

MODUL BARISAN DAN DERET



MATEMATIKA WAJIB
KELAS 11 MIPA/IPS

BARISAN DAN DERET

A. Pola Bilangan Sebagai Barisan dan Deret

Jika U_n adalah suku ke n dari suatu pola bilangan, maka $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$ dinamakan barisan bilangan dan $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n = S_n$ dinamakan deret bilangan.

Sejarah barisan dan deret sebenarnya cukup panjang. Naskah kuno tertua yang berhubungan dengan barisan dan deret adalah Papyrus Rhind atau Papyrus Ahmes (sekitar 1650 SM), di mana soal no.79 dalam papyrus berhubungan dengan masalah deret. Selanjutnya, salah satu paradoks dari Zeno berhubungan dengan deret geometri dengan $r = 1/2$. Archimedes telah bekerja dengan deret tak hingga, antara

lain bersesuaian dengan deret $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$. Secara eksplisit mungkin inilah

deret pertama dalam matematika. Fibonacci menulis buku *Liber Abacci* (1202) di mana terdapat sebuah soal tentang kelinci yang terkait dengan sebuah jenis barisan yang dinamakan Barisan Fibonacci. Selanjutnya deret bilangan kuadrat, kubik, dan seterusnya antara lain dibahas oleh Yang Hui dalam buku *Detailed Analysis*, Ibnu al-Banna al-Marrakhusi (1256-1321) dalam bukunya *Raf al-Hisab* juga Ibrahim Al-Umawi (1400-1489). Akhirnya, di tangan Euler, deret-deret tak hingga dibahas tuntas seperti dalam bukunya, *Introductio in analysin infinitorum*. Euler antara lain tahun 1740

menyelesaikan masalah deret yang terkenal yaitu $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

Terdapat beberapa barisan bilangan yang khusus, karena memiliki pola dan rumus tersendiri, yakni :

(1) Barisan bilangan asli.

Bentuk : 1, 2, 3, 4, 5,

Rumus : $U_n = n$

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) Barisan bilangan persegi

Bentuk : 1, 4, 9, 16, 25,

Pola : $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$

Rumus : $U_n = n^2$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3) Barisan bilangan persegi panjang

Bentuk : 2, 6, 12, 20, 30,

Pola : 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, ...

Rumus : $U_n = n(n+1)$

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(4) Barisan Bilangan segitiga

Bentuk : 1, 3, 6, 10, 15, ...

Pola : 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,

Rumus : $U_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(5) Barisan bilangan Kubik
 Bentuk : 1, 8, 27, 64, 125,
 Pola : $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$
 Rumus : $U_n = n^3$

(6) Barisan bilangan balok
 Bentuk : 6, 24, 60, 120, 720,
 Pola : $1.2.3, 2.3.4, 3.4.5, 4.5.6, \dots$
 Rumus : $U_n = n(n+1)(n+2)$

$$S_n = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2$$

$$S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Disamping itu terdapat pula barisan bilangan yang pola dan rumusnya harus dicari terlebih dahulu, untuk mendapatkan suku-suku tertentu

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Jika rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 3n^2 - 4$, maka tentukanlah suku ke tiga dan suku kelima

Jawab

$$U_n = 3n^2 - 4$$

$$\text{Maka } U_3 = 3(3)^2 - 4 = 3(9) - 4 = 27 - 4 = 22$$

$$U_5 = 3(5)^2 - 4 = 3(25) - 4 = 75 - 4 = 71$$

02. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 2n^2 - 4n + 5$. Suku keberapakah 11 ?

Jawab

$$U_n = 2n^2 - 4n + 5$$

$$11 = 2n^2 - 4n + 5$$

$$0 = 2n^2 - 4n - 6$$

$$0 = n^2 - 2n - 3$$

$$0 = (n - 3)(n + 1)$$

Jadi $n = 3$. Sehingga 11 adalah suku ke 3

03. Suatu barisan 5, 8, 11, 14, 17, ... memenuhi pola $U_n = an + b$. Tentukanlah rumus umum suku ke-n dan berapakah suku ke 9 ?

Jawab

$$U_n = an + b$$

$$\text{Maka } U_1 = a(1) + b = 5 \quad \text{sehingga} \quad a + b = 5 \dots\dots\dots (1)$$

$$U_2 = a(2) + b = 8 \quad \text{sehingga} \quad 2a + b = 8 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Sehingga } 2a + b = 8$$

$$\underline{a + b = 5}$$

$$a = 3$$

$$\text{Substitusi ke(1) } a + b = 5$$

$$3 + b = 5 \quad \text{maka } b = 2$$

Jadi rumus umum suku ke-n adalah $U_n = 3n + 2$

04. Suatu barisan 3, 4, 7, 12, 19, ... memenuhi pola $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukanlah rumus umum suku ke-n dan berapakah suku ke 10 ?

Jawab

$$U_n = an^2 + bn + c$$

$$\text{Maka } U_1 = a(1)^2 + b(1) + c = 3 \quad \text{sehingga} \quad a + b + c = 3 \dots\dots\dots (1)$$

$$U_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 4 \quad \text{sehingga} \quad 4a + 2b + c = 4 \dots\dots\dots (2)$$

$$U_3 = a(3)^2 + b(3) + c = 7 \quad \text{sehingga} \quad 9a + 3b + c = 7 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Sehingga (3) } 9a + 3b + c = 7$$

$$(2) 4a + 2b + c = 4$$

$$\underline{5a + b = 3} \dots\dots\dots (4)$$

$$(2) 4a + 2b + c = 4$$

$$(1) \underline{a + b + c = 3}$$

$$3a + b = 1 \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{Eliminasi (4)(5) } 5a + b = 3$$

$$\underline{3a + b = 1}$$

$$2a = 2 \quad \text{maka } a = 1$$

$$\text{Substitusi ke(5) } 3(1) + b = 1 \quad \text{maka } b = -2$$

$$\text{Substitusi ke(1) } 1 - 2 + c = 3 \quad \text{maka } c = 4$$

Jadi rumus umum suku ke-n adalah $U_n = n^2 - 2n + 4$

$$U_{10} = (10)^2 - 2(10) + 4 = 100 - 20 + 4 = 84$$

05. Pada barisan bilangan segitiga tentukanlah :

(a) Suku ke 6

(b) Jumlah delapan suku pertama

Jawab

Menurut rumus barisan bilangan segitiga : 1, 3, 6, 10, 15, ...

$$U_n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Sehingga :

$$(a) U_6 = \frac{1}{2}(6)(6+1) = 21$$

$$(b) S_8 = \frac{1}{6}(8)(8+1)(8+2) = 120$$

06. Pada barisan bilangan persegipanjang tentukanlah hasil dari $U_5 + U_6 + U_7 + U_8$

Jawab

$$\text{Menurut rumus barisan bilangan persegi panjang : } S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned}\text{Sehingga : } U_5 + U_6 + U_7 + U_8 &= S_8 - S_4 \\ &= \frac{1}{3}(8)(8+1)(8+2) - \frac{1}{3}(5)(5+1)(5+2) \\ &= 240 - 70 \\ &= 170\end{aligned}$$

SOAL LATIHAN 01

A. Pola Bilangan sebagai Barisan dan Deret

01. Jika rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 5 - 2n^2$, maka selisih suku ketiga dan kelima adalah
- A. 32 B. -32 C. 28
D. -28 E. 25
02. Rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 4 + 2n - an^2$, Jika suku ke 4 adalah -36 maka nilai a adalah ...
- A. -3 B. -2 C. 2
D. 3 E. 4
03. Rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = \frac{n^2 - 1}{n + 3}$, Suku keberapakah 3 ?
- A. 8 B. 6 C. 5
D. 4 E. 3
04. Suatu barisan 1, 4, 7, 10, ... memenuhi pola $U_n = an + b$. Suku ke 10 dari barisan itu adalah
- A. 22 B. 28 C. 30
D. 31 E. 33
05. Suatu barisan 2, 5, 10, 17, memenuhi pola $U_n = an^2 + bn + c$. Suku ke 9 dari barisan itu adalah
- A. 73 B. 78 C. 80
D. 82 E. 94
06. Barisan 2, 9, 18, 29, ... memenuhi pola $U_n = an^2 + bn + c$. Suku ke berapakah 42?
- A. 5 B. 6 C. 7
D. 8 E. 9
07. Suku ke 20 dari barisan 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, adalah
- A. 1 B. 9 C. 10
D. 11 E. 18
08. Suku pertama suatu barisan adalah 4, sedangkan suku umum ke-n (untuk $n > 1$) ditentukan dengan rumus $U_n = 3.U_{n-1} - 5$. Suku ke tiga adalah ...
- A. 16 B. 14 C. 13
D. 12 E. 10

09. Rumus umum suku ke- n dari barisan 6, 10, 14, 18, 22, ..., adalah $U_n = an + b$. Rumus suku ke- n barisan tersebut adalah ...
- A. $U_n = 4n - 2$ B. $U_n = 3n + 3$ C. $U_n = 5n + 1$
D. $U_n = 3n - 2$ E. $U_n = 4n + 2$
10. Pola bilangan untuk barisan 44, 41, 38, 35, 32, ... memenuhi rumus ...
- A. $U_n = 44 - n$ B. $U_n = 46 - 2n$ C. $U_n = 48 - 4n$
D. $U_n = 3n + 41$ E. $U_n = 47 - 3n$
11. Pola bilangan barisan 6, 11, 18, 27, 38, 51, ... memenuhi rumus ...
- A. $U_n = n^2 + 4n + 1$ B. $U_n = n^2 - 2n + 7$ C. $U_n = n^2 + 2n + 3$
D. $U_n = n^2 + 3n + 2$ E. $U_n = 2n^2 + n + 3$
12. Pola bilangan barisan 2, 2, 4, 8, 14, 22, 32, ... memenuhi rumus ...
- A. $U_n = n^2 + 3n - 2$ B. $U_n = n^2 + 4n - 3$ C. $U_n = n^2 + 5n - 4$
D. $U_n = n^2 - 3n + 4$ E. $U_n = 2n^2 + 3n - 3$
13. Pada barisan bilangan balok, jumlah deret $U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_9 = \dots$
- A. 2970 B. 3940 C. 2940
D. 3960 E. 2540
14. Jumlah n suku pertama barisan 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... memenuhi pola $S_n = an^2 + bn$. Jumlah 12 suku pertama barisan itu adalah
- A. 300 B. 240 C. 168
D. 145 E. 98
15. Jika suatu barisan bilangan memenuhi rumus $U_n = 4n + 3$, maka rumus jumlah n suku pertamanya adalah
- A. $S_n = 5n^2 + 2n$ B. $S_n = 2n^2 + 5n$ C. $S_n = 3n^2 + 2n - 1$
D. $S_n = n^2 + 3n$ E. $S_n = n^2 + 2n - 5$
16. Jika suatu barisan 2, 8, 32, 128, ... memenuhi rumus $U_n = 2^{an+b}$ maka nilai $a \times b = \dots$
- A. 3 B. 2 C. 1
D. -1 E. -2
17. U_n adalah suku ke- n suatu deret. Jika $U_{n+1} - U_n = -6$ untuk setiap n dan suku pertama deret itu 100, maka jumlah semua suku deret itu yang bernilai positif adalah
- A. 844 B. 848 C. 864
D. 884 E. 886

18. Jumlah 10 suku pertama deret ${}^a\log \frac{1}{x} + {}^a\log \frac{1}{x^2} + {}^a\log \frac{1}{x^3} + \dots$ adalah
- A. $-55 {}^a\log x$ B. $\frac{1}{45} {}^a\log x$ C. $-45 {}^a\log x$
- D. $55 {}^a\log x$ E. $\frac{1}{55} {}^a\log x$

19. Semua bilangan positif ganjil dikelompokkan sebagai berikut :
(1), (3, 5, 7), (9, 11, 13, 15, 17), (19, 21, 23, 25, 27, 29, 31),
- Selisih bilangan terbesar dan terkecil dalam kelompok ke sepuluh adalah ...
- A. 36 B. 32 C. 28
- D. 24 E. 18

BARISAN DAN DERET

B. Barisan dan Deret Aritmatika

Barisan adalah kumpulan objek-objek yang disusun menurut pola tertentu. Objek pertama dinamakan suku pertama, objek kedua dinamakan suku kedua, objek ketiga dinamakan suku ketiga dan seterusnya sampai objek ke-n dinamakan suku ke-n atau U_n . Jika objek-objek tersebut berupa bilangan, maka bentuk penjumlahan dari objek-objek tersebut sampai n suku dinamakan deret.

