

RENCANA PEMBELAJARAN

TURUNAN KELAS XII SMK

RINY KURNIATY

rinikurniaty10@gmail.com

SMK NEGERI 49 JAKARTA
6 JANUARI 2021

Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP)

Satuan Pendidikan : SMK NEGERI 49 JAKARTA

Mata Pelajaran : MATEMATIKA

Kelas/ Semester : XII / 5

Materi Pokok : TURUNAN FUNGSI

Alokasi Waktu : 2 x 45 menit

Pertemuan : 2

A. Kompetensi Inti (KI)

- **Spiritual :**
KI -1 : Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya

- **Sosial :**
KI – 2 : Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, snatu, peduli (gotong royong, kerjasama, toleran damai), bertanggung jawab, responsive, dan pro-aktif dalam berinteraksi secara efektif sesuai dengan perkembangan anak di lingkungan, keluarga, sekolah, masyarakat dan lingkungan alam sekitar, bangsa, Negara, kawasan regional, dan kawasan internasional

- **Pengetahuan :**
KI-3 : Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan recountal pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah

- **Keterampilan :**
KI-4 : Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.

B. Kompetensi Dasar (KD), Indikator Pencapaian Kompetensi

Kompetensi Dasar	Target Kompetensi	INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
3.31 Menentukan Turunan fungsi aljabar menggunakan definisi limit fungsi atau sifat sifat turunan fungsi serta penerapannya	1 Menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi limit fungsi atau sifat sifat turunan fungsi serta penerapannya	<p>IPK Pendukung</p> <p>3.31.1 Menjelaskan konsep turunan fungsi aljabar</p> <p>3.31.2 Memahami konsep turunan fungsi aljabar</p> <p>IPK Kunci</p> <p>3.31.3 Menentukan turunan fungsi aljabar dengan definisi limit fungsi</p> <p>3.31.4 Menentukan turunan aljabar dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi</p> <p>IPK Pengayaan</p> <p>3.31.5 Memecahkan masalah turunan fungsi aljabar</p>
4.31 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar	4.31 Memecahkan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar	<p>IPK Pendukung</p> <p>4.31.1 Mengidentifikasi masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar</p> <p>IPK Kunci</p> <p>4.31.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar (prosedural)</p>

		<p>IPK Pengayaan</p> <p>4.31.3 memecahkan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar</p>
--	--	---

C. Tujuan Pembelajaran

Dengan kegiatan diskusi, pembelajaran kelompok dan latihan mandiri dalam pembelajaran limit fungsi aljabar ini diharapkan siswa terlibat aktif dalam kegiatan pembelajaran dan bertanggungjawab dalam menyampaikan pendapat, menjawab pertanyaan, memberi saran dan kritik, serta dapat

1. Mampu menentukan sifat-sifat turunan fungsi dengan baik.
2. Mampu menentukan turunan fungsi aljabar dengan sifat-sifat turunan fungsi dengan teliti.
3. Mampu menghitung turunan fungsi yang sederhana dengan menggunakan defunisi turunan dengan teliti.

D. Materi Pembelajaran

Selain menggunakan pendekatan definisi limit, turunan dapat pula dicari dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi sebagai berikut; Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada interval I , jika a bilangan real maka:

1. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$
4. $f(x) = a(u(x))^n \rightarrow f'(x) = an(u(x)^{n-1})u'(x)$

Sebagai contoh menggunakan prosedur sifata-sifat turunan perhatikan soal berikut,

Tentukan turunan dari

a. $f(x) = x^2 - 2x$

b. $f(x) = (2x^2 - 3x)^4$

a. untuk menjawab soal nomor a kita gunakan sifat

$$f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a \text{ dan } f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}, \text{ sehingga}$$

$$f(x) = x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$\text{Jadi turunan } f(x) = x^2 - 2x \text{ adalah } f'(x) = 2x - 2$$

b. untuk menjawab soal b gunakan sifat

$$f(x) = a(u(x))^n \rightarrow f'(x) = an(u(x)^{n-1})u'(x)$$

$$\text{Misalkan } u(x) = 2x^2 - 3x \rightarrow u'(x) = 4x - 3$$

$$\text{Maka } f(x) = (2x^2 - 3x)^4 \rightarrow f'(x) = 4(2x^2 - 3x)^3(4x - 3)$$

Jadi turunan dari $f(x) = (2x^2 - 3x)^4$ adalah

$$f'(x) = 4(2x^2 - 3x)^3(4x - 3)$$

Pada unit ini hanya diuraikan bahan materi sampai hal yang sifatnya prosedur, sedangkan aplikasi dari turunan yang lebih luas lagi akan diuraikan pada topik aplikasi turunan yaitu mengenai nilai ekstrim fungsi.

