Q$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{1}{2}(P+Q)\sin\frac{1}{2}(P-Q) = \sin P - \sin Q$$

$$\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{1}{2}(P+Q)\sin\frac{1}{2}(P-Q)\ .$$

Untuk rumus jumlah dan selisih dari tangent jarang dibahas mengingat bentuk rumusnya yang sedikit komplek. Berikut penjabaran rumus yang dimaksud,

$$\tan(\alpha+\beta) + \tan(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} + \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)(1 + \tan\alpha\tan\beta) + (\tan\alpha - \tan\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)}{(1 - \tan\alpha\tan\beta)(1 + \tan\alpha\tan\beta)}$$

$$= \frac{2\tan\alpha + 2\tan\alpha\tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta}$$

$$= \frac{2\tan\alpha(1 + \tan^2\beta)}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta}$$

Atau $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{2\tan\alpha\left(1+\tan^2\beta\right)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$

Setelah disubtitusi diperoleh

$$\tan P+\tan Q=\frac{2\tan\frac{1}{2}(P+Q)\left(1+\tan^2\frac{1}{2}(P-Q)\right)}{1-\tan^2\frac{1}{2}(P+Q)\tan^2\frac{1}{2}(P-Q)}$$

dengan cara yang sana akan diperoleh bentuk pengurangan tan, yaitu

$\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{2\tan\beta\left(1+\tan^2\alpha\right)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$

Setelah disubtitusi diperoleh

$$\tan P-\tan Q=\frac{2\tan\frac{1}{2}(P-Q)\left(1+\tan^2\frac{1}{2}(P+Q)\right)}{1-\tan^2\frac{1}{2}(P+Q)\tan^2\frac{1}{2}(P-Q)}$$

Pendalaman Materi

Berikut link youtube yang bisa kalian buka untuk memperdalam pengetahuan kalian tentang materi di atas, scan atau klik QR Code-nya.

Rumus Jumlah Selisih

Soal-soal

Contoh Soal

1. $\sin 105^0 - \sin 15^0 = \ldots$

   Jawab:

$$
\begin{aligned}
\sin 105^0 - \sin 15^0 &= 2\cos\left(\frac{105+15}{2}\right)^0 \sin\left(\frac{105+15}{2}\right)^0 \\
&= 2\cos 60^0 \sin 45^0 \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

2. Buktikan bahwa $\dfrac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A} = \tan 2A$

   Jawab:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A} &= \frac{\sin 3A+\sin A}{\cos 3A+\cos A} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{3A+A}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-A}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3A+A}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-A}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sin 2A\cos A}{2\cos 2A\cos A} \\
&= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} \\
&= \tan 2A \qquad (\textit{terbukti})
\end{aligned}
$$

F. Latihan Soal

Berikut soal-soal yang bisa kalian coba untuk melihat sejauh mana kalian menguasai materi ini. Sering-seringlah latihan soal, jika kurang silakan mengambil dari berbagai sumber lainnya baik yang cetak maupun digital dan online. Ingat, tidak ada ceritanya orang merugi karena banyak latihan… Selamat mencoba…

- **Pilihlah jawaban yang benar.**

1. Nilai tan 105^0 adalah…

   a. $-2-2\sqrt{3}$ d. $-2+2\sqrt{3}$

   b. $-2-\sqrt{3}$ e. $2+2\sqrt{3}$

   c $-2+\sqrt{3}$

2. Diketahui $0^0 \le x \le 90^0$ dan $\tan x = \frac{4}{3}$, nilai $\sin(30^0 - x)$ adalah…

a. $\frac{1}{10}(4\sqrt{3}-3)$
b. $\frac{1}{10}(4\sqrt{3}+3)$
c $\frac{1}{10}(3-4\sqrt{3})$
d. $\frac{1}{10}(3-2\sqrt{3})$
e. $\frac{1}{10}(2\sqrt{3}+3)$

3. Bentuk sederhana dari $\sin\alpha - \sin(\alpha - 120^0) - \sin(\alpha - 240^0)$ adalah …

a. $\sin\alpha$
b. $\cos\alpha$
c $\sin 2\alpha$
d. $2\sin\alpha$
e. $2\cos\alpha$

4. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, *x* sudut tumpul dan *y* sudut lancip. Nilai $\tan(x + y) = \ldots$

a. $-\frac{56}{33}$
b. $-\frac{16}{63}$
c $\frac{8}{63}$
d. $\frac{16}{63}$
e. $\frac{56}{33}$

5. Jika $\tan A = \frac{4}{3}$ dan $\tan B = 7$, hasil $A + B$ adalah …

a. 45^0
b. 135^0
c 150^0
d. 225^0
e. 330^0

6. Nilai dari 8 sin 15^0 cos 15^0 adalah …

a. $4\sqrt{3}$
b. 4
c 2
d. $2\sqrt{3}$
e. 1

7. Diketahui $1 - \tan A \sin 2A = -\frac{5}{13}$, nilai $\cos 4A = \ldots$

a. $-\frac{219}{169}$
b. $-\frac{119}{169}$
c $\frac{119}{169}$
d. $\frac{139}{169}$
e. $\frac{219}{169}$