Barisan aritmatika adalah suatu barisan angka-angka dimana $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{beda}$ (merupakan angka yang tetap)

Sehingga :

(1) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35 adalah barisan aritmatika dengan beda 4

(2) 63, 58, 53, 48, ... , 3 adalah barisan aritmatika dengan beda -5

(3) $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \dots + 50$ adalah deret aritmatika dengan beda 3

(4) $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots$ adalah deret aritmatika tak hingga dengan beda 2

Jika suku pertama suatu barisan aritmatika dinamakan a, maka diperoleh:

$$U_1 = a$$

$$U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$$

$$U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$$

$$U_5 = U_4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U_n = \dots\dots\dots = a + (n - 1)b$$

Jadi suku ke-n barisan aritmatika dirumuskan : $U_n = a + (n - 1)b \dots\dots\dots (1)$

Sebagai contoh diketahui barisan : 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

Maka suku ke-21 dapat ditentukan dengan rumus :

$$U_{21} = a + (21 - 1)b = a + (20)b = 3 + (20)4 = 83$$

Untuk menentukan rumus jumlah sampai suku ke-n, dapat ditentukan dengan cara :

$$S_n = a + a + b + a + 2b + a + 3b + \dots + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + U_{n-3} + \dots + a$$

$$S_n = a + a + b + a + 2b + a + 3b + \dots + U_n$$

$$S_n = U_n + U_n - b + U_n - 2b + U_n - 3b + \dots + a$$

$$2S_n = a + U_n + a + U_n + a + U_n + a + U_n + \dots + a + U_n$$

$$2S_n = n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n) \dots\dots\dots (2)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + a + (n - 1)b)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b] \dots\dots\dots (3)$$

Sebagai contoh diketahui deret : 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + ... Jumlah 10 suku pertamanya dapat ditentukan dengan rumus :

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2} (10)[2(3) + (10 - 1)4] = 5[6 + 36] = 5[42] = 210$$

Jika suatu barisan aritmatika diketahui n ganjil, maka suku tengah dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut :

$$U_T = U_{(n+1)/2}$$

$$= a + \left[\frac{1}{2}(n+1) - 1 \right] b$$

$$= \frac{2a}{2} + \left(\frac{(n+1) - 2}{2} \right) b$$

$$= \frac{2a + (n - 1)b}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [a + a + (n - 1)b]$$

$$U_T = \frac{1}{2} [a + U_n] \dots\dots\dots (4)$$

Sebagai contoh diketahui barisan : 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

Jika barisan tersebut diteruskan sampai 15 suku, maka suku tengahnya dapat ditentukan dengan rumus : $U_T = \frac{1}{2} [a + U_{15}] = \frac{1}{2} [3 + (3 + (15 - 1)4)] = \frac{1}{2} [6 + 56] = 31$

Selanjutnya kita juga dapat merumuskan hubungan antara U_n dan S_n , yakni :

$$S_n = \underbrace{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1}}_{S_{n-1}} + U_n$$

$$S_n = S_{n-1} + U_n$$

$$U_n = S_n - S_{n-1} \dots\dots\dots (5)$$

Untuk lebih memantapkan pemahaman konsep di atas ikutilah contoh soal berikut ini:

1. Manakah diantara barisan berikut ini merupakan barisan aritmatika:
- a. 2, 4, 8, 16, 32, 64,
 - b. 5, -10, 15, -20, 25, -30,
 - c. 30, 27, 24, 21, 18, 15,
 - d. 5, 7, 10, 14, 19, 25, 32,

Jawab

- (a) Bukan barisan aritmatika
- (b) Bukan barisan aritmatika
- (c) Barisan aritmatika dengan beda -3
- (d) Bukan barisan aritmatika

2. Diketahui barisan aritmatika 2, 7, 12, 17, 22, ... Tentukanlah suku ke 15

Jawab

$$a = 2$$

$$b = 5$$

$$n = 15$$

$$\text{maka } U_{15} = a + (15 - 1)b$$

$$U_{15} = 2 + (14)5$$

$$U_{15} = 2 + 70$$

$$U_{15} = 72$$

3. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke tiga adalah 12 dan suku ke enam adalah 27. Tentukanlah suku ke 9

Jawab

$$U_3 = 12 \longrightarrow a + (3 - 1)b = 12 \longrightarrow a + 2b = 12 \text{ (1)}$$

$$U_6 = 27 \longrightarrow a + (6 - 1)b = 27 \longrightarrow a + 5b = 27 \text{ (2)}$$

Dari (1)(2) $a + 5b = 27$

$$a + 2b = 12$$

$$3b = 15$$

$$b = 5$$

sehingga $a + 2(5) = 12$ maka $a = 2$

Jadi $U_9 = a + (9 - 1)b$

$$U_9 = 2 + (8)5$$

$$U_9 = 42$$

4. Diketahui deret aritmatika $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + \dots$, tentukanlah Jumlah sampai 13 suku pertama

Jawab

Diketahui $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + \dots$

Maka $a = 4$

$$b = 3$$

$$n = 13$$

Sehingga : $S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b]$

$$S_{13} = \frac{1}{2} (13) [2(4) + (13 - 1)3]$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} (13) [8 + 36]$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} (13) [44]$$

$$S_{13} = 286$$

5. Hitunglah hasil dari $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 29$

Jawab

Diketahui $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 29$

Maka $a = 2$

$$b = 3$$

$$U_n = 29$$

Sehingga : $U_n = a + (n - 1)b$

$$29 = 2 + (n - 1)3$$

$$27 = (n - 1)3$$

$$9 = n - 1$$

$$n = 10$$

$$\text{Jadi } S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b]$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} (10) [2(2) + (10 - 1)3]$$

$$S_{10} = 5[4 + 27]$$

$$S_{10} = 155$$

6. Jika diketahui $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + x = 99$ maka tentukanlah nilai x

Jawab

Diketahui $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + x = 99$

Maka : $a = 3$

$$b = 5 - 3 = 2$$

$$S_n = 99$$

$$\text{Sehingga } S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)b]$$

$$99 = \frac{1}{2} n [2(3) + (n - 1)2]$$

$$198 = n [6 + 2n - 2]$$

$$198 = n [4 + 2n]$$

$$198 = 4n + 2n^2$$

$$2n^2 + 4n - 198 = 0$$

$$n^2 + 2n - 99 = 0$$

$$(n - 9)(n + 11) = 0$$

$$n = 9$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } x &= U_9 \\ x &= a + (9 - 1)b \\ x &= 3 + (8)2 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

7. Diketahui deret aritmatika $10 + 14 + 18 + \dots$. Jika deret tersebut diteruskan sampai 9 suku, maka suku tengahnya adalah....

Jawab

$$\begin{aligned} \text{Diketahui } a &= 10 \\ b &= 14 - 10 = 4 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } U_9 &= a + (9 - 1)b \\ U_9 &= 10 + (8)4 \\ U_9 &= 42 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } U_T = \frac{1}{2}(a + U_n) = \frac{1}{2}(10 + 42) = 26$$

8. Jika jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika ditentukan dengan rumus $S_n = 2n^2 + 4n$, maka tentukanlah suku ke 5

Jawab

$$\begin{aligned} S_n &= 2n^2 + 4n \\ \text{Maka } S_5 &= 2(5)^2 + 4(5) = 50 + 20 = 70 \\ S_4 &= 2(4)^2 + 4(4) = 32 + 16 = 48 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } U_5 = S_5 - S_4 = 70 - 48 = 22$$

9. Diantara angka 2 dan angka 14 disisipkan tiga angka, sehingga kelima angka tersebut membentuk barisan aritmatika. Tentukanlah ketiga angka yang disisipkan tersebut

Jawab

Misalkan kelima angka tersebut adalah: $2, 2 + b, 2 + 2b, 2 + 3b, 14$

$$\begin{aligned} \text{Maka : } U_5 &= a + (n - 1)b \\ 14 &= 2 + (5 - 1)b \\ 14 - 2 &= 4b \\ 4b &= 12 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Jadi ketiga angka tersebut adalah : $2 + 3, 2 + 2(3), 2 + 3(3) = 5, 8, 11$

10. Amir mempunyai hutang Rp. 600.000 yang pembayarannya diangsur setiap bulan sebesar Rp. 40.000. Selama berapa bulankah ia harus mengangsur hingga hutangnya lunas ?

Jawab

$$\left. \begin{aligned} a &= 40000 \\ b &= 40000 \\ U_n &= 600.000 \end{aligned} \right\} n = \dots\dots ?$$

Sehingga

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$600.000 = 40000 + (n - 1)40000$$

$$600.000 = 40000 + 40000n - 40000$$

$$600.000 = 40000n$$

$$n = \frac{600000}{40000}$$

$$n = 15$$

Jadi ia harus mengangsur selama 15 bulan sampai hutangnya lunas

11. Sebuah kendaraan bermotor akan diuji ketahanan mesinnya dengan cara dikendarai melewati berbagai kota selama delapan hari berturut-turut. Pada hari pertama, kendaraan tersebut berhasil menempuh jarak 15 km, pada hari kedua 25 km, hari ketiga 35 km dan seterusnya membentuk pola aritmatika. Berapakah total jarak yang berhasil ditempuh kendaraan tersebut selama 8 hari ?

Jawab

Barisan yang didapat adalah barisan aritmatika : 15, 25, 35, ..., U_n , sehingga

$$\left. \begin{array}{l} a = 15 \\ b = 25 - 15 = 10 \\ n = 8 \end{array} \right\} n = \dots ?$$

Jadi total jarak yang berhasil ditempuh kendaraan tersebut adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n [2a + (n - 1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2}(8) [2(15) + (8 - 1)10]$$

$$S_n = 4 [30 + 70]$$

$$S_n = 400 \text{ km}$$

12. Pada zaman dahulu hiduplah seorang kakek dengan 9 orang anaknya. Jika anak tertua berumur 37 tahun dan umur kesembilan anak tersebut berselisih 3 tahun, maka berapakah umur anak yang tengah ?

Jawab

Barisan yang didapat adalah barisan aritmatika, dimana

$$\left. \begin{array}{l} n = 9 \\ U_9 = 37 \\ b = 3 \end{array} \right\} n = \dots ?$$

Sehingga : $U_n = a + (n - 1)b$

$$U_9 = a + (9 - 1)3$$

$$37 = a + 24$$

$$a = 13$$

Jadi umur anak yang tengah adalah

$$U_T = \frac{1}{2} [a + U_9]$$

$$U_T = \frac{1}{2} [13 + 37]$$

$$U_T = 30$$

13. Andi selalu menabung di bank secara rutin setiap awal bulan sebesar Rp. 200.000,-. Jika pada pertengahan Januari 2012, Andi telah mempunyai uang Rp. 600.000 di bank tersebut, maka berapakah banyaknya uang Andi pada pertengahan bulan Desember ?

Jawab

Diketahui : $a = 600.000$

$$b = 200.000$$

$$n = 11 \text{ (Dari Februari 2012 sampai Desember 2012)}$$

Maka $U_{11} = a + (11 - 1)b = 600000 + (10)200000 = 2.600.000$

Jadi banyaknya uang Andi pada pertengahan bulan Desember adalah

Rp. 2.600.000

14. Suatu bioskop memiliki 10 deretan bangku. Pada deretan pertama ada 20 bangku. Pada deretan kedua ada 24 bangku. Pada deretan ketiga ada 28 bangku, dan seterusnya. Berapa banyak bangku dalam bioskop tersebut ?