E. Pendekatan, Model dan Metode Pembelajaran

Pendekatan : Saintifik
Model pembelajaran : Discovery learning
Metode : Tanya jawab, diskusi dan penugasan

F. Media Pembelajaran

1. Media

- Worksheet atau lembar kerja (siswa)
- Geogebra
- Lembar Penilaian

2. Alat/Bahan

- Penggaris, spidol atau papan tulis
- Laptop dan infocus

3. Sumber Belajar

- Buku Penunjang Kurikulum 2013 Mata Pelajaran Matematika Kelas XI Kemendikbud Revisi Tahun 2017
- Matematika Kelas XII Kasmina Toali Penerbit Erlangga Tahun 2019
- Pengalaman peserta didik dan guru

G. Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan	Sintak Model Discovery Learning	Langkah-langkah	Waktu
Pendahuluan	a. Pengantar	Salam, berdoa, mengkondisikan kelas dan sekaligus mengecek kehadiran siswa	10 menit
	b. Apersepsi	<ul style="list-style-type: none">• Guru memberikan apersepsi tentang pemahaman konsep turunan fungsi aljabar dari konsep limit• Sebagai contoh :<ul style="list-style-type: none">◦ Pernahkah Anda memperhatikan laju motor pada speedometer ?	
	b. Motivasi	Guru menyampaikan tujuan pembelajaran yang harus dicapai oleh peserta didik	

		<p>Guru menyampaikan tujuan pembelajaran yang harus dicapai oleh peserta didik</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan,dan lain lain • Dalam dunia penerbangan,turunan mempunyai fungsi terpenting untuk lajunya pesawat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdetek pada navigasi,sehingg alaju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower 	
		Guru melakukan pembagian kelompok belajar berdasarkan posisi duduk	
Kegiatan inti	a. Pemberian stimulus	<p>Kegiatan Literasi</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪Guru mengajak peserta didik untuk membaca LKPD mengenai turunan fungsi ▪Peserta didik <i>mengamati</i> permasalahan yang terdapat pada LKPD, dan guru memotivasi siswa untuk terlibat aktif pada aktivitas pemecahan masalah ▪Peserta didik untuk bertanya atau memberikan pendapat terhadap hasil pengamatan soal yang diberikan 	75 menit
	b. Identifikasi Masalah(Menanya / questioning	<p>CRITICAL THINKING (BERPIKIR KRITIK)</p> <p>Guru menanyakan tentang turunan fungsi</p>	

		<ul style="list-style-type: none"> ▪ Meminta peserta didik untuk menuliskan hasil pengamatan soal dalam LKPD terkait dengan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dari soal dan kondisi penting apa yang menjadi kata kunci untuk menyelesaikan masalah pada soal tersebut ▪ Memfasilitasi peserta didik untuk bertanya atau memberikan pendapat terhadap strategi dalam mengerjakan LKPD
	c.Pengumpulan Data	<p>Kegiatan Literasi</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Menginstruksikan peserta didik untuk menggali informasi agar dapat menyelesaikan soal yang telah diidentifikasi sebelumnya, materi terkait soal, mencari tahu prosedur penyelesaian. ▪ Memfasilitasi peserta didik untuk berpendapat mengenai masalah yang diberikan pada LKPD, dan menuliskan hasil pengamatannya dalam LKPD <p>Peserta didik mengumpulkan informasi tentang turunan fungsi</p>
	d.Pengolahan Data	<p>COLLABORATION Guru menugaskan siswa untuk mengerjakan soal latihan yang berkaitan dengan materi yang dibahas serta mengawasi pengerjaannya secara berkelompok</p> <p>Peserta didik mengerjakan soal yang berkaitan dengan materi yang dibahas dan membandingkan hasilnya dengan pekerjaan temannya</p>
	e.Pembuktian / Mengomunikasikan (Communicating)	<p>COMMUNICATION DAN CRITICAL THINKING</p> <ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik memperlihatkan atau menyajikan hasil pekerjaannya dalam

		bentuk power point <ul style="list-style-type: none"> • Peserta didik mempresentasikan hasil diskusi kelompok • Mengemukakan pendapat atas presentasi yang dilakukan tentang materi konsep turunan fungsi • Bertanya atas presentasi materi konsep turunan fungsi dan peserta didik lain diberi kesempatan untuk menjawabnya 	
		COMMUNICATION Bersama-sama peserta didik menyimpulkan materi yang telah dipelajari	
3.Kegiatan Penutup	Umpan Balik	Guru memberikan tugas tentang turunan fungsi Guru mengingatkan materi yang akan dipelajari berikutnya dan berdoa	5 menit