8. $4 \sin x \cos 3x = \ldots$

a. $2 \sin 2x + 2 \sin 4x$

b. $2 \sin 4x - 2 \sin 2x$

c $\sin 4x - \sin 2x$

d. $\sin 4x + \sin 2x$

e. $\sin 4x + 2 \sin 2x$

9. $\cos^2 3x \sin 3x = \ldots$

a. $\frac{1}{4}(\cos 9x + \cos 3x)$

b. $\frac{1}{2}(\cos 9x + \cos 3x)$

c $\frac{1}{2}(\sin 9x + \sin 3x)$

d. $\frac{1}{4}(\sin 9x + \sin 3x)$

e. $\frac{1}{4}(\sin 6x + \sin 3x)$

10. Jika A+B+C = π, maka 4 sin A sin B sin C = …

a. sin 2A + sin 2B + sin 2C

b. cos 2A + cos 2B + cos 2C

c cos A + cos B + cos C

d. sin 2A - sin 2B - sin 2C

e. cos A - cos B - cos C

11. Nilai eksak dari tan 5^0 .tan 25^0 .tan 45^0 .tan 65^0 .tan 85^0 adalah …

a. - 1

b. - ½

c 0

d. ½

e. 1

12. Nilai dari $\dfrac{\cos 20^0 - \cos 70^0}{\sin 70^0 - \sin 20^0}$ adalah …

a. 2

b. 1

c 0

d. ½

e. ½ √2

13. sin 51^0 + cos 81^0 = …

a. sin 30^0

b. cos 30^0

c cos 21^0

d. sin 21^0

e. sin 31^0

14. Nilai dari sin 50^0 - sin 70^0 + sin 10^0 = …

a. - 1

b. 0

c 1

d. 2

e. 3

15. $\dfrac{1 + \sin 2A - \cos 2A}{1 + \sin 2A + \cos 2A} = \ldots$

a. cotan 2A

b. tan 2A

c 1

d. tan A

e. cotan A

- **Jawablah dengan benar.**

1. Sederhanakan bentuk cos $(100^0 + x)$ cos $(10^0 - x)$ + sin $(100^0 + x)$ sin $(10^0 - x)$.
2. Jika sin A = 3/5, dengan A sudut lancip, hitunglah nilai tan 2A.
3. Cos $\pi/8$ = …
4. Buktikan bahwa $\tan x + \tan y = \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$

- **Latihan soal Quizizz**

Untuk memperbanyak latihan, silakan scan atau klik gambar QR-Code berikut ini untuk mencoba kuis soal-soal trigonometri.

Quis Jumlah Selisih 2 Sudut

Quis Sudut Rangkap

Quis Perkalian Sudut

Quis JUmlah Selisih

G. Penutup

Selamat, kalian telah sampai pada penghujung materi ini dan telah menyelesaikan KD 3.2 tentang rumus jumlah dan selisih sudut. Sekali lagi perbanyak latihan, kita bisa karena terbiasa, maka biasakanlah…

G. Daftar Pustaka

- Sukino, *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Peminatan*, Penerbit Erlangga, 2017.
- Aksin, Nur dkk. *Matematika untuk SMA/MA Peminatan kelas XI (LKS PR)*, Intan Pariwara, 2020.
- https://smatika.blogspot.com/2017/08/rumus-trigonometri-jumlah-dan-selisih.html
- https://smatika.blogspot.com/2017/12/rumus-trigonometri-sudut-ganda.html
- https://edumatik.net/rumus-jumlah-dan-selisih-dua-sudut-trigonometri/
- https://matikzone.wordpress.com
- https://quizizz.com

Lampiran

Rubrik Penilaian
Kunci Jawaban Soal Pilihan Ganda

1. B	6. C	11. E
2. C	7. B	12. B
3. D	8. A	13. C
4. E	9. D	14. B
5. B	10. A	15. D

Jawaban Soal Uraian

1. $\cos(100^0 + x)\cos(10^0 - x) + \sin(100^0 + x)\sin(10^0 - x)$
   $= \cos[(100^0 + x) - (10^0 - x)]$
   $= \cos(90^0 + 2x)$
   $= -\sin 2x$

2. Diketahui sin A = 3/5. Dengan bantuan segitiga siku-siku diperoleh tan A = 3/4, sehingga..

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

3. Cos π/8 = …

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

4. $$\tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y} + \frac{\sin y\cos x}{\cos y\cos x}$$
$$= \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y}$$
$$= \frac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))}$$
$$= \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} \qquad \textit{terbukti}$$

PG	= Soal Pilihan Ganda yang Benar (bobot 4 persoal)
U	= Soal Uraian yang Benar (bobot 10 persoal)
NA	= Nilai Akhir
	= 4PG + 10U