Jawab

Diketahui : $n = 10$

$$a = 20$$

$$b = 4$$

Ditanya : S_{10}

Jawab : $S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2[20] + (10 - 1)4)$$

$$S_n = 5 (40 + 36)$$

$$S_n = 5 (76)$$

$$S_n = 385 \text{ bangku}$$

SOAL LATIHAN 02

B. Barisan dan Deret Aritmatika

01. Dari barisan 3, 5, 7, 9, 11, ... suku ke 21 adalah
A. 40
B. 43
C. 46
D. 49
E. 52
02. Dari barisan 15, 11, 7, 3, Suku ke 10 adalah
A. -21
B. -17
C. -13
D. -9
E. -5
03. Dari barisan $3, 4\frac{1}{2}, 6, 7\frac{1}{2}, 9, \dots$ Suku ke 12 adalah
A. $14\frac{1}{2}$
B. 16
C. $17\frac{1}{2}$
D. 19
E. $19\frac{1}{2}$
04. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 4 adalah 6 dan bedanya 3. Suku ke 8 adalah ...
A. 18
B. 31
C. 34
D. 37
E. 40
05. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 15 adalah 30 dan bedanya -5. Suku ke 6 adalah
A. 65
B. 25
C. 75
D. 80
E. 90
06. Rumus umum suku ke-n dari barisan 4, 9, 14, 19, 24, adalah ...
A. $5n + 2$
B. $5n - 1$
C. $5n + 1$
D. $5n - 2$
E. $5n + 2$
07. Dari barisan $6, 4\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}, 2, \dots$ rumus umum suku ke-n adalah ...
A. $\frac{1}{3}(10 - 4n)$
B. $\frac{1}{3}(22 - 4n)$
C. $\frac{1}{3}(8 - 4n)$
D. $\frac{1}{3}(20 - 4n)$
E. $\frac{1}{3}(12 - 4n)$
08. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 6 adalah -4 dan suku ke 9 adalah -19, maka suku ke 11 adalah...
A. -34
B. -29
C. -19
D. -24
E. -14

09. Pada suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 3 adalah 13 dan jumlah suku kedua dan kelima adalah 30. Rumus suku ke n adalah ...
- A. $4n + 5$ B. $4n - 2$ C. $2n + 1$
D. $4n + 1$ E. $2n + 6$
10. Hasil dari $5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 41$ adalah ...
- A. 379 B. 437 C. 471
D. 407 E. 207
11. Hasil dari $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 43$ adalah ...
- A. 132 B. 147 C. 152
D. 196 E. 253
12. Jika $4 + 6 + 8 + 10 + \dots + x = 130$, maka nilai x adalah ...
- A. 10 B. 15 C. 18
D. 22 E. 32
13. Jika $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 210$, maka nilai x adalah ...
- A. 19 B. 20 C. 21
D. 22 E. 23
14. Suku ke empat dari suatu barisan aritmatika adalah 20 dan jumlah 5 suku pertamanya sama dengan 80. Jumlah sebelas suku pertamanya adalah...
- A. 196 B. 210 C. 264
D. 308 E. 332
15. Dari suatu deret aritmatika diketahui jumlah n suku pertamanya ditentukan dengan rumus $S_n = \frac{n}{2}(3n + 5)$. Suku ke 6 adalah ...
- A. 19 B. 33 C. 36
D. 39 E. 42
16. Jumlah bilangan bulat antara 10 dan 60 yang habis dibagi 3 adalah
- A. 552 B. 486 C. 462
D. 312 E. 396
17. Jumlah bilangan bulat dari 5 sampai 25 yang tidak habis dibagi 4 adalah
- A. 176 B. 182 C. 198
D. 216 E. 235
18. Diketahui deret aritmatika $7 + 10 + 13 + 16 + 19 + \dots + 43$. Suku tengah deret itu adalah
- A. 22 B. 25 C. 28
D. 31 E. 34

19. Diketahui barisan $5 + 9 + 13 + \dots$ (sampai 19 suku). Suku tengah deret itu adalah ...
 A. 29
 B. 33
 C. 37
 D. 41
 E. 45
20. Jika suku tengah deret aritmatika $30 + 24 + 18 + 12 + \dots + p$ adalah 6, maka p adalah suku yang ke ...
 A. 10
 B. 9
 C. 8
 D. 7
 E. 6
21. Tiga buah bilangan $(2 - 2x)$, $(x - 2)$, $(3x - 2)$ membentuk barisan aritmatika. Jika ketiga bilangan itu diteruskan hingga 10 suku, maka jumlahnya adalah ...
 A. 240
 B. 265
 C. 292
 D. 300
 E. 324
22. $\sum_{n=4}^{13} (4n - 2) = \dots$
 A. 320
 B. 410
 C. 423
 D. 512
 E. 564
23. $\sum_{n=5}^{14} (2n + 5) + \sum_{n=6}^{15} (3n - 2) = \dots$
 A. 365
 B. 395
 C. 445
 D. 485
 E. 535
24. Diantara bilangan 5 dan 15 disisipkan empat buah bilangan, sehingga membentuk barisan aritmatika. Beda barisan itu adalah ...
 A. 2
 B. 3
 C. 4
 D. 5
 E. 6
25. Suatu deret aritmatika diketahui jumlah n suku pertamanya dirumuskan $S_n = n^2 + 4n$. Maka nilai dari $U_{10} + U_{11} + U_{12} + \dots + U_{20}$ adalah
 A. 363
 B. 342
 C. 324
 D. 281
 E. 263
26. Dalam suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 7 adalah $5 + 7\sqrt{2}$, dan suku ke-11 adalah $9 + 11\sqrt{2}$. Besar suku ke 10 adalah ...
 A. $7 + 10\sqrt{2}$
 B. $6 + 10\sqrt{2}$
 C. $8 + 9\sqrt{2}$
 D. $6 + 9\sqrt{2}$
 E. $8 + 10\sqrt{2}$
27. Jumlah 10 suku terakhir dari deret $2 + 8 + 14 + 20 + \dots + 80$ adalah ...
 A. 420
 B. 480
 C. 530
 D. 546
 E. 612

28. Suatu deret aritmatika diketahui jumlah n suku pertamanya dirumuskan $S_n = 2n^2 + 4n$. Rumus suku tengahnya adalah ...
- A. $2n - 3$ B. $2n + 4$ C. $2n + 3$
D. $2n - 4$ E. $2n + 6$
29. Jumlah bilangan bulat antara 5 dan 50 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 4 adalah
- A. 272 B. 285 C. 332
D. 341 E. 384
30. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika jumlah ketiga bilangan itu 15 dan hasil kalinya 80, maka bilangan yang terkecil adalah ...
- A. 2 B. 6 C. 7
D. 8 E. 9
31. Jumlah bilangan bulat antara 10 dan 60 yang habis dibagi 3 adalah....
- A. 552 B. 586 C. 462
D. 412 E. 610
32. Jumlah bilangan bulat dari 5 sampai 25 yang tidak habis dibagi 4 adalah
- A. 176 B. 182 C. 198
D. 216 E. 235
33. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika jumlah ketiga bilangan itu 15 dan hasil kalinya 80, maka bilangan yang terkecil adalah...
- A. 2 B. 4 C. 5
D. 6 E. 8
34. Lima buah bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika jumlah kelima bilangan itu 5 dan hasil kalinya 45, maka bilangan yang terbesar adalah...
- A. 5 B. 6 C. 7
D. 8 E. 9
35. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika jumlah ketiga bilangan itu 12 dan hasil kalinya 28, maka bilangan terbesar adalah ...
- A. 5 B. 7 C. 8
D. 10 E. 12
36. Jumlah n suku yang pertama suatu deret aritmatika adalah $S_n = \frac{n}{2}(3n - 17)$. Rumus untuk suku ke- n deret tersebut adalah ...
- A. $3n - 10$ B. $3n - 8$ C. $3n - 6$
D. $3n - 4$ E. $3n - 2$

37. Jumlah tiga suku pertama barisan aritmetika adalah 27 dan jumlah lima buah suku pertama barisan tersebut adalah 85, maka suku ke-4 barisan tersebut adalah ..
A. 33
B. 25
C. 17
D. 41
E. 49
38. Jika akar-akar persamaan $x^4 - (3m+2)x + m^2 = 0$ membentuk barisan aritmatika, maka nilai $m = \dots$
A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8
39. Pada suatu deret aritmatika diketahui $U_5 + U_7 + U_9 + U_{11} + \dots + U_{19} = 112$. Jika nilai $U_9 = 8$ maka jumlah 10 suku pertamanya adalah ...
A. 5
B. 7
C. 8
D. 10
E. 12
40. Suatu barisan aritmatika diketahui $S_n = 2n^2 - 11n$. Jika banyaknya suku genap sama dengan banyaknya suku ganjil, dan jumlah suku-suku genapnya 55, maka jumlah suku-suku ganjilnya adalah...
A. 35
B. 32
C. 28
D. 26
E. 24
41. Sisi-sisi segitiga siku-siku membentuk deret aritmatika. Jika keliling segitiga tersebut 72 cm, maka luasnya adalah ...
A. 164
B. 176
C. 182
D. 198
E. 216
42. Jika S_n adalah jumlah n suku pertama deret aritmatika, maka bentuk sederhana dari $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n$ adalah ...
A. 16
B. 12
C. 8
D. 4
E. 0
43. Jumlah deret aritmatika dengan n suku adalah S_1 . Diantara tiap-tiap dua suku yang berurutan disisipkan 4 bilangan, sehingga terjadi lagi sebuah deret aritmatika baru yang jumlahnya S_2 . Perbandingan $S_1 : S_2 = \dots$
A. $(n + 1) : 5n$
B. $(n - 5) : 2n$
C. $n : (5n - 4)$
D. $3n : (2n - 1)$
E. $2n : (3n + 2)$
44. Suatu barisan aritmatika memiliki suku kedua adalah 8, suku keempat adalah 14 dan suku terakhir 23. Jumlah semua suku barisan tersebut adalah
A. 56
B. 77
C. 98
D. 105
E. 112

45. Diketahui empat buah bilangan membentuk barisan aritmatika naik dengan jumlah 34.
Jika beda barisan itu adalah 3, maka suku terakhirnya adalah ...
- | | | |
|-------|-------|-------|
| A. 10 | B. 11 | C. 12 |
| D. 13 | E. 14 | |

BARISAN DAN DERET

B. Barisan dan Deret Geometri

Jika $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$ adalah suku-suku dari suatu barisan geometri maka, nilai perbandingan $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \text{rasio}$, merupakan angka yang tetap,

Sehingga :

- (1) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... adalah barisan geometri dengan rasio 2
- (2) 96, 48, 24, 12, 6, ... adalah barisan geometri dengan rasio 1/2
- (3) $1 + 5 + 25 + 125 + 625 + \dots$ adalah deret geometri dengan rasio 5
- (4) $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots$ adalah deret geometri dengan rasio -3

Jika suku pertama suatu barisan geometri dinamakan a , dan rasionya r , maka

diperoleh: $U_1 = a$

$$U_2 = ar$$

$$U_3 = ar^2$$

$$U_4 = ar^3 \dots \dots \dots U_n = ar^{n-1}$$

Jadi suku ke- n barisan aritmatika dirumuskan : $U_n = ar^{n-1} \dots \dots \dots (1)$

Jika suatu barisan geometri mempunyai suku pertama a dan ratio r , maka Jumlah sampai n suku pertama (S_n) dapat dirumuskan :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1}$$

$$S_n = (a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1}) \left(\frac{r-1}{r-1} \right), \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{(a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1})(r-1)}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{(ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + ar^n) - (a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1})}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{ar^n - a}{r-1}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, \quad r \neq 1 \dots \dots \dots (2)$$

Jika $r = 1$ maka berlaku :

$$S_n = a + a + a + a + a + a + a + \dots + a \quad (a \text{ sebanyak } n \text{ suku})$$

$$S_n = an \dots \dots \dots (3)$$

Jika banyaknya suku-suku pada barisan geometri berjumlah ganjil (n ganjil), maka suku tengah adalah suku ke $n = \frac{1}{2}(n + 1)$. Sehingga rumus suku tengah dapat ditentukan sebagai berikut

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_T = ar^{\frac{n+1}{2}-1}$$

$$U_T = ar^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$U_T = \left[a^2 r^{n-1} \right]^{1/2}$$

$$U_T = \left[a \cdot ar^{n-1} \right]^{1/2}$$

$$U_T = \left[a \cdot U_n \right]^{1/2}$$

$$U_T = \sqrt{a \cdot U_n}, \text{ dimana n ganjil} \dots\dots\dots (4)$$

Atau $U_T = \sqrt{a \cdot ar^{n-1}}$

$$U_T = a\sqrt{r^{n-1}}, \text{ dimana n ganjil} \dots\dots\dots (5)$$

Selanjutnya kita juga dapat merumuskan hubungan antara U_n dan S_n , yakni :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = \underbrace{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{n-1}}_{S_{n-1}} + U_n$$

$$U_n = S_n - S_{n-1} \dots\dots\dots (5)$$

Untuk lebih memantapkan pemahaman konsep di atas ikutilah contoh soal berikut ini:

01. Tentukanlah suku ke 12 dari barisan 32, 16, 8, 4,

Jawab

$$a = 32, \quad r = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Maka : } U_{12} = ar^{12-1} = 32 \cdot \left[\frac{1}{2} \right]^{11} = 2^5 \cdot [2^{-1}]^{11} = 2^5 \cdot 2^{-11} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

02. Tentukanlah hasil dari $2 + 4 + 8 + \dots + 128$

Jawab

$$a = 2, \quad r = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Maka : } U_n = ar^{n-1}$$

$$128 = 2(2^{n-1})$$

$$64 = 2^{n-1}$$

$$2^6 = 2^{n-1} \quad \text{Maka } n - 1 = 6 \quad n = 7$$

$$\text{Sehingga : } S_7 = \frac{a(r^7 - 1)}{r - 1}$$

$$S_7 = \frac{2(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_7 = 2(128 - 1)$$

$$S_7 = 2(127)$$

$$S_7 = 254$$

03. Suatu barisan geometri diketahui suku ke tiga adalah 12 dan suku ke enam adalah 96. Tentukanlah jumlah empat suku pertamanya

Jawab

$$U_3 = 12 \quad \text{maka } ar^{3-1} = 12 \quad \text{atau } ar^2 = 12 \dots\dots\dots (1)$$

$$U_6 = 96 \quad \text{maka } ar^{6-1} = 96 \quad \text{atau } ar^5 = 96 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Sehingga : } \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{96}{12}$$

$$r^3 = 8 \quad \text{maka } r = 2$$

Dari (1) diperoleh $a \cdot 2^2 = 12$ maka $a = 3$

$$\text{jadi : } S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{3(2^4 - 1)}{2 - 1} = 3(16 - 1) = 45$$

04. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jika jumlah ketiga bilangan itu 35 dan hasil kalinya 1000, maka tentukanlah ketiga bilangan itu !