H. Penilaian

a. Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

a. Program Remedial

- Remedial tes diberikan kepada siswa yang mendapatkan nilai dibawah 76 (untuk pengetahuan dan keterampilan), dengan catatan jumlah siswa yang remedialnya sebanyak maksimal 30% dari jumlah seluruh siswa di kelas
- Dan jika jumlah siswa yang remedial mencapai 50% maka diadakan remedial teaching terlebih dahulu, lalu dilanjutkan remedial tes

CONTOH PROGRAM REMEDI

Nama Sekolah :
 Semester :
 Mata Pelajaran :
 Ulangan Harian ke :
 Tanggal Ulangan Harian :
 Bentuk Ulangan Harian :
 Materi Ulangan harian :
 KD / Indikator :
 KKM :

NO	NAMA PESERTA DIIDK	NILAI ULANGAN	INDIKATOR YANG BELUM DIKUASAI	BENTUK TINDAKAN REMEDIAL	NILAI SETELAH REMEDIAL	KETERANGAN
1						
2						
3						
4						

b. Program Pengayaan

Guru memberikan nasihat agar tetap rendah hati, karena telah mencapai KKM (kriteria ketuntasan minimal). Program pengayaan diberikan/ditawarkan kepada siswa yang mendapatkan nilai diatas 76 sebagai bentuk pendalaman materi yang diberikan.

Guru memberikan soal pengayaan sebagai berikut :

- Membaca buku-buku atau sumber belajar lain tentang konsep turunan
- Mengerjakan soal konsep turunan dari sumber belajar yang lain
- Mengerjakan soal secara online tentang konsep turunan

CONTOH PROGRAM PENGAYAAN

Nama Sekolah :

Semester :

Mata Pelajaran :

Ulangan Harian ke :

Tanggal Ulangan Harian :

Bentuk Ulangan Harian :

Materi Ulangan harian :

KD / Indikator :

KKM :

NO	NAMA SISWA	NILAI ULANGAN	BENTUK PENGAYAAN
1			
2			
3			

Lampiran 1: Instrumen penilaian aspek kognitif

1. Tentukan turunan dari $f(x) = 3x^2$
2. Tentukan turunan dari $f(x) = 4x - 3$

No	Tahap	Jawaban	Skor
1	Memahami masalah	ditanya: $f'(x) = 3x^2$	1
	Merencanakan penyelesaian	Turunan tersebut dapat diselesaikan dengan cara menggunakan konsep limit	1
	Melaksanakan rencana penyelesaian	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h$ $= 6x + 3.0$ $= 6x$	2

No	Tahap	Jawaban	Skor
	Memeriksa kembali	Jadi turunan $f(x) = 3x^2 = 6x$	1
2	Memahami masalah	ditanya: $f'(x) = 4x - 3 = \dots$	1
	Merencanakan penyelesaian	Turunan tersebut dapat diselesaikan dengan cara menggunakan konsep limit	1
	Melaksanakan rencana penyelesaian	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4x + 4h - 3) - (4x - 3)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x + 4h - 3 - 4x + 3}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} 4$ $= 4$	2
	Memeriksa kembali	Jadi $f'(x) = 4x - 3 = 4$	1
Skor total			10

Nilai Akhir = Jumlah skor yang diperoleh siswa

LAMPIRAN II

LEMBAR KEGIATAN PESERTA DIDIK KELAS XII SEMESTER GANJIL

NAMA :
KELAS :
HARI/TANGGAL :
PERTEMUAN KE :
MATERI : **RUMUS TURUNAN FUNGSI ALJABAR**

TUJUAN LKPD

Dengan kegiatan diskusi, pembelajaran kelompok dan latihan mandiri dalam pembelajaran limit fungsi aljabar ini diharapkan siswa terlibat aktif dalam kegiatan pembelajaran dan bertanggungjawab dalam menyampaikan pendapat, menjawab pertanyaan, memberi saran dan kritik, serta dapat

1. Mampu menentukan sifat-sifat turunan fungsi.
2. Mampu menentukan turunan fungsi aljabar dengan sifat-sifat turunan fungsi
3. Mampu menghitung turunan fungsi yang sederhana dengan menggunakan defunisi turunan.