Jawab

Misalkan ketiga bilangan itu $\frac{a}{r}$, a dan ar

$$\text{Maka } \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1000 \quad \text{atau } a^3 = 1000 \quad \text{Jadi } a = 10$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 35$$

$$\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35$$

$$10 + 10r + 10r^2 = 35r$$

$$10r^2 - 25r + 10 = 0$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\text{Jadi } r = 1/2 \quad \text{atau } r = 2$$

Sehingga ketiga bilangan itu adalah $\frac{10}{1/2}, 10, 10(1/2) \longrightarrow 20, 10 \text{ dan } 5$
atau $\frac{10}{2}, 10, 10(2) \longrightarrow 5, 10 \text{ dan } 20$

05. Jika barisan $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, \dots$ diteruskan sampai 13 suku, maka suku tengahnya adalah

Jawab

$$a = 3, \quad r = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

$$\text{Maka : } U_{13} = ar^{13-1} = 3 \cdot (\sqrt{2})^{12} = 3 \cdot 2^6 = 3(64)$$

$$\text{Sehingga : } U_T = \sqrt{a \cdot U_{13}} = \sqrt{3 \cdot 3(64)} = \sqrt{9(64)} = 3 \cdot 8 = 24$$

06. Diketahui rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah $S_n = 2^{n-3} + 4$.
Tentukanlah nilai $U_5 + U_6$!

Jawab

$$\begin{aligned} U_5 + U_6 &= S_6 - S_4 \\ &= [2^{6-3} + 4] - [2^{4-3} + 4] \\ &= 2^3 + 4 - 2^1 - 4 \\ &= 8 + 4 - 2 - 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

07. Suatu jenis amuba setiap satu detik akan membelah menjadi 2. Jika pada permulaan terdapat 5 amuba, maka tentukanlah banyaknya amuba setelah 7 detik

Jawab

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ r = 2 \\ n = 7 \end{array} \right\} U_7 = \dots??$$

$$\text{maka } U_7 = ar^{7-1}$$

$$U_7 = 5 \cdot 2^6$$

$$U_7 = 5(64)$$

$$U_7 = 320 \text{ amuba}$$

07. Suatu zat radioaktif akan menyusut menjadi setengahnya dalam 1 jam. Jika pada pukul 09.00 massa zat tersebut seberat 32 kg, maka berapa gram sisa zat radioaktif tersebut pada pukul 17.00 ?

Jawab

$$\text{Diketahui : } n = 17 - 9 = 8$$

$$a = 32 \text{ kg} = 32000 \text{ gr}$$

$$r = 1/2$$

$$\text{Ditanya : } U_8$$

$$\text{Jawab : } U_7 = ar^{8-1}$$

$$U_7 = 32 \cdot (1/2)^7$$

$$U_7 = 1/4 \text{ satuan}$$

09. Jumlah 5 suku pertama dari deret $-1 + 5 - 25 + 125 - \dots$ adalah ...
A. 424
B. -315
C. -412
D. -521
E. 324
10. Jumlah 8 suku pertama deret $2 + 2\sqrt{3} + 6 + \dots$ adalah ...
A. $80\sqrt{3} + 80$
B. $36\sqrt{3} + 36$
C. $60\sqrt{3} + 60$
D. $48\sqrt{3} + 48$
E. $32\sqrt{3} + 32$
11. Jika diketahui deret $4 + 8 + 16 + \dots + x = 124$ maka nilai x adalah ...
A. 64
B. 128
C. 256
D. 132
E. 248
12. Diketahui suatu barisan geometri dengan suku pertama $\sqrt[3]{x}$ dan suku kedua $= \sqrt{x}$. Maka U_5 sama dengan
A. x
B. $x^{1/4}$
C. $x^{2/3}$
D. $x^{1/2}$
E. $x^{1/5}$
13. Jika $p\sqrt{q}$, $q\sqrt{p}$ merupakan dua suku pertama deret geometri, maka suku ke tiga adalah
A. $p\sqrt{p}$
B. $q\sqrt{q}$
C. \sqrt{p}
D. \sqrt{q}
E. p
14. Diketahui deret geometri $3 + 9 + 27 + 81 + \dots$. Jika deret tersebut diteruskan sampai 9 suku, maka suku tengahnya adalah ...
A. 81
B. 124
C. 243
D. 729
E. 812
15. Tiga buah bilangan $k - 1$, $2k - 2$, $3k + 1$ berturut-turut membentuk barisan geometri. Maka bilangan terbesar adalah ...
A. 8
B. 16
C. 24
D. 32
E. 48
16. Jumlah n suku pertama deret geometri dinyatakan dengan $S_n = 2^{n+2} - 3$. Rumus suku ke- n adalah...
A. 2^{n-1}
B. 2^{n+1}
C. 2^{n+3}
D. 2^{n-3}
E. 2^n

17. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri. Jika jumlah ketiga bilangan itu 13 dan hasil kalinya 27 maka suku ke-tiga adalah ...
 A. 2
 B. 3
 C. 4
 D. 9
 E. 12
18. Suku pertama dan kedua suatu deret geometri berturut-turut adalah p^{-4} dan p^x . Jika suku ke 8 adalah p^{52} maka nilai $x = \dots$
 A. 7
 B. 6
 C. 5
 D. 4
 E. 3
19. Tiga buah bilangan merupakan barisan geometri dengan jumlah 26. Jika suku tengahnya ditambah 4 maka akan terbentuk barisan aritmatika. Suku pertama barisan itu adalah...
 A. 16
 B. 12
 C. 8
 D. 6
 E. 2
20. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku tengahnya dikurangi 2 maka akan terbentuk barisan geometri dengan rasio $1/2$. Jumlah barisan aritmetika tersebut adalah ...
 A. 50
 B. 45
 C. 40
 D. 35
 E. 30
21. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmatika yang berjumlah 3. Jika suku kedua dan ketiga dipertukarkan letaknya maka terbentuklah barisan geometri. Ratio barisan geometri itu adalah....
 A. -2
 B. $-1/2$
 C. $1/2$
 D. 2
 E. 3
22. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 6 dan suku keempat adalah 48. Jumlah enam suku pertama deret tersebut adalah ... (UN 2008)
 A. 368
 B. 369
 C. 378
 D. 379
 E. 384
23. Diketahui barisan $2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, \dots$ Suku keberapakah 128 ?
 A. 11
 B. 12
 C. 13
 D. 14
 E. 15
24. Suatu deret geometri diketahui suku ke-n dirumuskan dengan $U_n = 2^{3-2n}$ Rasio deret tersebut adalah ...
 A. 4
 B. $1/2$
 C. $1/4$
 D. $-1/4$
 E. $-1/2$

25. Dari suatu barisan geometri ditentukan $U_1+U_2+U_3 = 13$, dan $U_1.U_2.U_3 = 27$. Maka nilai U_3 pada barisan geometri itu adalah....
- A. 1 atau 3
B. 1 atau 9
C. 3 atau 9
D. 3 atau 27
E. 1 atau 2
26. Jika U_n adalah suku ke-n suatu barisan geometri maka jumlah 4 suku pertama barisan tersebut sama dengan
- A. $\frac{u_1(u_1 - u_4)}{u_1 - u_2}$
B. $\frac{u_1 - u_4}{u_1 - u_2}$
C. $\frac{u_1(u_1 + u_5)}{u_1 - u_2}$
D. $\frac{u_1(u_1 - u_5)}{u_1 - u_2}$
E. $\frac{u_1 - u_5}{u_1 - u_2}$
27. Diketahui deret geometri dengan $S_n = 240$, $S_{n+1} = 248$ dan $S_{n+2} = 252$. Suku pertama deret itu adalah ...
- A. 64
B. 72
C. 84
D. 96
E. 128
28. Diketahui empat bilangan, tiga bilangan pertama merupakan barisan aritmatika dan tiga bilangan terakhir merupakan barisan geometri. Jumlah bilangan kedua dan keempat adalah 10. Jumlah bilangan pertama dan ketiga adalah 18. Jumlah keempat bilangan tersebut adalah ...
- A. 24
B. 31
C. 44
D. 52
E. 81
29. Jumlah enam suku pertama deret geometri adalah 252. Sedangkan jumlah tiga suku pertamanya adalah 28. Jumlah empat suku pertama deret itu adalah ...
- A. 42
B. 48
C. 54
D. 60
E. 72
30. Suatu deret geometri dimana semua sukunya positif. Jika $U_1 + U_2 + U_3 = 10,5$ dan ${}^2\log U_1 + {}^2\log U_2 + {}^2\log U_3 = {}^2\log U_4 - 2$ maka suku ke-empat deret itu adalah ...
- A. 32
B. 34
C. 36
D. 40
E. 42
31. Suatu barisan geometri: 16, 8, 4, 2, ... Maka jumlah n suku pertamanya adalah
- A. $2^{n-5} - 32$
B. $2^{5-n} - 32$
C. $32 - 2^{5-n}$
D. $32 - 2^{n-5}$
E. $32 - \left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}$

BARISAN DAN DERET

D. Barisan dan Deret Geometri Tak Hingga

Barisan geometri tak hingga adalah suatu barisan geometri yang mempunyai tak hingga banyaknya suku-suku. Barisan geometri tak hingga dikatakan konvergen jika suku ke tak hingga dari barisan itu menuju ke suatu nilai tertentu. Syaratnya jika nilai rasio terletak antara -1 dan 1.

Deret geometri tak hingga yang konvergen ini dapat ditentukan jumlahnya, dengan aturan sebagai berikut :

Jika $-1 < r < 1$ maka jumlah sampai takhingga suku-sukunya ($n \rightarrow \infty$) diperoleh :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a(r^\infty - 1)}{r - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a(0 - 1)}{r - 1}$$

$$S_\infty = \frac{-a}{r - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} \dots\dots\dots (6)$$

Untuk lebih memantapkan pemahaman konsep di atas ikutilah contoh soal berikut ini:

01. Suatu deret geometri diketahui suku pertamanya 4. Jika jumlah tak hingga suku-suku deret geometri itu adalah 12, tentukanlah rasionya !

Jawab

$$a = 4$$

$$S_\infty = 12$$

$$\text{Maka } S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$$12 = \frac{4}{1 - r}$$

$$12(1 - r) = 4$$

$$12 - 12r = 4$$

$$-12r = -8 \text{ maka } r = 2/3$$

02. Suatu deret geometri tak hingga diketahui suku pertamanya 24 dan rasionya $1/3$.
Tentukanlah jumlah suku-suku genapnya !

Jawab

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7 + ar^8 + ar^9 + ar^{10} + \dots = S_{\infty}$$

suku-suku genapnya adalah :

$$ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + ar^9 + \dots = S_{\infty}$$

sehingga : suku pertama = ar dan rasio = $\frac{ar^3}{ar} = r^2$

Jumlah sampai tak hingga suku-suku genap : $S_{\infty} = \frac{ar}{1-r^2}$

$$S_{\infty} = \frac{24(1/3)}{1-(1/3)^2}$$

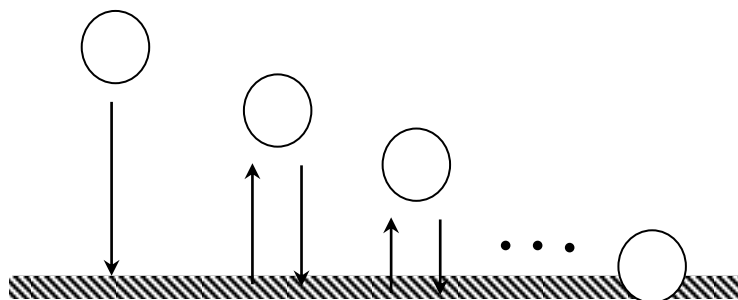
$$S_{\infty} = \frac{8}{1-(1/9)}$$

$$S_{\infty} = \frac{8}{8/9}$$

$$S_{\infty} = 9$$

03. Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 12 m. Jika setiap kali jatuh, bola memantul kembali ke atas dengan ketinggian $2/3$ dari ketinggian sebelumnya, maka hitunglah panjang lintasan bola dari mulai dijatuhkan hingga berhenti !