PETUNJUK Pengerjaan

1. Kerjakan LKPD secara berkelompok
2. Kerjakan LKPD secara sistematis
3. Periksa kembali jawaban kelompokmu dan bandingkan dengan jawaban kelompok lain
4. Jika terdapat perbedaan jawaban, buatlah kesepakatan untuk menentukan jawaban yang paling benar

RUMUS TURUNAN FUNGSI

I. KEGIATAN

Setelah mempelajari bahan ajar hal 6 – 12 isilah soal-soal berikut.

II. MATERI

1. Perhatikan contoh berikut ini

Contoh 1 : Tentukan turunan dari $f(x) = 4$

Pembahasan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contoh 2 : Tentukan turunan dari $y = 2x + 3$

Pembahasan

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h) + 3] - [2x + 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h + 3 - 2x - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

Contoh 3 : Tentukan turunan dari $y = 3x^2$

Pembahasan

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3x + 3h \\ &= 3x \end{aligned}$$

2. Berdasarkan kegiatan yang telah kamu lakukan, buatlah kesimpulan terkait prinsip atau konsep yang telah kamu temukan dari kasus tersebut

Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada interval I , a bilangan real dapat diturunkan maka:

1. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = \dots\dots\dots$

3. Perhatikan kembali contoh berikut

Contoh 4 : Carilah turunan dari $f(x) = (3x^2 + 12x + 2)^{10}$

Pembahasan

Cara 1 : menggunakan aturan rantai

Misalkan $u = 3x^2 + 12x + 2$, sehingga $u' = 6x + 12$ dan $f(x) = \{u(x)\}^{10}$ sehingga turunannya menjadi

$$f'(x) = 10 \{ u(x) \}^{10} \cdot u'(x) \\ = 10 (3x^2 + 12x + 2)^9 \cdot (6x + 12)$$

Cara 2 Menggunakan turunan fungsi komposisi

Misalkan $u = 3x^2 + 12x + 2$ dan $y = u^{10}$

Dengan menggunakan turunan fungsi komposisi diperoleh

$$\frac{du}{dx} = 6x + 12 \qquad \frac{dy}{du} = 10u^9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 10u^9(6x + 12) = 10 (6x + 12) (3x^2 + 12x + 2)^9$$

4. Berdasarkan kegiatan yang telah kamu lakukan, buatlah kesimpulan terkait prinsip atau konsep yang telah kamu temukan dari kasus tersebut

Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada interval I , a bilangan real dapat diturunkan maka:

$$4. f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = \dots$$

III. Tugas

1. Dengan menggunakan sifat-sifat turunan pada poin 2 dan 4, tentukan nilai-nilai
 - a. $f(x) = 25$
 - b. $f(x) = 2x$
 - c. $f(x) = 3x^3$
 - d. $f(x) = 3(2x + 1)$
 - e. $f(x) = (4x + 2)^3$

LAMPIRAN III



SIFAT TURUNAN FUNGSI

RINY KURNIATY



JULI, 15 2021
SMK NEGERI 49 JAKARTA

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kita haturkan kepada Allah SWT sebab karena limpahan rahmat serta anugerah dari-Nya kami mampu untuk menyelesaikan tugas akhir kami dengan judul “TURUNAN : SIFAT TURUNAN” ini.

Shalawat serta salam tidak lupa selalu kita haturkan untuk junjungan nabi agung kita, yaitu Nabi Muhammad SAW yang telah menyampaikan kalimat Allah SWT untuk kita semua, yang merupakan sebuah petunjuk yang paling benar yakni Syariah agama Islam yang sempurna dan merupakan satu-satunya karunia paling besar bagi seluruh alam semesta.

Selanjutnya dengan rendah hati kami meminta kritik dan saran dari pembaca untuk tugas akhir ini supaya selanjutnya dapat kami revisi kembali. Karena kami sangat menyadari, bahwa makalah yang telah kami buat ini masih memiliki banyak kekurangan.

Kami ucapkan terimakasih yang sebanyak-banyaknya kepada setiap pihak yang telah mendukung serta membantu kami selama proses penyelesaian tugas akhir ini hingga rampungnya makalah ini.

Demikianlah yang dapat kami haturkan, kami berharap supaya tugas akhir yang telah kami buat ini mampu memberikan manfaat kepada setiap pembacanya.

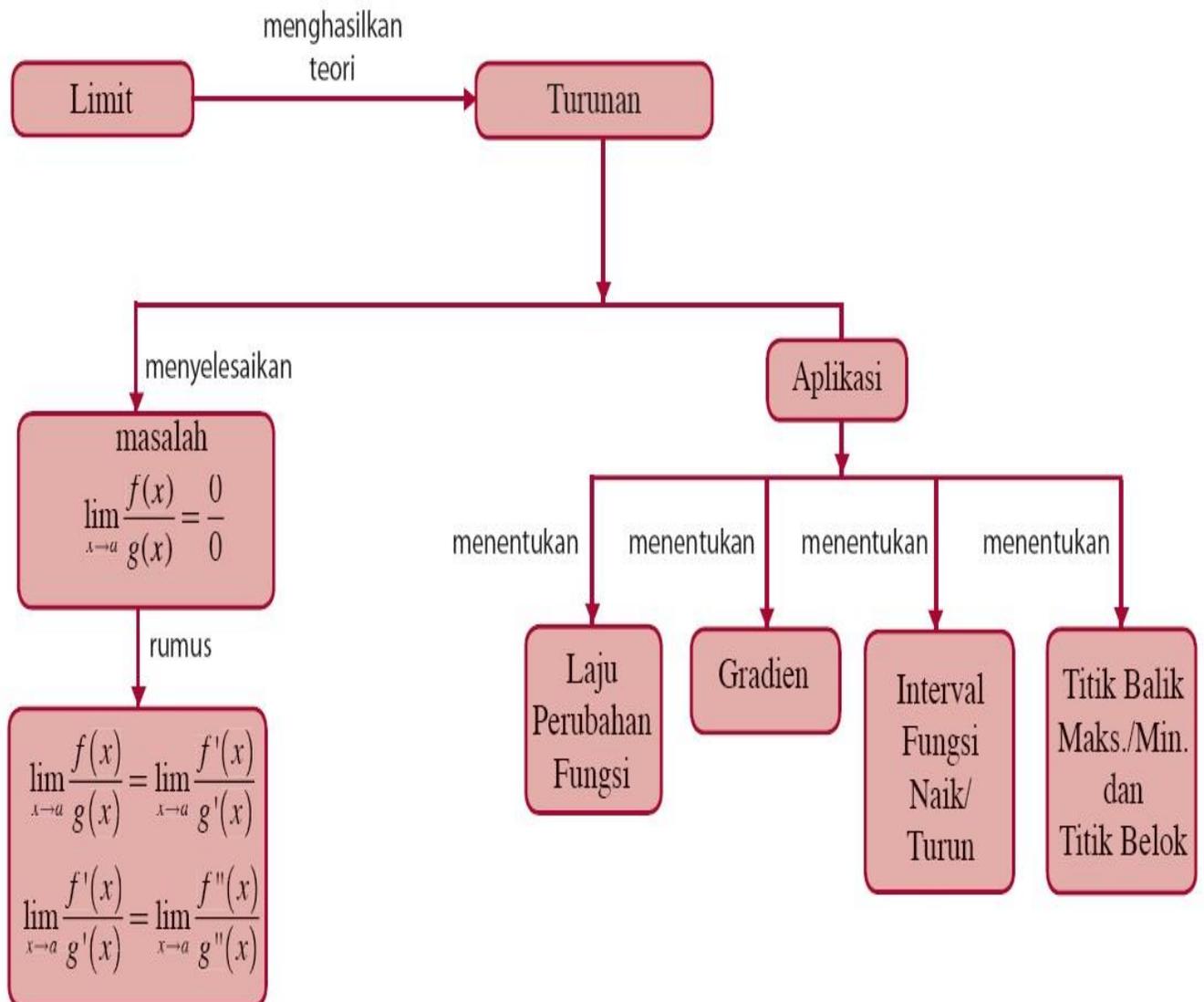
Jakarta, 15 Juli 2021

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	1
Daftar Isi	2
Peta Konsep	3
KI KD Turunan	4
Tujuan Pembelajaran	5
Pendahuluan	6
Dalil Turunan Fungsi Aljabar	9
Asah Kemampuan	19
Daftar Pustaka	20