Jawab



Lintasan ke bawah : 12, 8, $16/3$, $32/9$, $64/27$, $S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{12}{1-(2/3)} = \frac{12}{1/3} = 36$

Lintasan ke atas : 8, $16/3$, $32/9$, $64/27$, $S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-(2/3)} = \frac{8}{1/3} = 24$

Jadi total lintasan seluruhnya = $36 + 24 = 60$ m

Jika dianalisa secara umum, rumus menentukan panjang lintasan benda yang dijatuhkan dari ketinggian h dan setelah menyentuh lantai bola memantul sejauh r kali tinggi sebelumnya dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\text{Lintasan ke bawah : } S_{\infty} = \frac{h}{1-r}$$

$$\text{Lintasan ke bawah : } S_{\infty} = \frac{hr}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga total lintasan seluruhnya} &= \frac{h}{1-r} + \frac{hr}{1-r} \\ &= \frac{h+hr}{1-r} \\ &= \left(\frac{1+r}{1-r} \right) h \end{aligned}$$

SOAL LATIHAN 04

D. Deret Geometri Tak Hingga

01. Jumlah tak hingga dari deret geometri $54 + 18 + 6 + 2 + \frac{2}{3} + \dots$ adalah ...
A. 81
B. 64
C. 48
D. 32
E. 24
02. Jumlah tak hingga dari deret geometri $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$ adalah ...
A. $\frac{39}{4}$
B. $\frac{27}{4}$
C. 12
D. 16
E. $\frac{25}{4}$
03. Suatu deret geometri tak hingga diketahui jumlahnya 81. Jika rasionya $\frac{2}{3}$ maka suku ketiganya adalah ...
A. 32
B. 24
C. 18
D. 16
E. 12
04. Jika $2 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} + \dots = 2p$, maka nilai p sama dengan ...
A. $-\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{2}$
C. 2
D. 3
E. 4
05. Suatu deret geometri tak hingga diketahui jumlahnya 9. Jika suku pertamanya 6 maka suku ke lima adalah ...
A. 486
B. $\frac{2}{9}$
C. $\frac{2}{27}$
D. $\frac{2}{81}$
E. $\frac{2}{243}$
06. Jumlah deret $4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + 2 + \dots$ adalah
A. $6\sqrt{2} + 6$
B. $4\sqrt{2} - 2$
C. $4\sqrt{2} + 4$
D. $8\sqrt{2} + 8$
E. $8\sqrt{2} - 8$
07. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \dots = \dots$
A. 6
B. $\frac{3}{2}$
C. 4
D. $\frac{5}{2}$
E. $\frac{7}{2}$
08. Suatu deret geometri tak hingga diketahui jumlah suku-suku ganjilnya $\frac{256}{3}$ dan suku-suku genapnya $\frac{128}{3}$. Suku ke lima itu adalah
A. 8
B. 4
C. 2
D. 1
E. $\frac{1}{2}$

09. Suatu deret geometri diketahui suku kedua adalah 12 dan suku kelima adalah $\frac{3}{2}$, maka jumlah sampai tak hingga suku-sukunya adalah
- A. 20
B. 24
C. 36
D. 48
E. 64
10. Jumlah deret geometri tak hingga adalah $\frac{3}{4}$, sedangkan jumlah suku-suku nomor genapnya adalah $\frac{3}{16}$. Rasio deret geometri itu adalah....
- A. $\frac{1}{9}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{1}{5}$
11. Jika diketahui $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + \dots = 4^x + 4^{x-1} + \dots$, maka nilai x yang memenuhi adalah ...
- A. ${}^2\log\frac{1}{3}$
B. ${}^2\log\frac{3}{2}$
C. ${}^3\log\frac{1}{2}$
D. ${}^2\log 3$
E. ${}^3\log 2$
12. Suatu deret geometri turun mempunyai jumlah tak hingga 24. Jika jumlah suku-suku bernomor ganjil adalah 18 maka suku kedua adalah...
- A. $\frac{16}{3}$
B. $\frac{20}{3}$
C. 6
D. 8
E. 15
13. Jumlah tak hingga suatu deret aritmatika adalah 8 dan jumlah semua suku yang bernomor genap adalah $\frac{8}{3}$. Suku ke-5 deret tersebut adalah ...
- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$
D. 1
E. 2
14. Jika r rasio suatu deret geometri tak hingga yang konvergen dan C jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{r+3} + \frac{1}{(r+3)^2} + \frac{1}{(r+3)^3} + \dots$, maka
- A. $\frac{1}{4} < C < \frac{1}{2}$
B. $\frac{3}{4} < C < \frac{4}{3}$
C. $\frac{3}{8} < C < \frac{3}{4}$
D. $\frac{1}{5} < C < \frac{4}{5}$
E. $\frac{1}{3} < C < 1$
15. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Benda itu mula – mula bergerak ke kanan sejauh S , kemudian bergerak ke kiri sejauh $\frac{1}{2}S$, kemudian ke kanan lagi sejauh $\frac{1}{4}S$, demikian seterusnya. Panjang lintasan yang ditempuh benda tersebut sampai berhenti adalah
- A. $3S$
B. $1\frac{1}{2}S$
C. $2\frac{1}{2}S$
D. $1\frac{1}{3}S$
E. $2S$

16. Suku ke- n suatu deret geometri adalah 4^{-n} . maka jumlah tak hingga deret tersebut adalah ...
- A. 3
D. $1/2$
- B. 2
E. $1/3$
- C. 1
17. Jumlah suku deret geometri tak hingga adalah 1. Jika suku pertama deretnya adalah $2x + 1$, maka semua nilai x harus memenuhi pertaksamaan
- A. $x < \frac{1}{2}$
D. $-\frac{1}{2} < x < 0$
- B. $0 < x < \frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
- C. $0 < x < 1$
18. Pada suatu deret geometri diketahui $S_2 = 16$ dan $S_3 = 24$. Jika rasionya negatif maka jumlah takhingga deret itu adalah ...
- A. 18
D. $21\frac{1}{3}$
- B. $18\frac{2}{3}$
E. $24\frac{1}{3}$
- C. 21
19. Sebuah bola tenis dijatuhkan dari ketinggian 2 m dan memantul kembali menjadi $\frac{4}{3}$ tinggi sebelumnya. Panjang lintasan bola tenis tersebut sampai berhenti adalah ...
- A. 8 m
D. 24 m
- B. 16 m
E. 32 m
- C. 18 m

BARISAN DAN DERET

E. Aplikasi Barisan dan Deret

Salah satu aplikasi barisan dan deret pada bidang ekonomi adalah pada perhitungan bunga pada simpanan uang di bank atau koperasi atau lembaga lain sejenisnya. Terdapat dua macam jenis bunga pada simpanan, yaitu :

(1) Bunga Tunggal (Barisan Aritmatika)

Yaitu metoda pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan modal pokok pinjaman atau modal awal simpanan saja.

Rumus bunga tunggal : $M_n = M_o (1 + in)$

Dimana : M_n = Nilai modal simpanan periode ke-n

M_o = Nilai modal awal simpanan

i = Persentase bunga simpanan

n = Periode pembungaan

(2) Bunga Majemuk (Barisan geometri)

Yaitu metoda pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan besar modal atau simpanan pada periode bunga berjalan

Rumus bunga majemuk : $M_n = M_o (1 + i)^n$

Dimana : M_n = Nilai modal simpanan setelah periode ke-n

M_o = Nilai modal awal simpanan

i = Persentase bunga simpanan

n = Periode pembungaan

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Pak Ahmad memerlukan tambahan modal untuk usahanya berdagang makanan, sehingga ia meminjam uang dikoperasi "Maju Jaya" sebesar Rp. 4.000.000 dengan imbalan jasa berupa bunga sebesar 2% dari pokok pinjaman per bulan. Jika pak Ahmad akan melunasi pinjaman itu beserta bunganya setelah 6 bulan, maka tentukanlah total pengembalian pak Ahmad

Jawab

Diketahui : $M_o = 40.000.000$

$i = 2\% = 0,02$

$n = 6$

maka $M_n = M_o (1 + in)$

$M_6 = 40.000.000(1 + 0,02(6))$

$M_6 = 40.000.000(1,12)$

$M_6 = 4.480.000$

Jadi total pengembalian pak Ahmad adalah Rp. 4.480.000

02. Tina menginvestasikan uangnya di koperasi "Bangun bersama" sebesar Rp. 2.000.000. Dengan sistem bunga tunggal sebesar 2% per-bulan, berapakah besar modal Tina setelah 1,5 tahun ?

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_0 = 2.000.000$$

$$i = 2\% = 0,02$$

$$n = 1,5 \text{ tahun} = 18 \text{ bulan}$$

$$\text{maka } M_n = M_0 (1 + in)$$

$$M_{18} = 2.000.000(1 + 0,02(18))$$

$$M_{18} = 2.000.000(1 + 0,36)$$

$$M_{18} = 2.000.000(1,36)$$

$$M_{18} = 2.720.000$$

Jadi besar modal Tina setelah 1,5 tahun adalah Rp. 2.720.000

03. Arman menabung sejumlah uang di sebuah bank. Jenis tabungan yang dipilih Arman adalah tabungan dengan sistem bunga tunggal sebesar 3% per caturwulan. Jika setelah 3 tahun tabungan Arman menjadi Rp. 25.400.000 maka tentukanlah besar tabungan awal Arman di bank itu

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_n = 25.400.000$$

$$i = 3\% = 0,03$$

$$n = \frac{3 \text{ tahun}}{4 \text{ bulan}} = \frac{36 \text{ bulan}}{4 \text{ bulan}} = 9$$

$$\text{maka } M_n = M_0 (1 + in)$$

$$25.400.000 = M_0 (1 + 0,03(9))$$

$$25.400.000 = M_0 (1 + 0,27)$$

$$25.400.000 = M_0 (1,27)$$

$$M_0 = \frac{25.400.000}{1,27}$$

$$M_0 = 20.000.000$$

Jadi besar tabungan awal Arman di bank itu adalah Rp. 20.000.000

04. Pak Budi menabung sebesar Rp. 8.000.000 di suatu bank. Jika bank memberlakukan sistem bunga tunggal sebesar 3% setiap triwulan, maka setelah berapa lamakah uang tabungan pak Budi menjadi Rp. 10.400.000

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_0 = 8.000.000$$

$$i = 3\% = 0,03$$

$$M_n = 10.400.000$$

$$\begin{aligned} \text{maka } M_n &= M_o (1 + in) \\ 10.400.000 &= 8.000.000 (1 + 0,03n) \\ 10.400.000 &= 8.000.000 + 240.000n \\ 2.400.000 &= 240.000n \\ n &= \frac{2.400.000}{240.000} \\ n &= 10 \end{aligned}$$

sehingga $n = 10$ triwulan = (10×3) bulan = 30 bulan = 2,5 tahun

05. Pak Mulyo adalah seorang pengusaha batik. Ia menyimpan uangnya sebesar Rp. 100.000.000 di sebuah bank. Bank tersebut memberikan bunga tabungan dengan sistem bunga majemuk sebesar 1,2% per bulan. Berapakah besarnya tabungan pak Mulyo setelah 5 bulan ?

Jawab

$$\begin{aligned} \text{Diketahui : } M_o &= 100.000.000 \\ i &= 1,2\% = 0,12 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$\begin{aligned} M_n &= M_o (1+i)^n \\ M_{10} &= 100.000.000 (1+0,12)^5 \\ M_{10} &= 100.000.000 (1,12)^5 \\ M_{10} &= 100.000.000 \cdot (1,762) \\ M_{10} &= 176.200.000 \end{aligned}$$

06. La Ode Ahdan, seorang mahasiswa dari Sulawesi Tenggara, menginvestasikan uangnya sebesar Rp. 200.000.000 di salah satu bank. Andaikan pihak bank memberikan bunga majemuk sebesar 4% per-semester, berapa besar modal investasi itu setelah 2 tahun ?

Jawab

$$\begin{aligned} \text{Diketahui : } M_o &= 200.000.000 \\ i &= 4\% = 0,04 \\ n &= 2 \text{ tahun} = 4 \text{ semester} \end{aligned}$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$\begin{aligned} M_n &= M_o (1+i)^n \\ M_4 &= 200.000.000 (1+0,04)^4 \\ M_4 &= 200.000.000 (1,04)^4 \\ M_4 &= 200.000.000 \cdot (1,169) \\ M_4 &= 233.800.000 \end{aligned}$$

07. Santi menyimpan uangnya di sebuah bank sebesar Rp. 2.000.000. Setelah tiga tahun uang tabungan Santi menjadi Rp. 2.662.000. Jika bank tersebut menerapkan sistem bunga majemuk, berapa persenkah per-tahun bunga bank tersebut ?

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_o = 2.000.000$$

$$M_n = 2.662.000$$

$$n = 3$$

Ditanya : $i = \dots ?$

Jawab

$$M_n = M_o (1+i)^n$$

$$2.662.000 = 2.000.000 (1+i)^3$$

$$\frac{2662000}{2000000} = (1+i)^3$$

$$1,331 = (1+i)^3$$

$$1,1^3 = (1+i)^3$$

$$\text{Maka : } 1 + i = 1,1$$

$$i = 1,1 - 1$$

$$i = 0,1 \quad \text{Jadi } i = 10\%$$

Aplikasi lain dari barisan dan deret adalah pada pertumbuhan dan peluruhan

(1) Pertumbuhan yaitu bertambahnya jumlah / nilai suatu objek yang mengikuti pola aritmatika atau geometri.

Contoh : (1) Perkembangbiakan bakteri

(2) Pertumbuhan penduduk

(2) Peluruhan yaitu berkurangnya jumlah / nilai suatu objek yang mengikuti pola aritmatika atau geometri

Contoh : (1) Penurunan nilai jual mobil

(2) Penurunan jumlah populasi hewan

Rumus Pertumbuhan aritmatika :

$$M_n = M_o (1 + pn) \quad \text{atau} \quad M_n = M_o + bn$$

Dimana : M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu

M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula

p = Persentase pertumbuhan

b = Nilai beda pertumbuhan

n = jangka waktu pertumbuhan

Rumus Pertumbuhan geometri :

$$M_n = M_o (1+p)^n \quad \text{atau} \quad M_n = M_o \cdot r^n$$

Dimana : M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu

M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula

i = Persentase pertumbuhan

r = Ratio pertumbuhan ($r > 1$)

n = jangka waktu pertumbuhan

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

01. Elsa mulai bekerja pada suatu perusahaan pada awal tahun 2005 dengan gaji permulaan sebesar Rp. 3.000.000. Jika dia mendapatkan kenaikan gaji secara berkala setiap tahunnya sebesar Rp. 200.000 maka berapakah gaji yang diterima Elsa pada awal tahun 2011?

Jawab

Diketahui : $M_o = 3.000.000$

$$b = 200.000$$

$$n = 6$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$M_n = M_o + bn$$

$$M_n = 3.000.000 + 200.000(6)$$

$$M_n = 3.000.000 + 1.200.000$$

$$M_n = \text{Rp. } 4.200.000$$

02. Suatu koloni bakteri akan membelah menjadi dua setiap lima menit. Jika pada permulaan terdapat 90 bakteri, maka tentukanlah jumlah bakteri setelah setengah jam ?

Jawab

Diketahui : $M_o = 90$

$$r = 2$$

$$n = 4$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$M_n = M_o r^n$$

$$M_n = 90 \times 2^4$$

$$M_n = 90 (16)$$

$$M_n = 1440 \text{ bakteri}$$

03. Jumlah penduduk suatu kota bertambah menurut pola geometri sebesar 0,1% per bulan. Berarti jika jumlah penduduk kota itu semula 3 juta orang maka pada akhir bulan ke-3 jumlahnya telah menjadi sekitar ... orang

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_0 = 3.000.000$$

$$i = 0,1\% = 0,001$$

$$n = 3$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$M_n = M_0 (1+i)^n$$

$$M_n = 3.000.000 (1+0,001)^3$$

$$M_n = 3.000.000 (1,001)^3$$

$$M_n = 3.000.000 (1,003003)$$

$$M_n = 3.009.009 \text{ orang}$$

04. Berdasarkan sensus penduduk, jumlah penduduk di suatu kota adalah 6 juta jiwa pada tahun 2000, dan diperkirakan menjadi dua kali lipat pada tahun 2005. Maka tentukanlah jumlah penduduk pada tahun 2020

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_0 = 6.000.000$$

$$M_n = 2 \cdot M_0$$

$$n = 2005 - 2000 = 5$$

$$\text{maka : } M_n = M_0 r^n$$

$$2M_0 = M_0 r^5 \quad \text{Jadi} \quad r^5 = 2$$

$$\text{Untuk } n = 2020 - 2000 = 20 \text{ maka } M_n = M_0 r^{20}$$

$$M_n = 6.000.000 (r^5)^4$$

$$M_n = 6.000.000 (2)^4$$

$$M_n = 6.000.000 \times 16$$

$$M_n = 96.000.000 \text{ jiwa}$$

Rumus Peluruhan aritmatika :

$$M_n = M_0 (1 - in) \quad \text{atau} \quad M_n = M_0 - bn$$

Dimana : M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu

M_0 = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula

p = Persentase peluruhan

b = Nilai beda peluruhan

n = jangka waktu peluruhan

Rumus Peluruhan geometri :

$$M_n = M_o (1-p)^n \quad \text{atau} \quad M_n = M_o \cdot r^n$$

Dimana : M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu

M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula

i = Persentase peluruhan

r = Ratio peluruhan ($r < 1$)

n = jangka waktu peluruhan

Untuk lebih jelasnya, ikutilah contoh soal berikut ini :

05. Sebuah mobil dibeli dengan harga Rp.200.000.000. Jika setiap tahun harganya mengalami penyusutan 20% dari nilai tahun sebelumnya, maka tentukanlah harga mobil itu setelah dipakai selama 5 tahun

Jawab

Diketahui : $M_o = 200.000.000$

$$i = 20\% = 0,2$$

$$n = 5$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$M_n = M_o (1-i)^n$$

$$M_n = 200.000.000 (1-0,2)^5$$

$$M_n = 200.000.000 (0,8)^5$$

$$M_n = 200.000.000(0,32768)$$

$$M_n = 65.536.000$$

06. Suatu pabrik kendaraan bermotor roda dua mulai memproduksi pertama pada tahun 2010 sebanyak 20.000 unit kendaraan. Tiap tahun produksi pabrik tersebut turun 100 unit. Berapakah jumlah produksi pada tahun 2016?

Jawab

Diketahui : $M_o = 20.000$

$$b = 100$$

$$n = 6$$

Ditanya : $M_n = \dots ?$

Jawab

$$M_n = M_o - bn$$

$$M_n = 20.000 - 100(6)$$

$$M_n = 20.000 - 600$$

$$M_n = 19.400 \text{ unit}$$

07. Suatu jenis hewan langka setiap tahun mengalami penurunan jumlah populasi sebanyak $\frac{1}{3}$ dari jumlah populasi tahun sebelumnya. Jika pada tahun 2015 diperkirakan jumlah populasi hewan tersebut disuatu pulau sebanyak 720 ekor, maka berapakah perkiraan jumlah hewan itu pada tahun 2019 ?

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_0 = 360$$

$$r = \frac{1}{4}$$

$$n = 4$$

$$\text{Ditanya : } M_n = \dots ?$$

$$\text{Jawab } M_n = M_0 r^n$$

$$M_n = 360 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$M_n = 360 \times \left(\frac{1}{81}\right)$$

$$M_n = 14,44$$

$$M_n = 14 \text{ ekor}$$

08. Dengan pesatnya pembangunan pemukiman, maka daerah pesawahan semakin lama semakin sempit. Menurut data statistik, pada tahun 2003 total areal sawah di daerah itu sekitar 400 ha dan setiap tahun berkurang 5% dari total areal sawah semula . Berapakah diperkirakan areal sawah pada tahun 2015?

Jawab

$$\text{Diketahui : } M_0 = 400$$

$$i = 5\% = 0,05$$

$$n = 12$$

$$\text{Ditanya : } M_n = \dots ?$$

Jawab

$$M_n = M_0 (1 - in)$$

$$M_n = 400(1 - 0,05 \times 12)$$

$$M_n = 400(1 - 0,6)$$

$$M_n = 400(0,4)$$

$$M_n = 160 \text{ ha}$$

09. Dalam waktu 15 tahun sebuah unsur meluruh sebanyak 45 mg. Apabila waktu paruh unsur tersebut adalah 5 tahun, tentukan jumlah awal unsur tersebut

Jawab

Untuk $n = 5$ maka $M_n = \frac{1}{2} M_o$

Sehingga : $M_n = M_o r^n$

$$\frac{1}{2} M_o = M_o r^5 \quad \text{maka } r^5 = \frac{1}{2}$$

Untuk $n = 15$ maka $M_n = 45$

Sehingga : $M_n = M_o r^n$

$$45 = M_o r^{15}$$

$$45 = M_o (r^5)^3$$

$$45 = M_o (1/2)^3$$

$$45 = M_o (1/8) \quad \text{Jadi } M_o = 350 \text{ mg}$$

10. Dari penimbangan zat thorium 234 ternyata massanya 1,28 mg. Jika setelah 48 hari kemudian penimbangannya menghasilkan thorium 0,32 mg maka tentukanlah waktu paruh thorium tersebut

Jawab

Waktu paruh terjadi jika $M_n = \frac{1}{2} M_o$

Sehingga $\frac{1}{2} M_o = M_o r^n$ artinya $r^n = \frac{1}{2}$ (1)

$$M_n = M_o r^n$$

$$0,32 = 1,28 r^{48}$$

$$r^{48} = \frac{0,32}{1,28}$$

$$r^{48} = \frac{1}{4}$$

$$(r^{24})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{artinya } r^{24} = \frac{1}{2} \quad \text{..... (2)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh waktu paruh $n = 24$ hari

SOAL LATIHAN 05

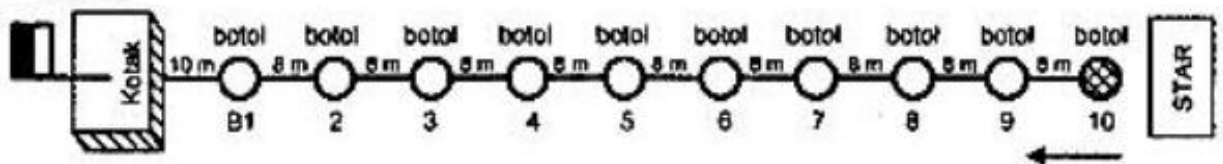
E. Aplikasi Barisan dan Deret

01. Pak Ali menabung Rp1.000.000,00 di suatu bank dengan bunga tunggal sebesar 4% per tahun. Pak Budi juga menabung Rp1.000.000,00 di bank yang sama dengan bunga majemuk 4% per tahun. Setelah 5 tahun. Tentukan tabungan siapakah yang lebih banyak.
- A. 81 B. 64 C. 48
D. 32 E. 24
02. Jumlah penderita suatu jenis penyakit langka berkembang dengan sangat pesat menjadi 5% dari jumlah tahun sebelumnya. Jika pada tahun 2012 tercatat ada 30 orang penderita, maka tentukan perkiraan jumlah penderita pada tahun 2016 !
- A. 48 orang B. 42 orang C. 36 orang
D. 34 orang E. 32 orang
03. Pada musim panen mangga, setiap hari Pak Bobi memetik mangga sebanyak $(8n + 3)$. Total seluruh mangga yang dipetik pak Bobi selama sebulan (30 hari) adalah
- A. 2710 buah B. 3810 buah C. 4910 buah
D. 5010 buah E. 5110 buah
04. Seorang pegawai sebuah toko mendapat gaji permulaan sebesar Rp. 100.000,- perbulan. Jika setiap bulan ia mendapat kenaikan gaji Rp. 5000,- maka gaji yang ia terima tepat pada awal tahun kedua sebesar...
- A. Rp. 140.000 B. Rp. 145.000 C. Rp. 150.000
D. Rp. 155.000 E. Rp. 160.000
05. Bila hutang sebesar \$ 880 diangsur berturut-turut tiap bulan \$. 25, \$. 27, \$. 29 dan seterusnya sampai lunas. Maka lamanya angsuran itu bulan
- A. 16 B. 20 C. 34
D. 44 E. 48
06. Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku merupakan barisan aritmatika. Jika sisi siku-siku pendeknya 6 cm, maka sisi siku-siku panjangnya adalah...
- A. 8 cm B. 10 cm C. 12 cm
D. 14 cm E. 15 cm
07. Seutas tali dipotong menjadi 6 bagian dan masing-masing potongan itu membentuk barisan geometri. Jika potongan tali yang paling pendek sama dengan 3 cm dan potongan tali paling panjang sama dengan 96 cm, maka panjang keseluruhan tali adalah
- A. 172 cm B. 189 cm C. 212 cm
D. 232 cm E. 256 cm

08. Suatu jenis bakteri setiap satu detik akan membelah menjadi 3. Jika pada permulaan ada 2 bakteri, maka banyaknya bakteri setelah 6 detik adalah bakteri
- A. 81
B. 189
C. 243
D. 316
E. 486
09. Pada akhir tahun 2006, ilmuwan PBB melaporkan bahwa untuk mengurangi pemanasan global, disarankan agar masyarakat mengadopsi pola makan vegan (mengurangi daging dan produk hewan). Jika pada bulan Maret, April dan Mei 2007, jumlah orang yang vegan berturut-turut adalah 200.000, 400.000 dan 800.000 orang, maka diperkirakan pada bulan Oktober 2007, jumlah orang yang vegan adalah ... orang.
- A. 12.800.000
B. 25.600.000
C. 51.200.000
D. 102.400.000
E. 204.800.000
10. Seutas tali dibagi menjadi 7 bagian dengan panjang tiap potongan mengikuti barisan geometri. Jika panjang tali paling pendek 64 cm dan yang terpanjang 729 cm, maka panjang tali tersebut adalah ... cm
- A. 2039
B. 2040
C. 2049
D. 2050
E. 2059
11. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Mula –mula bergerak ke kanan 72 cm, kemudian ke kiri 24 cm, kemudian ke kanan lagi 8 cm, demikian seterusnya sampai benda tersebut berhenti. Maka panjang lintasan yang ditempuh benda tersebut sampai berhenti adalah
- A. 54 cm
B. 68 cm
C. 84 cm
D. 108 cm
E. 124 cm
12. Seseorang berjalan lurus dengan kecepatan tetap 4 km/jam selama satu jam pertama. Pada satu jam kedua kecepatannya dikurangi setengahnya, demikian seterusnya sampai berhenti. Maka jarak yang telah ditempuh orang itu sampai ia berhenti adalah
- A. 6 km
B. 8 km
C. 10 km
D. 12 km
E. 16 km
13. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 16 meter dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Jika pemantulan berlangsung terus menerus hingga berhenti, maka panjang lintasan bola adalah ...
- A. 94
B. 96
C. 108
D. 112
E. 116
14. Seorang ibu membagikan uang kepada 5 anaknya menurut aturan deret aritmatika. Jika uang yang diterima anak kedua Rp. 6.500 dan anak keempat Rp. 9.500, maka jumlah seluruh uang yang dibagikan adalah ...
- A. Rp. 30.000
B. Rp. 35.000
C. Rp. 40.000
D. Rp. 45.000
E. Rp. 50.000