PETA KONSEP



KOMPETENSI DASAR

Kompetensi Dasar	Target Kompetensi	INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
3.31 Menentukan Turunan fungsi aljabar menggunakan definisi limit fungsi atau sifat sifat turunan fungsi serta penerapannya	1 Menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi limit fungsi atau sifatsifat turunan fungsi serta penerapannya	<p>IPK Pendukung</p> <p>3.31.1 Menjelaskan konsep turunan fungsi aljabar</p> <p>3.31.2 Memahami konsep turunan fungsi aljabar</p> <p>IPK Kunci</p> <p>3.31.3 Menentukan turunan fungsi aljabar dengan definisi limit fungsi</p> <p>3.31.4 Menentukan turunan aljabar dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi</p> <p>IPK Pengayaan</p> <p>3.31.5 Memecahkan masalah turunan fungsi aljabar</p>
4.31 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar	4.31 Memecahkan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar	<p>IPK Pendukung</p> <p>4.31.1 Mengidentifikasi masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar</p> <p>4.31.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar (prosedural)</p> <p>IPK Pengayaan</p> <p>4.31.3 memecahkan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar</p>

TUJUAN PEMBELAJARAN

Dengan kegiatan diskusi, pembelajaran kelompok dan latihan mandiri dalam pembelajaran limit fungsi aljabar ini diharapkan siswa terlibat aktif dalam kegiatan pembelajaran dan bertanggungjawab dalam menyampaikan pendapat, menjawab pertanyaan, memberi saran dan kritik, serta dapat

1. Mampu menentukan sifat-sifat turunan fungsi dengan baik.
2. Mampu menentukan turunan fungsi aljabar dengan sifat-sifat turunan fungsi dengan teliti
3. Mampu menghitung turunan fungsi yang sederhana dengan menggunakan defunisi turunan dengan teliti.

TURUNAN FUNGSI

Suatu turunan fungsi f di x yang ditulis dengan notasi $f'(x)$ dengan rumus:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Selain $f'(x)$, fungsi turunan juga seringkali ditulis dengan y' , $\frac{df(x)}{dx}$, dan $\frac{dy}{dx}$

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari:

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = 2x$
3. $f(x) = 3x^2 + 1$
4. $f(x) = \frac{3}{2x}$

Pembahasan:

1. $f(x) = 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} = 0 \end{aligned}$$

2. $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\&= 2\end{aligned}$$

3. $f(x) = 3x^2 + 1$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2 + 1)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2hx + h^2) + 1 - (3x^2 + 1)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 + 1 - 3x^2 - 1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h \\&= 6x + 3(0) = 6x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad f(x) &= \frac{3}{2x} \\
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2(x+h)} - \frac{3}{2x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{2x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x - 3(x+h)}{2x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x - 3x - 3h}{2x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{2x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{2x(x+h)} \\
&= \frac{-3}{2x(x+0)} = -\frac{3}{2x^2}
\end{aligned}$$

Perhatikan pembahasan contoh soal di atas

1. $f(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) = 2$
3. $f(x) = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 6x$
4. $f(x) = \frac{3}{2x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{3}{2x^2}$

Dari contoh di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa:

$$f(x) = x^n, \quad \text{maka} \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$

Untuk lebih lanjut berikut sifat-sifat turunan:

1. Jika $f(x) = k, f'(x) = 0$
2. Jika $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$
3. Jika $f(x) = kx^n, f'(x) = knx^{n-1}$
4. Jika $f(x) = uv, f'(x) = u'.v + u.v'$
5. Jika $f(x) = \frac{u}{v}, f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

A. Dalil-Dalil Turunan Fungsi Aljabar

1. Jika k merupakan suatu bilangan konstan maka untuk setiap x berlaku: $f(x) = k, f'(x) = 0$

Pembuktian:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0
 \end{aligned}$$

Contoh:

1. $f(x) = 5$, maka $f'(x) = 0$
2. $f(x) = 15$, maka $f'(x) = 0$
3. $f(x) = n$, maka $f'(x) = 0$

2. Jika n suatu bilangan bulat, maka berlaku $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$

Penjelasan:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + {}_n C_1 x^{n-1} h + {}_n C_2 x^{n-2} h^2 + \dots + {}_n C_{(n-2)} x^2 h^{n-2} + {}_n C_{(n-1)} x h^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h({}_n C_1 x^{n-1} + {}_n C_2 x^{n-2} h + \dots + {}_n C_{(n-2)} x^2 h^{n-3} + {}_n C_{(n-1)} x h^{n-2} + h^{n-1})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} ({}_n C_1 x^{n-1} + {}_n C_2 x^{n-2} h + \dots + {}_n C_{(n-2)} x^2 h^{n-3} + {}_n C_{(n-1)} x h^{n-2} + h^{n-1}) \\
&= {}_n C_1 x^{n-1} \rightarrow \text{Substitusikan nilai } h = 0, \text{ sehingga semua suku yang mengandung } h \text{ bernilai } 0. \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}$$

Substitusikan nilai $h = 0$, sehingga semua suku yang mengandung h bernilai 0.