15. Jumlah penduduk suatu kota tiap 10 tahun menjadi dua kali lipat. Menurut hasil sensus pada tahun 2012 jumlah penduduk kota tersebut adalah 3,2 juta orang. Ini berarti bahwa pada tahun 1962 jumlah penduduk kota itu baru mencapai ...orang.
- A. 80 ribu B. 100 ribu C. 120 ribu
D. 160 ribu E. 200 ribu
16. Seorang perawat setiap hari membuat gulungan kapas kecil untuk pembersih dan mencatatnya. Ternyata banyaknya gulungan kapas kecil pada hari ke-n memenuhi rumus $U_n = 80 + 20n$. Banyaknya gulungan kapas kecil selama 18 hari yang pertama adalah ...
- A. 4.840 buah B. 4.850 buah C. 4.860 buah
D. 4.870 buah E. 4.880 buah
17. Jumlah penduduk yang mengidap penyakit darah tinggi di Indonesia tiap 10 tahun menjadi $1\frac{1}{2}$ kali lipat. Menurut perhitungan, pada tahun 2010 nanti akan mencapai 1,215 juta orang ini. Ini berarti bahwa pada tahun 1960 jumlah penduduk yang mengidap penyakit darah tinggi baru mencapai ...
- A. 80 ribu orang B. 100 ribu orang C. 120 ribu orang
D. 160 ribu orang E. 180 ribu orang
18. Pada saat awal diamati 8 virus jenis tertentu. Setiap 24 jam masing-masing virus membelah diri menjadi dua. Jika setiap 96 jam seperempat dari virus dibunuh, maka banyaknya virus pada hari ke-6 adalah ...
- A. 96 B. 128 C. 192
D. 224 E. 256
19. Setiap bulan siswa Bimbingan Belajar "Alfabetha" bertambah dengan jumlah yang sama. Siswa baru yang mendaftar pada bulan kedua dan siswa yang mendaftar pada bulan empat berjumlah 20 orang, sedangkan yang mendaftar pada bulan ke lima dan bulan keenam berjumlah 40 orang. Jumlah semua siswa kursus tersebut dalam 10 bulan pertama adalah ...
- A. 180 siswa B. 190 siswa C. 198 siswa
D. 200 siswa E. 220 siswa
20. Berdasarkan penelitian, populasi hewan A bertambah dua kali lipat setiap 10 tahun. Jika pada tahun 2000 populasi hewan A 640 ribu ekor, maka pada tahun 1930 populasinya adalah ekor
- A. 5 B. 10 C. 20
D. 32 E. 40
21. Diketahui dua orang pekerja dengan gaji permulaan Rp 1.600.000,- Setiap tahun pekerja pertama mendapat kenaikan gaji sebesar Rp 10.000,- sedangkan pekerja kedua mendapat kenaikan gaji Rp 23.000,- setiap dua tahun. Setelah 10 tahun bekerja selisih gaji kedua pekerja tersebut adalah
- A. Rp 15.000,- B. Rp 20.000,- C. Rp 50.000,-
D. Rp 130.000,- E. Rp 150.000,-

22. Adit menabung setiap bulan disebuah bank. Pada bulan pertama Adit menabung sebesar Rp 80.000,00 dan pada bulan-bulan berikutnya uang yang ditabung selalu Rp 5.000,00 lebih besar dari uang yang ditabung pada bulan sebelumnya. Jumlah uang tabungan Adit selama satu tahun adalah ...
- A. Rp 1.015.000,00 B. Rp 1.150.000,00 C. Rp 1.290.000,00
D. Rp 1.320.000,00 E. Rp 1.340.000,00
23. Sebuah zat radio aktif meluruh menjadi setengahnya dalam waktu 2 jam. Jika pada pukul 06.00 massa zat tersebut 1.600 gram, massa zat yang tersisa pada pukul 14.00 adalah ...
- A. 100 gram B. 50 gram C. 25 gram
D. 12,5 gram E. 6,25 gram
24. Aturan main :



- Dalam kotak tersedia 10 bendera dan harus diindahkan kedalam botol yang tersedia satu demi satu (tidak sekaligus). Semua peserta lomba mulai bergerak (start) dari botol no 10 untuk mengambil bendera dalam kotak. Jarak tempuh yang dilalui peserta lomba adalah ...
- A. 164 meter B. 880 meter C. 920 meter
D. 1.000 meter E. 1.840 meter
25. Seutas tali dipotong menjadi 6 bagian dengan panjang potongan-potongan tersebut membentuk barisan geometri. Jika panjang potongan terpendek 10 cm dan terpanjang 320 cm, panjang tali sebelum dipotong adalah ...
- A. 310 cm B. 470 cm C. 550 cm
D. 630 cm E. 650 cm

BARISAN DAN DERET

F. Notasi Sigma

Notasi sigma merupakan bentuk penulisan dari penjumlahan suku-suku $U(1) + U(2) + U(3) + U(4) + \dots + U(n)$, dimana suku-suku tersebut diatur menurut pola tertentu.

Sehingga bentuk umum dari notasi sigma adalah :

$$\sum_{n=p}^q U(n) = U(p) + U(p+1) + U(p+2) + U(p+3) + \dots + U(q)$$

Dimana :
p : Batas Bawah
q : Batas Atas
U(n) : Suku ke-n

Sebagai contoh

01. Uraikanlah bentuk setiap notasi berikut ini

(a) $\sum_{n=2}^{12} (3n+4)$

(b) $\sum_{n=3}^{12} (-1)^n (2)^{n-6}$

Jawab

(a) $\sum_{n=2}^{12} (3n+4) = [3(2)+4] + [3(3)+4] + [3(4)+4] + [3(5)+4] + \dots + [3(12)+4]$
 $= 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + \dots + 40$

(b) $\sum_{n=3}^{12} (-1)^n (2)^{n-6} = (-1)^3 (2)^{3-6} + (-1)^4 (2)^{4-6} + (-1)^5 (2)^{5-6} + \dots + (-1)^{12} (2)^{12-6}$
 $= (-1)(2)^{-3} + (2)^{-2} + (-1)(2)^{-1} + (2)^0 + \dots + (2)^6$
 $= -1/8 + 1/4 - 1/2 + 1 + \dots + 64$

02. Ubahlah bentuk uraian berikut ini menjadi notasi sigma dengan batas bawah 3

(a) $5 + 9 + 13 + 17 + \dots + 53$

(b) $42 + 37 + 32 + 27 + \dots - 8$

(c) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 128$

Jawab

(a) $5 + 9 + 13 + 17 + \dots + 53 = \sum_{n=3}^p (an + b)$

$$5 + 9 + 13 + 17 + \dots + 53 = \sum_{n=3}^p (4n - 7) \quad 4p - 7 = 53$$

$$4p = 60$$

$$p = 15$$

$$5 + 9 + 13 + 17 + \dots + 53 = \sum_{n=3}^{15} (4n - 7)$$

$$(b) 42 + 37 + 32 + 27 + \dots - 8 = \sum_{n=3}^p (an + b)$$

$$42 + 37 + 32 + 27 + \dots - 8 = \sum_{n=3}^p (-5n + 57) \quad -5p + 57 = -8$$

$$-5p = -65$$

$$p = 13$$

$$42 + 37 + 32 + 27 + \dots - 8 = \sum_{n=3}^{13} (57 - 5n)$$

$$(c) 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 128 = \sum_{n=3}^p a^{n-b}$$

$$2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 128 = \sum_{n=3}^p 2^{n-2} \quad 2^{p-2} = 128$$

$$2^{p-2} = 2^7$$

$$p - 2 = 7$$

$$p = 9$$

$$81 + 27 + 9 + 3 + \dots + 1/27 = \sum_{n=3}^9 2^{n-2}$$

03. Jika diketahui $\sum_{n=3}^p (an^2 + bn) = 6 + 16 + 30 + 48 + \dots + 240$ maka lengkapilah bentuk

notasi sigmanya

Jawab

$$\sum_{n=3}^p (an^2 + bn) = 6 + 16 + 30 + 48 + \dots + 240$$

$$\text{Maka : } a(3)^2 + b(3) = 6 \text{ maka } 9a + 3b = 6 \dots\dots\dots (1)$$

$$a(4)^2 + b(4) = 16 \text{ maka } 16a + 4b = 16 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Sehingga } \begin{array}{l} 9a + 3b = 6 \quad (4) \\ 16a + 4b = 16 \quad (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} 36a + 12b = 24 \\ 48a + 12b = 48 \\ \hline -12a \quad = -24 \\ a = 2 \end{array}$$

$$9a + 3b = 6$$

$$9(2) + 3b = 6$$

$$18 + 3b = 6$$

$$3b = -12$$

$$b = -4$$

Jadi rumus umum suku ke-n adalah $U_n = 2n^2 - 4n$

$$\sum_{n=2}^p (2n^2 - 4n) = 6 + 16 + 30 + 48 + \dots + 240$$

Sehingga $2p^2 - 4p = 240$
 $p^2 - 2p - 120 = 0$
 $(p - 12)(p + 10) = 0$
 $p = 12$

Jadi $\sum_{n=2}^{12} (2n^2 - 4n) = 6 + 16 + 30 + 48 + \dots + 240$

Terdapat beberapa sifat yang berlaku pada notasi sigma, yakni :

- (1) $\sum_{n=p}^q [a(n) \pm b(n)] = \sum_{n=p}^q a(n) \pm \sum_{n=p}^q b(n)$
- (2) $\sum_{n=p}^q k \cdot a(n) = k \cdot \sum_{n=p}^q a(n)$
- (3) $\sum_{n=p}^q k = (q - p + 1) \cdot k$
- (4) $\sum_{n=p}^q a(n) = \sum_{n=p+r}^{q+r} a(n-r)$ dan $\sum_{n=p}^q a(n) = \sum_{n=p-r}^{q-r} a(n+r)$
- (5) $\sum_{n=p}^q a(n) = \sum_{n=p}^r a(n) + \sum_{n=r+1}^q a(n)$ dimana $p < r < q$

Sifat-sifat di atas dipakai dalam menyelesaikan beberapa soal, sebagai contoh :

04. Buktikanlah bahwa $\sum_{n=2}^8 (4n-3)^2 = 16 \sum_{n=2}^8 n^2 - 24 \sum_{n=2}^8 n + 63$

Jawab

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^8 (4n-3)^2 &= \sum_{n=2}^8 (16n^2 - 24n + 9) \\ &= \sum_{n=2}^8 16n^2 - \sum_{n=2}^8 24n + \sum_{n=2}^8 9 \\ &= \sum_{n=2}^8 16n^2 - \sum_{n=2}^8 24n + (8 - 2 + 1)9 \\ &= 16 \sum_{n=2}^8 n^2 - 24 \sum_{n=2}^8 n + 63 \end{aligned} \quad \text{(terbukti)}$$

05. Ubahlah bentuk $\sum_{n=5}^9 (n^2 - 4n + 2)$ ke dalam notasi sigma dengan

(a) Batas bawah 3

(b) Batas atas 12

Jawab

$$\begin{aligned} \text{(a)} \sum_{n=5}^9 (n^2 - 4n + 2) &= \sum_{n=5-2}^{9-2} ([n+2]^2 - 4[n+2] + 2) \\ &= \sum_{n=3}^7 (n^2 + 4n + 4 - 4n - 8 + 2) \\ &= \sum_{n=3}^7 (n^2 - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \sum_{n=5}^9 (n^2 - 4n + 2) &= \sum_{n=5+3}^{9+3} ([n-3]^2 - 4[n-3] + 2) \\ &= \sum_{n=8}^{12} (n^2 - 6n + 9 - 4n + 12 + 2) \\ &= \sum_{n=8}^{12} (n^2 - 10n + 23) \end{aligned}$$