Contoh:

1. $f(x) = x^5$
2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
3. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Pembahasan:

1. $f(x) = x^5$
 $f'(x) = 5x^{5-1}$
 $= 5x^4$

2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
 $f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3} - \frac{3}{3}}$
 $= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$
 $= \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$\begin{aligned}
3. \quad f(x) &= \sqrt[5]{x} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{5}} \\
f'(x) &= \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5} - \frac{5}{5}} \\
&= \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}
\end{aligned}$$

3. Jika f dan g merupakan fungsi dan k adalah bilangan konstan, maka berlaku

$$f(x) = kx^n, f'(x) = knx^{n-1}$$

Pembuktian:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
&= k \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan uraian pada nomor 2, maka $f'(x) = knx^{n-1}$.

Contoh:

1. $f(x) = 2x^5$
2. $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$
3. $f(x) = 2x\sqrt[5]{x}$

Pembahasan:

1. $f(x) = 2x^5$
 $f'(x) = 2 \cdot 5x^{5-1}$
 $= 10x^4$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(x) &= 3x^{\frac{2}{3}} \\
 f'(x) &= \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} \\
 &= 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad f(x) &= 2x\sqrt[5]{x} \rightarrow f(x) = 2x x^{\frac{1}{5}} = 2x^{\frac{5}{5}+\frac{1}{5}} = 2x^{\frac{6}{5}} \\
 f'(x) &= 2 \cdot \frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-\frac{5}{5}} \\
 &= \frac{12}{5}x^{\frac{1}{5}} \\
 &= \frac{12}{5}\sqrt[5]{x}
 \end{aligned}$$

4. Jika f dan g dua fungsi dengan $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, sehingga berlaku

$$H(x) = f(x) \pm g(x),$$

maka

$$H'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Pembuktian: $H(x) = f(x) \pm g(x)$, maka:

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)+g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
 &= f'(x) + g'(x).
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, juga berlaku untuk pengurangan fungsi.

Contoh:

1. Jika $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$, nilai $f'(-1) = \dots$
2. Diketahui $f(x) = 3x^2 + kx - 15$, jika $f'(6) = 40$, maka nilai k adalah
3. Tentukan turunan pertama dari:
 - a. $f(x) = (x - 2)(2x + 3)$
 - b. $f(x) = \frac{x+1}{x}$

Pembahasan:

1. $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$
 $f'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} + 3x^{1-1} - 0$
 $= 10x + 3$
 $f'(-1) = 10x + 3$
 $f'(-1) = 10(-1) + 3$
 $f'(-1) = -10 + 3 = -7$

2. $f(x) = 3x^2 + kx - 15$
 $f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} + k$
 $= 6x + k$

$$f'(6) = 6x + k$$
$$40 = 6(6) + k$$
$$40 = 36 + k$$
$$k = 40 - 36 = 4$$

3. Turunan pertama dari:

a. $f(x) = (x - 2)(2x + 3) = 2x^2 - x - 6$

$$f'(x) = 4x - 1$$

b. $f(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + x^{-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + x^{-1} \\ &= 0 + (-1)x^{-1-1} \\ &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

5. Jika f dan g dua fungsi dengan $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, sehingga berlaku

$$H(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$H'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

berlaku beberapa literatur pemisalnya menggunakan u dan v , sehingga juga berlaku:

$$\mathbf{f(x) = u \cdot v, \text{ berlaku } f'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u}$$

Contoh:

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut:

a. $f(x) = (5 - x^3)(x^2 - x)$

2. Diketahui $f(x) = (ax^2 - 1)(x - 1)$.

Jika turunan pertama fungsi tersebut adalah $f'(x)$ dan $f'(1) = 3$. Maka nilai a adalah

Pembahasan:

1. Turunan pertama dari:

a. $f(x) = (5 - x^3)(x^2 - x)$

Misalkan:

$$\begin{aligned} u &= (5 - x^3) & u' &= -3x^2 \\ v &= (x^2 - x) & v' &= 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + v' \cdot u \\ &= -3x^2(x^2 - x) + (2x - 1)(5 - x^3) \\ &= -3x^4 + 3x^3 + 10x - 2x^4 - 5 + x^3 \\ &= -5x^4 + 4x^3 + 10x - 5 \end{aligned}$$