06. Buktikanlah bahwa $\sum_{n=4}^9 (2n+5)^2 = 4 \sum_{n=7}^{12} n^2 - 4 \sum_{n=7}^{12} n + 6$

Jawab

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^9 (2n+5)^2 &= \sum_{n=4+3}^{9+3} (2[n-3]+5)^2 \\ &= \sum_{n=7}^{12} (2n-1)^2 \\ &= \sum_{n=7}^{12} (4n^2 - 4n + 1) \\ &= \sum_{n=7}^{12} 4n^2 - \sum_{n=7}^{12} 4n + \sum_{n=7}^{12} 1 \\ &= 4 \sum_{n=7}^{12} n^2 - 4 \sum_{n=7}^{12} n + (12 - 7 + 1)1 \\ &= 4 \sum_{n=7}^{12} n^2 - 4 \sum_{n=7}^{12} n + 6 \quad \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

07. Hitunglah $\sum_{n=5}^{12} (n^2 - 4n + 5) - \sum_{n=7}^{14} (n^2 - 8n + 9)$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=5}^{12} (n^2 - 4n + 5) - \sum_{n=7}^{14} (n^2 - 8n + 9) &= \sum_{n=5}^{12} (n^2 - 4n + 5) - \sum_{n=7-2}^{14-2} ([n+2]^2 - 8[n+2] + 9) \\
 &= \sum_{n=5}^{12} (n^2 - 4n + 5) - \sum_{n=5}^{12} (n^2 + 4n + 4 - 8n - 16 + 9) \\
 &= \sum_{n=5}^{12} (n^2 - 4n + 5) - \sum_{n=5}^{12} (n^2 - 4n - 3) \\
 &= \sum_{n=5}^{12} [(n^2 - 4n + 5) - (n^2 - 4n - 3)] \\
 &= \sum_{n=5}^{12} [8] \\
 &= (12 - 5 + 1)8 \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

08. Tentukanlah nilai p dan q jika :

(a) $\sum_{n=3}^{18} (n^2 - 4) = \sum_{n=3}^p (n^2 - 4) + \sum_{n=10}^q (n^2 - 4)$

(b) $\sum_{n=2}^{10} (2n + 5) = \sum_{n=2}^{16} (2n + 5) - \sum_{n=p}^q (2n + 5)$

(c) $\sum_{n=6}^{13} (3n - 1) = \sum_{n=1}^{13} (3n - 1) - \sum_{n=p}^q (3n - 1)$

Jawab

(a) $\sum_{n=3}^{18} (n^2 - 4) = \sum_{n=3}^p (n^2 - 4) + \sum_{n=10}^q (n^2 - 4)$

maka $p = 9$ dan $q = 18$

(b) $\sum_{n=2}^{10} (2n + 5) = \sum_{n=2}^{16} (2n + 5) - \sum_{n=p}^q (2n + 5)$

maka $p = 11$ dan $q = 16$

(c) $\sum_{n=6}^{13} (3n - 1) = \sum_{n=1}^{13} (3n - 1) - \sum_{n=p}^q (3n - 1)$

maka $p = 1$ dan $q = 5$

06. Hitunglah $\sum_{n=8}^{12} (4n-4) - \sum_{n=5}^{16} (4n-2) + \sum_{n=13}^{19} (4n-4)$

Jawab

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=8}^{12} (4n-4) - \sum_{n=5}^{16} (4n-2) + \sum_{n=13}^{19} (4n-4) \\
 = & \sum_{n=8}^{12} (4n-4) + \sum_{n=13}^{19} (4n-4) - \sum_{n=5}^{16} (4n-2) \\
 = & \sum_{n=8}^{19} (4n-4) - \sum_{n=5}^{16} (4n-2) \\
 = & \sum_{n=8-3}^{19-3} (4[n+3]-4) - \sum_{n=5}^{16} (4n-2) \\
 = & \sum_{n=5}^{16} (4n+8) - \sum_{n=5}^{16} (4n-2) \\
 = & \sum_{n=5}^{16} [(4n+8) - (4n-2)] \\
 = & \sum_{n=5}^{16} [10] \\
 = & (16-5+1)10 \\
 = & 120
 \end{aligned}$$

SOAL LATIHAN 06

F. Notasi Sigma

01. Uraian bentuk $\sum_{n=4}^9 (4n - 2)$ adalah
- A. $14 + 18 + 22 + 26 + 30$
B. $18 + 22 + 26 + 30 + 34 + 36$
C. $14 + 18 + 22 + 26 + 30 + 34$
D. $14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$
E. $15 + 18 + 21 + 24 + 30 + 33$
02. Uraian bentuk $\sum_{n=-5}^4 8(-2)^{n-1}$ adalah
- A. $-192 + 96 - 48 + 24 - \dots - 384$
B. $48 - 24 + 12 - 6 + 3 - \dots - 384$
C. $192 - 96 + 48 - 24 + \dots - 384$
D. $-48 + 24 - 12 + 6 - 3 + \dots - 384$
E. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \dots - 64$
03. Uraian bentuk $\sum_{n=2}^{10} x^{n-1} \cdot y^n$ adalah
- A. $x^{10}y^3 + x^9y^4 + x^8y^5 + \dots + x^3y^{10}$
B. $x^{10}y + x^9y^2 + x^8y^3 + \dots + xy^{10}$
C. $x^{10} + x^9y + x^8y^2 + x^7y^3 + \dots + y^{10}$
D. $x^{10}y^{10} + x^9y^9 + x^8y^8 + \dots + xy$
E. $xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 + \dots + x^9y^{10}$
04. Bentuk $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \dots + 47$ jika diubah kedalam notasi sigma menjadi ...
- A. $\sum_{n=1}^{16} (3n + 2)$
B. $\sum_{n=1}^{16} (3n - 1)$
C. $\sum_{n=2}^{13} (3n + 8)$
D. $\sum_{n=3}^{18} (3n - 4)$
E. $\sum_{n=0}^{14} (3n + 5)$
05. Uraian bentuk $32 + 16 + 8 + \dots + \frac{1}{16}$, jika diubah ke dalam notasi sigma menjadi ...
- A. $\sum_{n=3}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
B. $\sum_{n=3}^7 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
C. $\sum_{n=1}^{10} 32 \cdot (2)^{1-n}$
D. $\sum_{n=3}^{13} 2^{8-n}$
E. $\sum_{n=3}^{11} 2^{6-n}$

06. Bentuk $\sum_{n=2}^6 (3n-2)^2$ sama nilainya dengan ...

A. $3 \sum_{n=2}^6 n^2 - 12 \cdot \sum_{n=2}^6 n + 20$

B. $9 \sum_{n=2}^6 n^2 - 12 \cdot \sum_{n=2}^6 n + 4$

C. $9 \sum_{n=2}^6 n^2 - 12 \cdot \sum_{n=2}^6 n + 20$

D. $\left[\sum_{n=2}^6 (3n-2) \right]^2$

E. $\sum_{n=2}^6 (3n-2) \sum_{n=2}^6 (3n-2)$

07. Bentuk $\sum_{n=5}^9 (2n+5)(n-3)$ senilai dengan

A. $\sum_{n=5}^9 (2n+5) \sum_{n=5}^9 (n-3)$

B. $2 \sum_{n=5}^9 n^2 - \sum_{n=5}^9 n - 15$

C. $2 \sum_{n=5}^9 n^2 - \sum_{n=5}^9 n - 135$

D. $2 \sum_{n=5}^9 n^2 - \sum_{n=5}^9 n - 60$

E. $2 \sum_{n=5}^9 n^2 - \sum_{n=5}^9 n - 75$

08. Bentuk $\sum_{n=1}^6 (2n^2 - 3n + 4)$ se nilai dengan

A. $\sum_{n=4}^9 (2n^2 + 9n + 13)$

B. $\sum_{n=4}^{10} (2n^2 + 5n - 4)$

C. $\sum_{n=4}^9 (2n^2 - 15n + 31)$

D. $\sum_{n=4}^{10} (2n^2 - 15n + 31)$

E. $\sum_{n=4}^9 (2n^2 + 5n - 4)$

09. Bentuk $\sum_{n=4}^{10} (3n-1)(2-4n)$ senilai dengan...

A. $\sum_{n=2}^8 (-4n-6)(3n+5)$

B. $\sum_{n=2}^7 (-4n-6)(3n+5)$

C. $\sum_{n=2}^8 (3n-4)(4n+5)$

D. $\sum_{n=2}^7 (3n-4)(4n-5)$

E. $\sum_{n=2}^8 (3n-7)(10-4n)$

10. Bentuk $\sum_{n=4}^8 \frac{2n-4}{8-3n}$ Jika diubah kedalam notasi sigma dengan batas atas 7 menjadi ...

A. $\sum_{n=3}^7 \frac{2n+4}{24-3n}$

B. $\sum_{n=3}^7 \frac{2n-2}{5-3n}$

C. $\sum_{n=2}^7 \frac{2n-2}{5-3n}$

D. $\sum_{n=3}^7 \frac{2n-6}{11-3n}$

E. $\sum_{n=2}^7 \frac{2n-6}{11-3n}$

11. Bentuk $\sum_{n=3}^8 (2n-3)^2$ sama nilainya dengan

A. $4 \sum_{n=1}^6 n^2 - 12 \sum_{n=1}^6 n + 54$

B. $4 \sum_{n=1}^6 n^2 - 4 \sum_{n=1}^6 n + 6$

C. $4 \sum_{n=1}^6 n^2 - 12 \sum_{n=1}^6 n + 9$

D. $4 \sum_{n=1}^6 n^2 + 4 \sum_{n=1}^6 n + 12$

E. $4 \sum_{n=1}^6 n^2 + 4 \sum_{n=1}^6 n + 6$

12. Nilai dari $\sum_{n=1}^{10} (2n-9) - \sum_{n=7}^{16} (2n-1) = \dots$

A. -200

B. -120

C. -55

D. 25

E. 72

13. Nilai dari $\sum_{n=3}^6 (4n-3) - \sum_{n=5}^8 (4n-2) = \dots$

A. 12

B. -24

C. -36

D. -48

E. -52

14. Nilai dari $\sum_{n=6}^{12} (5n-3) - \sum_{n=2}^7 (5n+2) = \dots$

A. 82

B. 87

C. 90

D. 120

E. 147

15. Bentuk $\sum_{n=5}^9 n^2 - 8 \sum_{n=5}^9 n + 80$ sama nilai-nya dengan ...

A. $\sum_{n=1}^5 (n-4)^2$

B. $\sum_{n=1}^5 n^2$

C. $\sum_{n=1}^5 (n-2)^2$

D. $\sum_{n=1}^5 (n-3)^2$

E. $\sum_{n=1}^5 (n+2)^2$

16. Bentuk sederhana dari : $\sum_{n=1}^{20} 2n(2n+3) - \sum_{n=3}^{22} 4(n-2)^2 - \sum_{n=3}^{22} (2n-3)$ adalah ...
- A. $\sum_{n=3}^{22} (8n-19)$ B. $\sum_{n=3}^{22} (8n-15)$ C. $\sum_{n=3}^{22} (8n+4)$
D. $\sum_{n=3}^{22} (4n-9)$ E. $\sum_{n=3}^{22} (4n-5)$
17. $\sum_{n=3}^{15} (n^2+2) = \sum_{n=3}^8 (n^2+2) + \sum_{n=p}^{15} (n^2+2)$ Nilai p =
- A. 8 B. 9 C. 10
D. 11 E. 12
18. $\sum_{n=6}^{15} (n^2-4) = \sum_{n=1}^{15} (n^2-4) - \sum_{n=1}^p (n^2-4)$. Nilai p =
- A. 5 B. 6 C. 7
D. 9 E. 14
19. $\sum_{n=8}^{12} (3n-2) = \sum_{n=1}^p (3n-2) - \sum_{n=1}^7 (3n-2)$. Nilai p = ...
- A. 12 B. 9 C. 8
D. 6 E. 4
20. $\sum_{n=3}^5 (n+5) = \sum_{n=3}^{20} (n+5) - \sum_{n=p}^q (n+5)$. Nilai p + q = ...
- A. 26 B. 36 C. 35
D. 10 E. 8
21. Jika $\sum_{n=3}^{10} (n^2+1) = p + \sum_{n=4}^{10} (n^2+1)$ maka nilai p = ...
- A. 8 B. 10 C. 12
D. 15 E. 18
22. Nilai $\sum_{n=3}^{14} (3n-2) - \sum_{n=5}^{16} (3n-10) = \dots$
- A. 18 B. 20 C. 22
D. 24 E. 32

23. Jika $\sum_{n=13}^{27} (6 + X_n) = \sum_{n=13}^{27} k \cdot X_n$ dan berlaku $\sum_{n=13}^{27} X_n = 10$, maka nilai $k = \dots$

A. 8
D. 15

B. 10
E. 16

C. 12

24. $\sum_{n=5}^{12} (8n+5) - \sum_{n=3}^{10} (5n+16) = \dots$

A. 63
D. 124

B. 82
E. 196

C. 98

25. $\sum_{x=5}^{n+5} 4(x-3)$ dapat dinyatakan menjadi $Pn^2 + Qn + R$. Nilai dari $P + Q - R = \dots$

A. -2
D. 4

B. 0
E. 6

C. 2