2. $f(x) = (ax^2 - 1)(x - 1)$

$$\begin{aligned} u &= ax^2 - 1 & u' &= 2ax \\ v &= x - 1 & v' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + v' \cdot u \\ &= 2ax(x - 1) - 1(ax^2 - 1) \\ &= 2ax^2 - 2ax + ax^2 - 1 \\ &= ax^2 - 2ax - 1 \end{aligned}$$

$$f'(1) = 3ax^2 - 2ax - 1$$

$$3 = 3a - 2a - 1$$

$$3 = a - 1$$

$$a = 3 + 1$$

$$a = 4$$

6. Jika f dan g dua fungsi dengan $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada, sehingga

$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{berlaku} \quad H'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2},$$

beberapa literatur akan menuliskan pemisalan fungsi menjadi u dan v ,

sehingga juga berlaku: $f(x) = \frac{u}{v}$, berlaku $f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Contoh: Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut:

$$1. y = \frac{4x+1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$2. y = \frac{x^2+3}{2x^2+1}$$

Pembahasan:

$$1. y = \frac{4x+1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$$

Misalkan:

$$u = 4x + 1 \quad u' = 4$$

$$v = 2x - 1 \quad v' = 2$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \\ &= \frac{4(2x-1) - 2(4x+1)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{8x-4-8x-2}{(2x-1)^2} \\ &= -\frac{6}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

$$2. y = \frac{x^2+3}{2x^2+1}$$

Misalkan:

$$u = x^2 + 3 \quad u' = 2x$$

$$v = 2x^2 + 1 \quad v' = 4x$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \\ &= \frac{2x(2x^2+1) - 4x(x^2+3)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{4x^3+2x-4x^3-12x}{(x^2+3)^2} \\ &= -\frac{10x}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

7. Turunan Fungsi Komposisi

Jika $H(x) = [f(x)]^n$ maka $H'(x) = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Contoh; Tentukan turunan dari

1. $y = (2x + 1)^5$
2. $y = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5$
3. $f(x) = (x - x^{-2})^2$

Pembahasan:

1. $y = (2x + 1)^5$

Misalkan:

$$u = 2x + 1$$

$$u' = 2$$

$$y = u^5$$

$$y' = 5u^{5-1} \cdot u'$$

$$= 5u^4 \cdot u'$$

$$= 5(2x + 1)^4 \cdot 2$$

$$= 10(2x + 1)^4$$

2. $y = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5$

Misalkan:

$$u = x + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2}$$

$$u' = 1 - 2x^{-3} = 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$y = u^5$$

$$y' = 5u^{5-1} \cdot u'$$

$$= 5u^4 \cdot u'$$

$$= 5 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \left(5 - \frac{10}{x^3}\right) \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^4$$

3. $f(x) = (x - x^{-2})^2$

Misalkan:

$$u = x - x^{-2}$$

$$u' = 1 + 2x^{-3}$$

$$f(u) = u^2$$

$$f'(u) = 2u^{2-1} \cdot u'$$

$$= 2u \cdot u'$$

$$f'(x) = 2(x - x^{-2})(1 + 2x^{-3})$$

$$= 2(x + x \cdot 2x^{-3} - x^{-2} - x^{-2} \cdot 2x^{-3})$$

$$= 2(x + 2x^{1-3} - x^{-2} - x^{-2-3})$$

$$= 2(x + 2x^{-2} - x^{-2} - 2x^{-5})$$

$$= 2(x + x^{-2} - 2x^{-5})$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^5}\right)$$

ASAH KEMAMPUAN

Tentukan turunan dari setiap fungsi berikut

a. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 5$

b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

c. $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 3x + 2)$

d. $f(x) = (x - 2)(\sqrt{x} + 1)$

e. $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 4}$

f. $f(x) = \frac{4x}{5 - 3x}$

g. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x - 1}$

DAFTAR PUSTAKA

Toali, Kasmira. Matematika Untuk SMK Kelas XII 2019. Jakarta : Erlangga
Toali. Matematika Kelas X 2015. Jakarta : Pusat perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional

Sumber internet :

<http://tomyherawansman48jkt.blogspot.com/2015/06/bab-iv-turunan.html>

<https://www.wardayacollege.com/matematika/kalkulus/turunan-diferensial/konsep-turunan/>